Examen du cours MOPSI

06 février 2009, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopiés) sont autorisées.

Important : L'examen comporte un problème et deux exercices indépendants. Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes :
- sur la copie "Analyse numérique", rédiger les réponses à la partie I du problème et à l'exercice 1.
- sur la copie "Probabilités", rédiger les réponses à la partie II du problème et à l'exercice 2.

Les questions *en italique* sont facultatives. Ces questions ne sont pas plus difficiles que les autres et entrent en compte dans la notation. Cependant, (i) elles peuvent être omises sans compromettre la résolution des autres questions ; (ii) une copie qui a parfaitement traité toutes les questions non facultatives obtiendra la note maximale.

Problème : Au sujet de l'équation de Poisson.

Partie I : Estimation d'erreur pour une méthode d'éléments finis (copie "Analyse numérique").

On considère la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = g, \text{ sur } \Omega, \\ \quad u = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, et g est une fonction $L^2(\Omega)$. On introduit la forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et la forme linéaire sur $L^2(\Omega)$:

$$l(v) = \int_\Omega gv.$$

I.1 Rappeler une formulation variationnelle adaptée au problème (1), pour laquelle on sait démontrer l'existence et l'unicité de la solution (rappeler les arguments pour prouver ce résultat).

I.2 Expliquer rapidement comment on discrétise le problème (1) par une méthode d'éléments finis P^k ($k \geq 1$), sur un maillage de pas de discrétisation h. On note $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ l'espace d'éléments finis, et u_h la solution éléments finis. Montrer que pour une telle discrétisation, on a l'estimée d'erreur

$$\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \leq Ch^2 \|u\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

On pourra utiliser le fait que, puisque $g \in L^2(\Omega)$, la solution u de (1) est dans $H^2(\Omega)$, et l'estimée d'interpolation :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^2(\Omega), \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

On suppose que la quantité que l'on veut en fait calculer n'est pas u mais une fonctionnelle de u :

$$s(u) = \int_A u(x)\,dx \tag{2}$$

où A est un ouvert inclus dans Ω de mesure non nulle.

I.3 Montrer que s est une application continue de $H^1_0(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En déduire une première estimation de l'erreur $|s(u) - s(u_h)|$.

I.4 On introduit la solution ψ du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 1_A, \text{ sur } \Omega, \\ \quad\;\; \psi = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

et on note $\psi_h \in V_h$ l'approximation de ψ obtenue par discrétisation par éléments finis P^k du problème (3), en utilisant le même espace d'approximation V_h que dans les questions précédentes. Montrer que

$$s(u) - s(u_h) = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(\psi - \psi_h).$$

I.5 En déduire l'estimation suivante : $\exists C > 0$,

$$|s(u) - s(u_h)| \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Comparer avec l'estimation obtenue en I.3.

I.6 *(Facultatif) On suppose maintenant que $d = 1$, et on s'intéresse à la solution $u(x^*)$ en un point $x^* \in \Omega$. On introduit $\overline{\psi}$ solution du problème*

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}\overline{\psi} = \delta_{x^*}, \text{ sur } \Omega, \\ \quad\quad\;\; \overline{\psi} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où δ_{x^*} désigne un Dirac en x^*. On suppose que x^* est un noeud du maillage du domaine Ω, et que l'on utilise toujours une discrétisation par éléments finis P^k de (1). Montrer que $\overline{\psi} \in V_h$ et en déduire que

$$u_h(x^*) = u(x^*).$$

Partie II : Interprétation probabiliste de l'équation de Poisson (copie "Probabilités").

II.1 *En dimension 1.* Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration usuelle associée à ce mouvement brownien. On note pour $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, $W^x_t = x + W_t$ le mouvement brownien translaté de x.

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(1) = f(1),\, u(-1) = f(-1). \end{cases} \tag{5}$$

II.1.a Résoudre l'équation différentielle (5). Montrer que $(u(W_t^x), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Donner la loi de ce processus.

II.1.b On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\tau^x = \inf\{t \geq 0, W_t^x \notin]-1,1[\}$, $\tau_1^x = \inf\{t \geq 0, W_t^x \geq 1\}$ et $\tau_{-1}^x = \inf\{t \geq 0, W_t^x \leq -1\}$. En exprimant τ^x à l'aide de τ_1^x et τ_{-1}^x, montrer qu'il s'agit d'un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, fini p.s.

II.1.c Montrer que $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[u(W^x_{\tau^x \wedge t})] = u(x)$, puis en déduire que

$$\forall x \in [-1,1], u(x) = \mathbb{E}[f(W^x_{\tau^x})].$$

II.1.d En prenant f telle que $f(1) \neq f(-1)$, montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \mathbb{P}(\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x) = \frac{1+x}{2}.$$

II.2 *En dimension 2.* De façon similaire, on admet que pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, il existe une solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$ telle que :

$$\begin{cases} \partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}, \\ u(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{6}$$

où $\partial\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2+y^2 = 1\}$ désigne le bord de $\mathcal{D}$. On se propose d'obtenir une représentation probabiliste de u similaire à celle obtenue à la question **II.1.c**

Soient $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard de dimension 2 et $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration usuelle associée à ce mouvement brownien. On note, W^1 et W^2 les deux composantes du mouvement brownien *i.e.* $W_t = (W_t^1, W_t^2)$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$, $W_t^{(x,y)} = (x,y) + W_t$ et on définit

$$\tau^{(x,y)} = \inf\{t \geq 0, (x+W_t^1)^2 + (y+W_t^2)^2 \geq 1\},$$

le premier temps de sortie de $(W_t^{(x,y)}, t \geq 0)$ du disque unité.

II.2.a Montrer que $\tau^{(x,y)} \leq \tilde{\tau}^{(x,y)} = \inf\{t \geq 0, \max(|x+W_t^1|, |y+W_t^2|) \geq 1\}$. Exprimer $\tilde{\tau}^{(x,y)}$ à l'aide des temps d'atteinte des mouvements browniens $(W_t^1, t \geq 0)$ et $(W_t^2, t \geq 0)$. En déduire que $\tilde{\tau}^{(x,y)} < \infty$ p.s. puis que $\tau^{(x,y)} < \infty$ p.s.

II.2.b Montrer (rigoureusement) que $\tau^{(x,y)}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.

II.2.c On admet que la formule d'Itô (en dimension 2) appliquée à u entre 0 et $\tau^{(x,y)} \wedge t$ s'écrit :

$$\begin{aligned} u\left(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)} \wedge t}\right) &= u(x,y) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau^{(x,y)}\}} \left(\partial^2_{xx} u(W_s^{(x,y)}) + \partial^2_{yy} u(W_s^{(x,y)})\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau^{(x,y)}\}} \partial_x u(W_s^{(x,y)}) dW_s^1 + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau^{(x,y)}\}} \partial_y u(W_s^{(x,y)}) dW_s^2. \end{aligned}$$

On suppose $(x,y) \in \mathcal{D}$.

Vérifier que les processus $\left(\mathbf{1}_{\{t \le \tau^{(x,y)}\}} \partial_x u(W_t^{(x,y)}), t \ge 0\right)$ et $\left(\mathbf{1}_{\{t \le \tau^{(x,y)}\}} \partial_y u(W_t^{(x,y)}), t \ge 0\right)$ sont $(\mathcal{F}_t)$-adaptés et bornés, puis montrer que $\left(u\left(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)} \wedge t}\right), t \ge 0\right)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue. En déduire que

$$\mathbb{E}\left[u\left(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)} \wedge t}\right)\right] = u(x,y)$$

puis que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x^2 + y^2 \le 1$,

$$u(x,y) = \mathbb{E}\left[f\left(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)}}\right)\right].$$

II.3 *(Facultatif) Donner un algorithme permettant de simuler des trajectoires de* $(W_t^{(x,y)}, t \ge 0)$*, puis expliquer, sans donner de preuve, comment on peut calculer* $u(x,y)$ *par un algorithme de Monte-Carlo.*

Exercice 1 : Equations différentielles ordinaires à coefficients périodiques (copie “Analyse numérique”).

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

où x est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et A est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ que l'on suppose périodique de période T :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A(t+T) = A(t).$$

1 Que pouvez-dire concernant l'existence et l'unicité des solutions à (7) ? Est-ce que la solution de (7) est nécessairement périodique ? Dans le cas où $d = 1$, donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution $x(t)$ reste bornée pour $t \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$) et pour toute condition initiale x_0. L'objectif de cet exercice est de comprendre sous quelles conditions $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ pour toute condition initiale x_0, dans le cas $d \ge 2$.

Attention : noter que l'on s'intéresse à la bornitude de la solution pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, et non pas seulement pour $t \ge t_0$.

On introduit la résolvante associée à (7), c'est-à-dire la fonction $(t_0, t) \in \mathbb{R}^2 \to R(t_0, t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $x(t)$ solution de (7) s'écrit $x(t) = R(t_0, t)x_0$.

2 Rappeler l'équation différentielle ordinaire satisfaite par $R(t_0, t)$ et vérifier que

$$R(s,t)R(t_0,s) = R(t_0,t).$$

Rappeler pourquoi $\det(R(t_0,t))$ est nécessairement non nul, et donc positif. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$R(t_0+T, t+T) = R(t_0, t).$$

Ceci suggère de s'intéresser à ce qui se passe sur une période, en introduisant la matrice

$$M(t_0) = R(t_0, t_0+T).$$

3 Montrer que $t_0 \mapsto M(t_0)$ est périodique de période T, et montrer que pour tout entier n

$$R(t_0, t_0+nT) = M(t_0)^n.$$

Ce résultat indique que $R(t_0,t)$ a un comportement exponentiel. Pour mettre en évidence ce comportement, on introduit une matrice $Q(t_0)$ telle que

$$\exp(TQ(t_0)) = M(t_0). \tag{8}$$

On rappelle que pour une matrice A, $\exp A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$, la série étant normalement convergente, et que $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$ (cf. cours Section 2.1.2). On admet que, puisque $\det M(t_0) \neq 0$, il est possible de trouver une matrice $Q(t_0)$ satisfaisant (8) (non unique et à coefficients complexes en général). On introduit alors

$$P(t_0,t) = R(t_0,t)\exp(-(t-t_0)Q(t_0)).$$

4 Montrer que

$$P(t_0, t+T) = P(t_0, t).$$

Soit $y(t) = P(t_0,t)^{-1}x(t)$. Exhiber une équation différentielle ordinaire dont y est solution. En utilisant les résultats de la Section 3.2 du cours, expliquer pourquoi les solutions $x(t)$ de (7) restent bornées pour $t \in \mathbb{R}$ et pour toute condition initiale x_0 si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de $Q(t_0)$ sont nulles et la matrice $Q(t_0)$ est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).

5 En utilisant la trigonalisation dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$\mathrm{Sp}(M(t_0)) = \{\exp(T\gamma),\ \gamma \in \mathrm{Sp}(Q(t_0))\}$$

où pour toute matrice A, $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

6 On rappelle le résultat suivant : pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\exp(A)$ est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) si et seulement si A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$). *(Facultatif) Démontrer cette propriété en utilisant la décomposition de Jordan.*

En déduire que $(x(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est borné (pour toute condition initiale) si et seulement si $M(t_0)$ est diagonalisable et le module des valeurs propres de $M(t_0)$ vaut 1.

Ceci implique en particulier que les propriétés sur $Q(t_0)$ permettant d'établir la bornitude de $(x(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ne dépendent pas du choix de $Q(t_0)$ vérifiant (8).

7 *(Facultatif) Montrer que pour deux temps t_0 et t_1*

$$M(t_1) = R(t_0, t_1) M(t_0) R(t_0, t_1)^{-1}.$$

En déduire que les propriétés sur $M(t_0)$ (et donc $Q(t_0)$) permettant d'établir la bornitude de $(x(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ne dépendent pas du choix de t_0.

On s'intéresse dans la suite au cas particulier de l'équation de Hill que l'on rencontre dans plusieurs problèmes de modélisation avec un forçage périodique :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 z}{dt^2}(t) + q(t) z(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ \left(z(t_0), \dfrac{dz}{dt}(t_0) \right) = (z_0, \dot{z}_0), \end{cases} \tag{9}$$

où z est une fonction à valeurs réelles, et q est une fonction continue périodique de période T.

8 *(Facultatif) Mettre l'Equation* (9) *sous la forme* (7)*.*

9 *(Facultatif) On note $\delta = \frac{\mathrm{tr}(M(t_0))}{2}$. En utilisant la solution de l'Exercice 3 p. 8 du cours, montrer que* $\det M(t_0) = 1$*. Donner le spectre de $M(t_0)$ en fonction de δ.*

10 *(Facultatif) Montrer que si $|\delta| > 1$, alors $\|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \infty$. Montrer que si $|\delta| < 1$, alors $\|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$. Que dire dans le cas $|\delta| = 1$?*

Exercice 2 Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ non symétrique (copie "Probabilités").

Soit $p \in]0,1[$. On considère $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d de loi $\mathbb{P}(\xi_1 = 2) = p$, $\mathbb{P}(\xi_1 = -3) = 1 - p$. On note $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. On définit :

$$\tilde{X}_0^x = x, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}_n^x = x + \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

1 Pour $x \in \mathbb{Z}$, montrer que $(\tilde{X}_n^x, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ issue de x dont on donnera la matrice de transition P. S'agit-il d'une chaîne irréductible ?

2 Pour quelle valeur de p le processus $(\tilde{X}_n^x, n \in \mathbb{N})$ est-il une $(\tilde{\mathcal{F}}_n)$-martingale ?

On suppose dans toute la suite de l'exercice que p prend cette valeur.

3. Soit $a \in \mathbb{Z}, \ a \geq 1$. Montrer que $\tilde{\tau}_{\geq a} = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}_n^0 \geq a\}$ est un $(\tilde{\mathcal{F}}_n)$-temps d'arrêt.

Soit $\lambda \geq 0$. On pose $\psi(\lambda) = \ln(\frac{2}{5} e^{-3\lambda} + \frac{3}{5} e^{2\lambda})$. Montrer que $\left(\exp\left(\lambda \tilde{X}_n^0 - n\psi(\lambda) \right), n \in \mathbb{N} \right)$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}_n)$-martingale.

En déduire que $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n} - (\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n)\psi(\lambda)\right)\right] = 1$, puis que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - \tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)\right)\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}}\right] = 1.$$

Montrer que $\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}}\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}} \in \{a, a+1\}$. Donner un encadrement pour $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)\right)\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}}\right]$, puis obtenir que $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{\geq a} < +\infty) = 1$.

(Facultatif) Montrer que $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante. Son inverse est donc bien défini. Montrer que $(\psi^{-1})'(y) \underset{y\to 0^+}{\to} +\infty$. Montrer que pour $y > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\tilde{\tau}_{\geq a}\exp\left(\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}\right)\right] = (\psi^{-1})'(y)\mathbb{E}\left[\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}}\exp\left(\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}\right)\right],$$

puis donner la valeur de $\mathbb{E}[\tilde{\tau}_{\geq a}]$.

On admettra que, de la même manière, on peut prouver que pour $a \in \mathbb{Z}, a \leq -1$, $\tilde{\tau}_{\leq a} = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}^0_n \leq a\}$, $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{\leq a} < +\infty) = 1$.

En revanche, pourquoi ne peut-on pas prouver avec ces mêmes arguments que pour $a \in \mathbb{Z},\ a \geq 1$, $\tilde{\tau}_a = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}^0_n = a\}$ est fini p.s ?

Les questions suivantes vont permettre néanmoins de répondre à ce problème.

4 Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov de matrice de transition la matrice P obtenue à la question 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration engendrée par cette chaîne. On pose pour $x \in \mathbb{Z}$, $N_x = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{X_k=x\}}$.

Montrer que l'on a soit $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 1$, soit $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 0$, où $\mathbb{P}_x$ désigne la probabilité conditionnellement à $\{X_0 = x\}$ (cf. Définition 4.1.10 du cours).

5 On note pour $a \in \mathbb{Z}$, $\tau_{\geq a} = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n \geq a\}$ et $\tau_{\leq a} = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n \leq a\}$. Montrer que pour $x < a$, $\mathbb{P}_x(\tau_{\geq a} < +\infty) = 1$ et pour $x > a$, $\mathbb{P}_x(\tau_{\leq a} < +\infty) = 1$.

6 Soit $a \in \mathbb{Z}, a \geq 1$. On pose $\sigma^0 = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêts suivant :

$$\sigma^{2n-1} = \inf\{k > \sigma^{2n-2}, X_k \geq a\},\ \sigma^{2n} = \inf\{k > \sigma^{2n-1}, X_k \leq -a\},$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_0(\sigma^n < \infty) = 1$. (On pourra remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{\sigma^{2n-1}} \in \{a, a+1\}, X_{\sigma^{2n}} \in \{-a, -(a+1), -(a+2)\}$).

En déduire que $\mathbb{P}_0(N_a + N_{a+1} = +\infty) = 1$.

7 A l'aide des questions 4 et 6, montrer que l'on a nécessairement $\mathbb{P}_0(N_a = +\infty) = 1$ et que la chaîne est récurrente. Que vaut $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_a < \infty)$? *(Facultatif) La chaîne $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est-elle récurrente positive ou récurrente nulle ?*