Examen du cours MOPSI

11 février 2011, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopié) sont autorisées.

Important : L'examen comporte quatre exercices indépendants. Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes :
– Sur la copie "Probabilités", rédiger les réponses aux exercices 1 et 2.
– Sur la copie "Analyse numérique", rédiger les réponses aux exercices 3 et 4.

Exercice 1 : un principe de réflexion pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

On considère une suite i.i.d de variables aléatoires $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}^*)$ telle que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = 1/2.$$

On pose $\Sigma_0 = 0$ et $\Sigma_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration engendrée par $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$.

1 Montrer que $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont on donnera la matrice de transition.

2 Comparer les lois des processus $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$, $(-\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ et $(\Sigma_{n+p} - \Sigma_p, n \in \mathbb{N})$, pour $p \in \mathbb{N}^*$.

3 On pose $\bar{\Sigma}_n = \max\limits_{0\leq k\leq n} \Sigma_k$ et $\bar{\Sigma}_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Sigma_k$. Donner les valeurs que peut prendre a priori $\bar{\Sigma}_\infty$. Montrer que

$$\bar{\Sigma}_\infty \overset{loi}{=} \max(0, \varepsilon + \bar{\Sigma}_\infty),$$

où ε est une v.a. indépendante de $\bar{\Sigma}_\infty$ de même loi que ε_1. En déduire que

$$k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) - \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k-1) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k+1) - \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k),$$

puis que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) = 0$. Conclure.

4 Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N}, \Sigma_n = k\}$ (avec pour convention $\inf \emptyset = +\infty$). Montrer que τ_k est un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt. Exprimer l'événement $\{\tau_k = +\infty\}$ à l'aide de $\bar{\Sigma}_\infty$. En déduire que $\mathbb{P}(\tau_k < +\infty) = 1$.

5 Montrer que $(\Sigma_{\tau_k+n} - k, n \in \mathbb{N})$ est indépendant de τ_k et a même loi que $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$. En déduire que $(\tau_k, (\Sigma_{\tau_k+n} - k, n \in \mathbb{N}))$ et $(\tau_k, (k - \Sigma_{\tau_k+n}, n \in \mathbb{N}))$ ont même loi.

6 Montrer que pour $l \geq k \geq 0$, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \geq l, \Sigma_n \leq k) = \mathbb{P}(\tau_l \leq n, \Sigma_n \leq k) = \mathbb{P}(\Sigma_n \geq 2l - k)$. En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \geq k) = 2\mathbb{P}(\Sigma_n \geq k) - \mathbb{P}(\Sigma_n = k)$.

7 Donner sans calcul la loi de $(\Sigma_n + n)/2$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 2 : On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration usuelle qu'il engendre.

1 Soient $0 \leq s \leq t$. Calculer, et exprimer $\mathbb{E}[W_t^3|\mathcal{F}_s]$ en fonction de W_s et $t-s$. En déduire que $M_t = W_t^3 - \int_0^t 3W_s ds$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

2 Retrouver le fait que $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale en appliquant de façon convenable la formule d'Itô.

3 On pose, pour $a > 0$, $\tau_a = \inf\{s \geq 0, M_s = a\}$ (convention $\inf \emptyset = +\infty$). Montrer que τ_a est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

4 Montrer que $\forall K > 0, \mathbb{P}(\tau_a \leq K) < 1$.

5 Soit $\lambda > 0$. Montrer que les processus $(M_t, t \geq 0)$ et $\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}} M_{\lambda t}, t \geq 0\right)$ ont même loi, puis que $\sup_{t\geq 0} M_t \overset{loi}{=} \lambda^{-3/2} \sup_{t\geq 0} M_t$. On admet que $\sup_{t\geq 0} M_t > 0$ p.s. Montrer que $\sup_{t\geq 0} M_t = +\infty$ p.s. En déduire que $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

6 Montrer que $\left(W_t, \displaystyle\int_0^t W_s ds\right)$ est un vecteur gaussien centré dont on précisera la matrice de covariance. En déduire que $\forall t > 0, M_t \overset{loi}{=} t^{3/2}\left(W_1^3 - \frac{3-\sqrt{3}}{2} W_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2\right)$.

Exercice 3 : Etude de deux équations aux dérivées partielles couplées.

On considère le problème suivant (le domaine $\mathcal{D}$ ainsi que les conditions aux limites seront précisés ci-dessous) : pour $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} = \operatorname{div}(a_1 \nabla \phi_1) - \lambda(\phi_1 - \phi_2), \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t} = \operatorname{div}(a_2 \nabla \phi_2) - \lambda(\phi_2 - \phi_1), \end{cases} \tag{1}$$

où ϕ_i sont des fonctions à valeurs réelles dépendant de $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$, les fonctions $a_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ sont supposées régulières et minorées uniformément :

$$a_i \geq \alpha > 0$$

et $\lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière positive qui peut s'annuler, mais qui est non nulle sur un domaine de mesure de Lebesgue non nulle. On suppose que les conditions initiales

$$\forall x \in \mathcal{D}, (\phi_1(0, x), \phi_2(0, x)) = (\phi_1^0(x), \phi_2^0(x))$$

sont positives et telles que

$$\int_{\mathcal{D}} (\phi_1^0(x) + \phi_2^0(x))\, dx = 1.$$

I Existence, unicité, comportement en temps long

On considère dans cette question que $\mathcal{D}$ est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et on complète le système (1) avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}, \tag{2}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale au bord de $\mathcal{D}$.

I.1 Justifier qu'une formulation variationnelle du problème (1)-(2) est : trouver $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\mathcal{D})) \cap L^2([0,T], H^1(\mathcal{D}))$, tel que pour toutes fonctions $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\mathcal{D})$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} (\phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_2) + \int_{\mathcal{D}} (a_1 \nabla\phi_1 \cdot \nabla\psi_1 + a_2\nabla\phi_2 \cdot \nabla\psi_2) + \int_{\mathcal{D}} \lambda(\phi_1 - \phi_2)(\psi_1 - \psi_2) = 0,$$

et $(\phi_1(0,\cdot), \phi_2(0,\cdot)) = (\phi_1^0, \phi_2^0)$.

I.2 En utilisant la démarche vue en cours sur l'équation de la chaleur, montrer que cette formulation variationnelle admet une unique solution.

I.3 Pour $\psi \in H^1(\mathcal{D})$, on note $\psi^- = -\psi 1_{\psi \leq 0}$ la partie négative de ψ. Vérifier que $|\nabla\psi^-|^2 = -\nabla\psi \cdot \nabla\psi^-$. Montrer que ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions positives sur $[0,T] \times \mathcal{D}$.

I.4 On considère l'espace fonctionnel

$$V_s = \left\{ (\psi_1, \psi_2) \in H^1(\mathcal{D}) \times H^1(\mathcal{D}), \int_{\mathcal{D}} (\psi_1 + \psi_2) = s \right\},$$

où s est un réel positif. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $(\phi_1(t,\cdot), \phi_2(t,\cdot)) \in V_1$.

I.5 Montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que,

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in V_0, \int_{\mathcal{D}} \left(a_1|\nabla\psi_1|^2 + a_2|\nabla\psi_2|^2\right) + \int_{\mathcal{D}} \lambda(\psi_1 - \psi_2)^2 \geq \lambda_0 \int_{\mathcal{D}} \left((\psi_1)^2 + (\psi_2)^2\right).$$

(On pourra raisonner par l'absurde.) En déduire que, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in V_s, \int_{\mathcal{D}} \left(a_1|\nabla\psi_1|^2 + a_2|\nabla\psi_2|^2\right) + \int_{\mathcal{D}} \lambda(\psi_1 - \psi_2)^2 \geq \lambda_0 \int_{\mathcal{D}} \left(\left(\psi_1 - \frac{s}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 + \left(\psi_2 - \frac{s}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 \right),$$

où $|\mathcal{D}|$ désigne la mesure de Lebesgue du domaine $\mathcal{D}$.

I.6 En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left(\left(\phi_1(t,x) - \frac{1}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 + \left(\phi_2(t,x) - \frac{1}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 \right) dx \\ &\quad \leq -2\lambda_0 \int_{\mathcal{D}} \left(\left(\phi_1(t,x) - \frac{1}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 + \left(\phi_2(t,x) - \frac{1}{2|\mathcal{D}|}\right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Donner un résultat de convergence en temps long sur le couple (ϕ_1, ϕ_2).

II Interprétation probabiliste

On suppose dans cette question pour simplifier que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, et λ est une fonction constante. On introduit les trois processus stochastiques suivants :

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k \le t} \text{ avec } T_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j,$$

où les ξ_i sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ,

$$I_t = \begin{cases} 1 \text{ si } N_t \text{ est pair,} \\ 2 \text{ si } N_t \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_{I_t}(X_s)\, dW_s,$$

où $\sigma_1^2/2 = a_1$, $\sigma_2^2/2 = a_2$, et W_t est un mouvement brownien.

II.1 Soit $f : \begin{cases} \{1,2\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (i,x) \mapsto f(i,x) \end{cases}$ une fonction régulière à support compact. Justifier la formule :

$$df(I_t, X_t) = \partial_x f(I_t, X_t)\sigma_{I_t}(X_t) dW_t + a_{I_t}(X_t)\partial_{x,x} f(I_t, X_t) dt + \big(f(\bar{I}_t, X_t) - f(I_t, X_t)\big)\, dN_t,$$

où, par défintion $\bar{i} = 2$ (resp. $\bar{i} = 1$) si $i = 1$ (resp. $i = 2$). *(On pourra décomposer suivant les valeurs prises par I_t. On ne cherchera pas à démontrer rigoureusement la formule, mais simplement à expliquer d'où viennent chacun des termes.)*

II.2 Soit $h > 0$, et $\mathcal{F}_t$ la filtration engendrée par le Brownien W_t. En utilisant le résultat suivant (cf. Section 5.6 p. 102 du polycopié, Question 6) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{E}(N_{t+h} - N_t \,|\, \mathcal{F}_t)}{h} = \lambda,$$

montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} \big(f(\bar{I}_s, X_s) - f(I_s, X_s)\big)\, dN_s \right) = \lambda\, \mathbb{E}\big(f(\bar{I}_t, X_t) - f(I_t, X_t)\big).$$

II.3 On écrit la loi du couple (I_t, X_t) sous la forme : pour toute fonction $f : \{1,2\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour tout $t \ge 0$,

$$\mathbb{E}(f(I_t, X_t)) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{D}} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\, dx.$$

Vérifier que $\tilde{\phi}_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_i(t,x)\, dx = 1$. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{D}} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{D}} a_i(x)\partial_{x,x} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\, dx + \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{D}} \left(f(\bar{i}, x) - f(i,x)\right) \tilde{\phi}_i(t,x)\, dx.$$

En déduire une interprétation probabiliste du système d'équations aux dérivées partielles (1).

Exercice 4 : Méthode de tir pour une équation différentielle ordinaire.

Soit $t \in [0,T] \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $t \in [0,T] \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^d$ deux applications continues. On considère le problème suivant : trouver une fonction $t \mapsto x(t) \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = A(t)\,x(t) + b(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ B_0\,x(0) + B_T\,x(T) = f, \end{cases} \tag{3}$$

où $B_0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B_T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $f \in \mathbb{R}^d$ sont donnés.

1 On considère dans cette question l'exemple suivant : $d = 2$, $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b(t) = (0, b_2(t))^T$ où $b_2 \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$, $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $f = (f_1, f_2)^T$. Expliquer pourquoi, dans ce cas, le problème (3) admet une unique solution.

2 On introduit $R(t_0,t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ la résolvante associée à l'équation différentielle ordinaire $\dot{x} = A(t)x$. On rappelle que $t \mapsto R(t_0,t)$ est la solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt}(t) = A(t)\,R(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ R(t_0) = \mathrm{Id}. \end{cases}$$

Pour un t_0 fixé, montrer que le problème (3) peut s'écrire sous la forme : trouver un vecteur $x(t_0) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$B_0\left(R(t_0,0)x(t_0) - \int_0^{t_0} R(s,0)b(s)\,ds\right) + B_T\left(R(t_0,T)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} R(s,T)b(s)\,ds\right) = f.$$

3 On introduit la matrice

$$E(t_0) = B_0 R(t_0,0) + B_T R(t_0,T).$$

Montrer que si la matrice $E(t_0)$ est inversible, alors il existe une unique solution $x^*(t)$ à (3). Montrer que si $E(t)$ est inversible pour un $t = t_0$, alors elle est inversible pour tout t.

4 On considère maintenant le cas non-linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = g(t,x(t)), & \text{pour } t \in [0,T], \\ B_0\,x(0) + B_T\,x(T) = f, \end{cases} \tag{4}$$

où $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable x : $\exists C > 0$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq C\|x - y\|.$$

On suppose qu'il existe une solution $x^*(t)$ au problème (4). En s'inspirant de la question précédente et en utilisant le théorème d'inversion local, donner une hypothèse sous laquelle on obtient l'unicité locale de la solution à (4) autour de $x^*(t)$.

5 Proposer des méthodes pratiques de résolution du problème (3), puis du problème (4).