Examen du cours MOPSI

12 février 2010, 08h30-12h00.

Corrigé

Exercice I : Comportement en temps long et équation différentielle ordinaire.

1 Il s'agit du modèle du pendule linéarisé avec frottement visqueux. Le seul point d'équilibre est $(x, v) = (0, 0)$. C'est un point d'équilibre stable, ce qu'on peut vérifier par exemple en utilisant la fonction de Lyapunov $H(x, v) = (x^2 + v^2)/2$. En fait, on montrera dans la suite que c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

2 Il suffit de faire le calcul explicitement. On vérifie que

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = 0.$$

L'équation caractéristique associée à cette EDO s'écrit :

$$r^2 + \lambda r + 1 = 0$$

et admet comme solution $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}\right)$ si $\lambda > 2$, et $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\lambda \pm i\sqrt{4 - \lambda^2}\right)$ si $\lambda < 2$. Dans le cas où $\lambda = 2$, on a une racine double $r_+ = r_- = -\frac{\lambda}{2}$.

Par conséquent, la solution s'écrit ($a_\pm$, a_0 et a_1 désignant des constantes)

- si $\lambda > 2$,

$$x(t) = a_+ \exp\left(\frac{1}{2}\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}\right) t\right) + a_- \exp\left(\frac{1}{2}\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}\right) t\right)$$

- si $\lambda < 2$,

$$x(t) = \exp(-\lambda t/2)\left(a_0 \cos(\sqrt{4 - \lambda^2} t) + a_1 \sin(\sqrt{4 - \lambda^2} t)\right)$$

- si $\lambda = 2$,

$$x(t) = (a_0 + a_1 t) \exp(-\lambda t/2).$$

On en déduit que $x(t)$ et $v(t)$ convergent exponentiellement vite (quand $t \to \infty$) vers 0 avec un taux $r(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4} 1_{\lambda \geq 2}\right)$, pour $\lambda \neq 2$. Dans le cas critique, pour $\lambda = 2$, le taux est $r = 1 + \eta$ pour tout $\eta > 0$.

3 $H(x, v)$ représente la somme de l'énergie potentielle associée à la force $-x$ qui s'exerce sur le système, et de l'énergie cinétique. Un calcul donne immédiatement :

$$\frac{d}{dt} H(x(t), v(t)) = -\lambda v(t)^2.$$

On observe que $H(x, v)$ n'est pas majoré par v^2, et donc il ne semble pas possible d'appliquer un Lemme de Gronwall pour conclure à la convergence exponentielle de $H(x(t), v(t))$ vers 0.

4 Si $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(x,v) &= \frac{1}{2}(x^2+v^2) + \varepsilon x v \\ &\geq \frac{1}{2}(x^2+v^2) - \frac{\varepsilon}{2}(x^2+v^2) \\ &= \frac{1-\varepsilon}{2}(x^2+v^2). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(x,v) &= \frac{1}{2}(x^2+v^2) + \varepsilon x v \\ &\leq \frac{1}{2}(x^2+v^2) + \frac{\varepsilon}{2}(x^2+v^2) \\ &= \frac{1+\varepsilon}{2}(x^2+v^2). \end{aligned}$$

5 On a (pour $\eta > 0$),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_\varepsilon(x(t),v(t)) &= \left[x\dot{x} + v\dot{v} + \varepsilon(x\dot{v} + \dot{x}v)\right](t) \\ &= \left[(\varepsilon-\lambda)v^2 - \varepsilon x^2 - \varepsilon\lambda x v\right](t) \\ &\leq \left[(\varepsilon-\lambda)v^2 - \varepsilon x^2 + \varepsilon\lambda\left(\eta x^2 + \frac{1}{4\eta}v^2\right)\right](t) \\ &= \left(\varepsilon - \lambda + \frac{\varepsilon\lambda}{4\eta}\right) v(t)^2 + \varepsilon(\lambda\eta - 1)x(t)^2. \end{aligned}$$

En choisissant η pour égaliser les deux termes en facteur au membre de droite, on a

$$\varepsilon - \lambda + \frac{\varepsilon\lambda}{4\eta} = \varepsilon(\lambda\eta - 1)$$

soit

$$\eta^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{2}{\lambda}\right)\eta - \frac{1}{4} = 0.$$

D'où, puisqu'il faut $\eta > 0$,

$$\eta = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\varepsilon}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{1}{4}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_\varepsilon(x(t),v(t)) &\leq \varepsilon\left[-\frac{\lambda}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right]\left(x(t)^2 + v(t)^2\right) \\ &= \left[-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{\lambda^2\varepsilon^2}{4}}\right]\left(x(t)^2 + v(t)^2\right) \\ &= -\frac{\lambda}{2}\left[1 - \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{\lambda} - 1\right)^2 + \varepsilon^2}\right]\left(x(t)^2 + v(t)^2\right). \end{aligned}$$

6 On remarque que $\left[1-\sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{\lambda}-1\right)^2+\varepsilon^2}\right] \geq 0$ si $0<\varepsilon<\varepsilon^*(\lambda)$, avec

$$\varepsilon^*(\lambda)=\frac{4\lambda}{4+\lambda^2}<1.$$

En utilisant l'inégalité $H_\varepsilon(x,v) \leq \frac{1+\varepsilon}{2}(x^2+v^2)$, on obtient donc

$$\frac{d}{dt}H_\varepsilon(x(t),v(t)) \leq -\lambda\frac{1-\sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{\lambda}-1\right)^2+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon}H_\varepsilon(x(t),v(t)).$$

En utilisant l'inégalité $H_\varepsilon(x,v) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}(x^2+v^2)$, ceci donne donc la convergence exponentielle de $x(t)$ et de $v(t)$ vers 0 à la vitesse $\frac{1}{2}f(\lambda,\varepsilon)$.

7 La fonction F représente, pour un bon choix de ε le taux de convergence de $x(t)^2$ et de $v(t)^2$ obtenu par la fonction de Lyapunov H_ε. La fonction G donne la taux de convergence optimal. On voit que la méthode par fonction de Lyapunov permet d'obtenir le bon taux de convergence pour λ proche de 0, et pour λ grand, mais que dans le régime intermédiaire, le résultat n'est pas optimal.

On aurait aussi pu utiliser comme fonction de Lyapunov $\overline{H}(x,v)=x^2/2+\lambda xv/2+(\lambda^2/4+1/2)v^2$. On peut vérifier que cette fonction permet également de conclure à la convergence exponentielle, mais avec un taux moins bon que celui obtenu en 7.

Problème I : Equation de Poisson : interprétation probabiliste et estimateur *a posteriori.*

A Interprétation probabiliste d'une équation de Poisson.

A.1 C'est du cours. On peut montrer qu'il esxite une unique solution $u \in V$ au problème (2), avec

$$V=\{v \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus (\overline{A}\cup\overline{B})),\ v=0 \text{ sur } \partial A,\ v=1 \text{ sur } \partial B\}.$$

Une méthode pour démontrer cela consiste par exemple à introduire un relèvement des conditions aux limites, c'est à dire une fonction $p_0 \in V$ (qui existe par le théorème de trace vu en cours) et de réécrire le problème sur la fonction $\tilde{p}=p-p_0$:

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{p}=0 \text{ sur } \mathbb{R}^d\setminus(\overline{A}\cup\overline{B}), \\ \tilde{p}=0 \text{ sur } \partial A\cup\partial B. \end{cases}$$

On construit ensuite une solution $\tilde{p}\in H^1_0(\mathbb{R}^d\setminus(\overline{A}\cup\overline{B}))$ de ce problème par Lax-Milgram et l'inégalité de Poincaré (arguments standards). En utilisant le fait que les ouverts A et B sont réguliers, on montre en fait que p_0 est regulière, et donc que p est régulière. On utilisera dans la suite que p est de classe $\mathcal{C}^2$, et en particulier que sont gradient est borné sur le domaine $\mathbb{R}^d\setminus(\overline{A}\cup\overline{B})$ (supposé borné).

On obtient que $0\leq p\leq 1$ par application du principe du maximum. On va en fait montrer ci-dessous que $p(x)$ peut s'interpréter comme la probabilité d'un évènement.

A.2 Le temps d'arrêt $\tau(x) = \min(T_A(x), T_B(x))$ représente le premier moment où $x + W_t$ atteint A ou B, et c'est donc aussi le premier moment où $x+W_t$ quitte l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ (par continuité des trajectoires du mouvement brownien).

En appliquant la formule d'Itô à $d\left(p(x + W_t)\right)$ et en utilisant l'équation vérifiée par p, on a : $\forall t \in (0, \tau(x))$,

$$p(x + W_t) = p(x) + \int_0^t \nabla p(x + W_s) \cdot dW_s.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} p(x + W_{\min(\tau(x),n)}) &= p(x) + \int_0^{\min(\tau(x),n)} \nabla p(x + W_s) \cdot dW_s \\ &= p(x) + \int_0^n 1_{s<\tau(x)} \nabla p(x + W_s) \cdot dW_s. \end{aligned}$$

Or, $1_{s<\tau(x)} \nabla p(x + W_s)$ est un processus adapté (et progressivement mesurable) qui vérifie $\int_0^n \mathbb{E}\left(|1_{s<\tau(x)} \nabla p(x + W_s)|^2\right) ds < \infty$, puisque ∇p est supposé borné. Par conséquent, on a $\mathbb{E}\left(\int_0^n 1_{s<\tau(x)} \nabla p(x + W_s) \cdot dW_s\right)$ et donc

$$\mathbb{E}\left(p(x + W_{\min(\tau(x),n)})\right) = \mathbb{E}(p(x)).$$

Un théorème de convergence dominée permet de passer à la limite $n \to \infty$, puisque p est une fonction bornée (positive et inférieure à 1).

A.3 On a, en utilisant les conditions aux limites sur p :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(p(x + W_{\tau(x)})\right) &= \mathbb{E}\left(p(x + W_{\tau(x)}) 1_{T_A(x) \leq T_B(x)}\right) + \mathbb{E}\left(p(x + W_{\tau(x)}) 1_{T_A(x) > T_B(x)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(p(x + W_{T_A(x)}) 1_{T_A(x) \leq T_B(x)}\right) + \mathbb{E}\left(p(x + W_{T_B(x)}) 1_{T_A(x) > T_B(x)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(1_{T_A(x) > T_B(x)}\right) \\ &= \mathbb{P}(T_A(x) > T_B(x)). \end{aligned}$$

B Estimateurs *a posteriori* pour une équation de Poisson.

B.1 Il suffit d'utiliser le fait que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H^1_0(\Omega)$ et donc sur $V_h \subset H^1_0(\Omega)$. Le Lemme de Lax-Milgram appliqué sur V_h permet donc de conclure à l'existence d'une unique solution u_h au problème d'éléments finis. On peut aussi plus simplement montrer l'injectivité de la fonction linéaire qui à U_h associe $A_h U_h$, où U_h est le vecteur coordonnées associé à u_h et A_h est la matrice associée à la forme bilinéaire a sur V_h. En effet, si $A_h U_h = 0$, alors $U_h^T A_h U_h = 0$ ce qui est équivalent à $a(u_h, u_h) = 0$, et donc $u_h = 0$ par coercivité de a.

B.2 On a

$$\begin{aligned}
a(u_h, v) &= \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(- \int_K \Delta u_h v + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(- \int_K \Delta u_h v + \frac{1}{2} \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] v \right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant basée sur le fait qu'une arête intérieure appartient à exactement deux éléments.

On a donc

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v - v_h) \\
&= a(u, v - v_h) - a(u_h, v - v_h) \\
&= \int_\Omega f(v - v_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\int_K \Delta u_h (v - v_h) - \frac{1}{2} \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] (v - v_h) \right) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) - \frac{1}{2} \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] (v - v_h) \right).
\end{aligned}$$

B.3 En prenant $v_h = R_h(v)$ comme fonction test, on obtient (la constante C pouvant changer de valeur d'une ligne à l'autre, mais ne dépendant pas de f, u, u_h, v, h_K ni h_S) :

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, v) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(v - R_h(v)) - \frac{1}{2} \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] (v - R_h(v)) \right) \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|v - R_h(v)\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{L^2(\partial K\setminus\partial\Omega)} \|v - R_h(v)\|_{L^2(\partial K\setminus\partial\Omega)} \right) \\
&\leq C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|v\|_{H^1(\Delta K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{L^2(S)} \|v\|_{H^1(\Delta S)} \right) \\
&\leq C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\Delta K)} \left(h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{L^2(S)} \right) \\
&\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|^2_{H^1(\Delta K)} \right)^{1/2} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{L^2(S)} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(h_K^2 \|f + \Delta u_h\|^2_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|^2_{L^2(S)} \right) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pour passer de la troisième à la quatrième ligne, on a utilisé le fait que si $S \subset \partial K \setminus \partial \Omega$, alors $\Delta S \subset \Delta K$ et donc $\|v\|_{H^1(\Delta S)} \leq \|v\|_{H^1(\Delta K)}$. Pour passer de l'avant-dernière à la dernière ligne, on a utilisé le fait qu'un élément K n'appartient qu'à un nombre fini de ΔK. On a donc bien

$$a(u - u_h, v) \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}.$$

En prenant $v = u - u_h$ dans cette inégalité, et en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C a(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq C\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

B.4 L'intérêt d'un tel estimateur est qu'il permet de savoir, en n'utilisant que des quantités calculables numériquement, où sont commises les erreurs. Ainsi, on peut raffiner le maillage de manière adaptative, en ajoutant des mailles là où les erreurs sont les plus importantes, ce qui est nettement moins coûteux qu'un raffinement uniforme.

Exercice II : étude de la probabilité de panne d'une machine.

1 On a

$$P = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est irréductible : en effet $P(i,j) > 0$ sauf pour $(i,j) = (1,3)$, mais on a $P^2(1,3) \geq 8/100 > 0$.

2 En écrivant $\mu P = \mu$, il vient

$$\begin{cases} 2\mu(1) + 2\mu(2) + \mu(3) = 10\mu(1) \\ 8\mu(1) + 7\mu(2) + 4\mu(3) = 10\mu(2) \\ \mu(2) + 5\mu(3) = 10\mu(3) \end{cases}$$

La troisième relation donne $\mu(2) = 5\mu(3)$, la première donne ensuite $\mu(1) = \frac{11}{8}\mu(3)$ et la deuxième est alors automatiquement satisfaite. En normalisant, il vient que :

$$\mu = \frac{1}{59}[11\ 40\ 8].$$

La chaîne est donc récurrente positive. En utilisant le théorème ergodique, il vient que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = 3\}} \to 8/59, \ p.s.$$

3 On a $P(i,j) \geq \alpha\pi(j)$, où $\alpha = 1/5$ et $\pi = [0\ 1/2\ 1/2]$. En utilisant le résultat du polycopié basé sur la condition de Doeblin, on en déduit que $\mathbf{V}(\mu - p_n) \leq (4/5)^n \mathbf{V}(\mu - p_0)$, où p_n désigne la mesure de probabilité de X_n et $\mathbf{V}$ la norme en variation. Comme $\mathbf{V}(\mu - p_0) = 87/59$, on en déduit en particulier que

$$|\mathbb{P}(X_n = 3) - 8/59| \leq (87/59) \times (4/5)^n.$$

Problème II : étude de la loi du temps d'atteinte pour un mouvement brownien avec dérive.

1 Il s'agit de vérifier que $\{\tau_a^\lambda \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Comme $a > 0$ et que le processus $(W_t + \lambda t, t \geq 0)$ est continu, on écrit que : $\{\tau_a^\lambda \leq t\} = \{\exists s \in [0,t], W_s + \lambda s \geq a\} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \{\exists s \in [0,t], W_s + \lambda s > a - 1/n\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s \in [0,t]\cap\mathbb{Q}} \{W_s + \lambda s > a - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$.

Par conséquent, $\tau_a^\lambda \wedge T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable puisque pour tout $t \geq 0$, $\{\tau_a^\lambda \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_T$.

2 Il s'agit de la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien d'espérance $(\mu t_1, \ldots, \mu t_n)$ et de matrice de covariance $(t_i \wedge t_j)_{i,j}$:

$$\Phi(u) = \mathbb{E}[\exp(\sum_{l=1}^n i u_l (W_{t_l} + \mu t_l))] = \exp\left(i\mu \sum_{l=1}^n u_l t_l - \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n u_l u_k (t_l \wedge t_k) \right).$$

3 Pour la mesurabilité de $\tau_a^0 \wedge T$ par rapport à $\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T}$, il s'agit de montrer que pour tout $s, t \geq 0$, $\{\tau_a^0 \wedge T \leq s\} \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Cela est clair puisque $\{\tau_a^0 \wedge T \leq s\} \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\} = \{\tau_a^0 \wedge T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ puisque $\tau_a^0 \wedge T$ est un temps-d'arrêt. Pour la mesurabilité de $W_{\tau_a^0 \wedge T}$, on regarde pour $x \in \mathbb{R}$, l'événement $\{W_{\tau_a^0\wedge T} \leq x\} \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\}$. Si $t \geq T$, comme $W_{\tau_a^0 \wedge T} = a\mathbf{1}_{\{\tau_a^0 \leq T\}} + W_T \mathbf{1}_{\{\tau_a^0 > T\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, cet événement est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Si $t < T$, $\{W_{\tau_a^0 \wedge T} \leq x\} \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\} = \{a \leq x\} \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, puisque $\tau_a^0 \wedge T$ est un temps-d'arrêt.

4 En utilisant la propriété de Markov forte du mouvement brownien, $(W_{\tau_a^0\wedge T + u} - W_{\tau_a^0 \wedge T}, u \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a^0\wedge T}$ et donc de $\tau_a^0 \wedge T$ et $W_{\tau_a^0 \wedge T}$ d'après la question précédente. Par conséquent $\mathbb{E}[\exp(\lambda(W_T - W_{\tau_a^0 \wedge T}) - (\lambda^2/2)(T - \tau_a^0 \wedge T))|\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T}] = \psi(T - \tau_a^0 \wedge T) = 1$, puisque $\psi(t) = \mathbb{E}[\exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)] = 1$.

5 Pour $y > 0$, $\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et on a l'encadrement $0 \leq \exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T)) \leq \exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)$. Comme $\mathbb{E}(\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)) = 1$, $\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T)) \in L^1(\Omega)$ et on a donc

$$\tilde{\mathbb{E}}[\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))] = \mathbb{E}[\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))].$$

On en déduit, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(\lambda(W_T - W_{\tau_a^0 \wedge T}) - (\lambda^2/2)(T - \tau_a^0 \wedge T))|\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T}]\exp(\lambda W_{\tau_a^0 \wedge T} - (y + \lambda^2/2)(\tau_a^0 \wedge T))] \\
&= \mathbb{E}[\exp(\lambda W_{\tau_a^0 \wedge T} - (y + \lambda^2/2) \times (\tau_a^0 \wedge T))].
\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}[\exp(\lambda W_{\tau_a^0\wedge T} - (y+\lambda^2/2)\times(\tau_a^0\wedge T))]$
$= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau_a^0\leq T}\exp(\lambda a-(y+\lambda^2/2)\tau_a^0)]+\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau_a^0>T}\exp(\lambda W_T-(y+\lambda^2/2)T)]$. Le premier terme tend par convergence dominée vers $\mathbb{E}[\exp(\lambda a-(y+\lambda^2/2)\tau_a^0)] = \exp(a(\lambda-\sqrt{2y+\lambda^2}))$ lorsque $T\to+\infty$, tandis que le second tend vers 0 puisque :

$$0\leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau_a^0>T}\exp(\lambda W_T-(y+\lambda^2/2)T)]\leq \mathbb{E}[\exp(\lambda W_T-(y+\lambda^2/2)T)] = e^{-yT}.$$

6 En appliquant la formule obtenue en 2 avec $u_{n+1}=-i\lambda$ et $\mu=0$,

$$\begin{aligned}
\tilde\Phi(u) &= \tilde{\mathbb{E}}[\exp(\sum_{l=1}^n iu_lW_{t_l})]\\
&= \mathbb{E}[\exp(\lambda W_T-\lambda^2T/2+\sum_{l=1}^n iu_lW_{t_l})]\\
&= \exp\left(-\lambda\sum_{l=1}^n u_l(t_l\wedge T)-\frac12\sum_{l,k=1}^n u_lu_k(t_l\wedge t_k)\right)\\
&= \exp\left(i\lambda\sum_{l=1}^n u_lt_l-\frac12\sum_{l,k=1}^n u_lu_k(t_l\wedge t_k)\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît, toujours grâce à la question 2 la loi d'un mouvement brownien issu de 0 avec dérive λ. Par conséquent $(\tilde W_t, t\in[0,T])$ est un mouvement brownien standard sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

7 On a $\tau_a^0=\inf\{t\geq 0, W_t=a\}=\inf\{t\geq 0,\tilde W_t+\lambda t=a\}$. Comme $(\tilde W_t, t\in[0,T])$ a même loi sous $\tilde{\mathbb{P}}$ que $(W_t, t\in[0,T])$ sous $\mathbb{P}$, il vient que $\tau_a^0\wedge T$ a même loi sous $\tilde{\mathbb{P}}$ que $\tau_a^\lambda\wedge T$ sous $\mathbb{P}$, et donc :

$$\forall y>0,\ \tilde{\mathbb{E}}[\exp(-y(\tau_a^0\wedge T))]=\mathbb{E}[\exp(-y(\tau_a^\lambda\wedge T))].$$

8 On a d'après les question 5 et 7,

$$\mathbb{E}[\exp(-y(\tau_a^\lambda\wedge T))]=\mathbb{E}[\exp(\lambda W_{\tau_a^0\wedge T}-(y+\lambda^2/2)(\tau_a^0\wedge T))].$$

Par convergence dominée (domination par 1), le terme de gauche tend vers $\mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]$ tandis que celui de droite tend vers $\exp(a(\lambda-\sqrt{2y+\lambda^2}))$ d'après la question 5. On en déduit :

$$y>0, \mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]=\exp(a(\lambda-\sqrt{2y+\lambda^2})).$$

En particulier en faisant tendre $y\to0$, $\exp(-y\tau_a^\lambda)\to\mathbf{1}_{\{\tau_a^\lambda<+\infty\}}$, et par convergence dominée, il vient que

$$\mathbb{P}(\tau_a^\lambda<+\infty)=\exp(a(\lambda-|\lambda|))=\begin{cases}1 \text{ si } \lambda\geq 0\\ \exp(2a\lambda) \text{ si } \lambda<0.\end{cases}$$

Pour $\lambda\geq0$, cela n'est pas surprenant car $\tau_a^\lambda\leq\tau_a^0$ et on sait par le cours que τ_a^0 est fini p.s.

9 Pour $a<0$, on utilise la propriété de symétrie du mouvement brownien. $\tau_a^\lambda=\inf\{t\geq 0, W_t+\lambda t=a\}=\inf\{t\geq0,-W_t-\lambda t=-a\}$ et donc τ_a^λ a même loi que $\tau_{-a}^{-\lambda}$. On obtient ainsi encore pour $a<0$:

$$y>0, \mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]=\exp(a(\lambda+\sqrt{2y+\lambda^2})).$$