Examen du cours MOPSI

11 février 2011, 08h30-12h00.

Corrigé.

Exercice 1 : un principe de réflexion pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

1 Soit $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

$$\mathbb{P}(\Sigma_0 = x_0, \ldots, \Sigma_n = x_n) = \begin{cases} 2^{-n} \text{ si } x_0 = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, |x_{i+1} - x_i| = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov issue de 0 et de matrice de transition $P(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{|y-x|=1\}}$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

2 Les processus $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$, $(-\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ et $(\Sigma_{n+p} - \Sigma_p, n \in \mathbb{N})$, sont tous des chaînes de Markov de matrice de transition P issus de 0, ils ont donc la même loi.

3 Comme $\forall k \in \mathbb{N}, \Sigma_k \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_0 = 0$, on a que $\bar{\Sigma}_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k \in \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

En écrivant que pour $k \geq 1$, $\Sigma_k = \varepsilon_1 + \Sigma_k - \Sigma_1$, il vient que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k = \max(\Sigma_0, \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \Sigma_k) = \max(0, \varepsilon_1 + \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\Sigma_k - \Sigma_1)).$$

Comme $(\Sigma_n - \Sigma_1, n \in \mathbb{N}^*)$ a même loi que $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ et est indépendante de ε_1, on obtient l'égalité en loi.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) = \mathbb{P}(\varepsilon + \bar{\Sigma}_\infty = k) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k-1) + \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k+1))$, et donc $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) - \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k-1) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k+1) - \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) =: cte$. Ainsi $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = 0) + cte \times k$ et comme il s'agit d'une loi de probabilité, on a nécessairement $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = k) = 0$. Cela implique $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty = +\infty) = 1$.

4 $\{\tau_k \leq n\} = \cup_{i=0}^n \{\Sigma_i = k\} \in \mathcal{F}_n$, puisque $\{\Sigma_i = k\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$. Clairement, $\{\tau_k = +\infty\} = \{\bar{\Sigma}_\infty \leq k-1\}$ et $\mathbb{P}(\tau_k < +\infty) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_\infty > k-1) = 1$.

5 En utilisant la propriété de Markov forte, $(\Sigma_{\tau_k+n}, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov issue de k de matrice de transition P et est indépendante de $(\Sigma_0, \ldots, \Sigma_{\tau_k})$. Elle est donc en particulier indépendante de τ_k. Ainsi, $(\Sigma_{\tau_k+n} - k, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de même loi que $(\Sigma_n, n \in \mathbb{N})$ et qui est indépendante de τ_k. Enfin, en utilisant la question 2, $(-\Sigma_{\tau_k+n} + k, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov qui a même loi que $(\Sigma_{\tau_k+n} - k, n \in \mathbb{N})$ et elle est également indépendante de τ_k.

6 Soient $l \geq k \geq 0$. Comme $\{\bar{\Sigma}_n \geq l\} = \{\tau_l \leq n\}$, on a $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \geq l, \Sigma_n \leq k) = \mathbb{P}(\tau_l \leq$

$n, \Sigma_n \le k)$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_l \le n, \Sigma_n \le k) &= \mathbb{P}(\tau_l \le n, \Sigma_{\tau_l+(n-\tau_l)} - \Sigma_{\tau_l} \le k-l) \\
&= \mathbb{P}(\tau_l \le n, -\Sigma_{\tau_l+(n-\tau_l)} + \Sigma_{\tau_l} \le k-l) \text{ grâce à la question 5} \\
&= \mathbb{P}(\tau_l \le n, \Sigma_n \ge 2l-k) = \mathbb{P}(\Sigma_n \ge 2l-k), \text{ car } 2l-k \ge k.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \ge k) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \ge k, \Sigma_n \le k) + \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \ge k, \Sigma_n \ge k+1) = \mathbb{P}(\Sigma_n \ge k) + \mathbb{P}(\Sigma_n \ge k+1) = 2\mathbb{P}(\Sigma_n \ge k) - \mathbb{P}(\Sigma_n = k)$.

7 $(\Sigma_n + n)/2$ suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. Clairement, pour $k < 0$ ou $k > n$, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k) = 0$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k) = \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \ge k) - \mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n \ge k+1) = \mathbb{P}(\Sigma_n = k) + \mathbb{P}(\Sigma_n = k+1) = \mathbb{P}((\Sigma_n + n)/2 \in \{(n+k)/2, (n+k+1)/2\}$. Selon la parité de $n+k$ une seule de ces deux éventualités peut se produire. Si $n+k$ est pair, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k) = C_n^{(n+k)/2} 2^{-n}$ et si $n+k$ est impair, $\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k) = C_n^{(n+k+1)/2} 2^{-n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\bar{\Sigma}_n = k) = C_n^{\lceil (n+k)/2 \rceil} 2^{-n}.$$

Exercice 2 :

1 On a en développant, et en utilisant l'indépendance de $W_t - W_s$ avec $\mathcal{F}_s$: $\mathbb{E}[W_t^3|\mathcal{F}_s] = W_s^3 + 3W_s^2\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + 3W_s\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(W_t - W_s)^3|\mathcal{F}_s] = W_s^3 + 3(t-s)W_s$. Par ailleurs, M_t est bien intégrable et on a par Fubini : $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = W_s^3 + 3(t-s)W_s - 3\int_0^t \mathbb{E}[W_u|\mathcal{F}_s]du = W_s^3 - 3\int_0^s W_u du = M_s$.

2 On applique la Formule d'Itô à $W_t^3 = 3\int_0^t W_s^2 dW_s + 3\int_0^t W_s ds$, ce qui donne $M_t = 3\int_0^t W_s^2 dW_s$. Comme pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}[\int_0^t W_s^4 ds] = 3\int_0^t s^2 ds = t^3 < \infty$, l'intégrale stochastique est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

3 On procède comme pour les temps d'atteinte du mouvement brownien : $\{\tau_a \le t\} = \cup_{s\in[0,t]}\{M_s \ge a\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]} \{M_s > a - 1/n\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{M_s > a - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$, où nous avons utilisé, pour la deuxième et la troisième égalité que $(M_t, t \ge 0)$ est un processus continu.

4 Par l'absurde. Si $\exists K > 0, \mathbb{P}(\tau_a \le K) = 1$, alors on aurait par le théorème d'arrêt que $\mathbb{E}[M_{\tau_a}] = 0$. Or puisque τ_a est fini p.s., on a $M_{\tau_a} = a$ p.s. ce qui est contradictoire.

5 Par la propriété d'échelle du mouvement brownien $(W_t, t \ge 0) \overset{loi}{=} (\lambda^{-1/2} W_{\lambda t}, t \ge 0)$, on a $(M_t, t \ge 0) \overset{loi}{=} (\lambda^{-3/2} W_{\lambda t}^3 - 3\int_0^t \lambda^{-1/2} W_{\lambda s} ds, t \ge 0)$. Comme $\int_0^t \lambda^{-1/2} W_{\lambda s} ds = \int_0^{\lambda t} \lambda^{-3/2} W_s ds$, on en déduit que $(M_t, t \ge 0) \overset{loi}{=} (\lambda^{-3/2} M_{\lambda t}, t \ge 0)$ puis que $\sup_{t\ge0} M_t \overset{loi}{=} \lambda^{3/2} \sup_{t\ge0} M_t$.

Ainsi pour tout $K > 0$ et $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\ge0} M_t \ge K) = \mathbb{P}(\sup_{t\ge0} M_t \ge K\lambda^{-3/2})$. En faisant tendre $\lambda \to +\infty$, on obtient que $\mathbb{P}(\sup_{t\ge0} M_t \ge K) = 1$, quelque soit $K > 0$, ce qui donne que $\sup_{t\ge0} M_t = +\infty$ p.s. et donc $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

6 Le vecteur $(W_t, \int_0^t W_s ds)$ est la limite presque sûre et (donc en loi) des vecteurs gaussiens $(W_t, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t}{n} W_{it/n})$ et est donc un vecteur gaussien. Il est clairement centré, et on a

$\mathbb{E}[\int_0^t \int_0^t W_s W_{s'} ds ds'] = \int_0^t \int_0^t s \wedge s' ds ds' = \int_0^t s^2/2 + s(t-s) ds = t^3/3$, $\mathbb{E}[W_t \int_0^t W_s ds] = \int_0^t s ds = t^2/2$, ce qui donne pour matrice de covariance :

$$\begin{bmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{bmatrix}$$

La corrélation vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $(W_t, \int_0^t W_s ds)$ a donc même loi que $(\sqrt{t}W_1, \sqrt{t^3/3}(\frac{\sqrt{3}}{2}W_1 + (W_2 - W_1)/2)) = \left(\sqrt{t}W_1, t^{3/2}(\frac{(3-\sqrt{3})W_1}{6} + \sqrt{3}\frac{W_2}{6})\right)$. Ainsi, M_t a même loi que $t^{3/2}(W_1^3 - \frac{(3-\sqrt{3})W_1}{2} + \sqrt{3}\frac{W_2}{2})$.

Exercice 3 : Etude de deux équations aux dérivées partielles couplées.

I.1 On obtient cette formulation variationnelle à partir de (1) de manière standard, en multipliant l'équation sur ϕ_1 par la fonction test ψ_1, l'équation sur ϕ_2 par la fonction test ψ_2, en ajoutant les deux équations obtenues, puis en intégrant sur $\mathcal{D}$. Les conditions aux limites de Neumann homogènes sont utilisées pour l'intégration par parties du terme de diffusion.

Réciproquement, si on considère une solution de la formulation variationnelle, on obtient le système d'équation aux dérivées partielles (1) au sens des distributions en prenant successivement comme fonctions tests $\psi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{D})$ et $\psi_2 = 0$, puis $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{D})$. Les conditions aux limites de Neumann homogènes sont ensuite obtenues comme expliqué dans le cours pour le laplacien de Neumann, en admettant que la solution est en fait dans $H^2(\mathcal{D})$.

I.2 L'étape essentielle consiste à montrer une estimée *a priori* sur le système. En prenant $\psi_1 = \phi_1(t, \cdot)$ et $\psi_2 = \phi_2(t, \cdot)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \int_{\mathcal{D}} a_1|\nabla\phi_1|^2 + a_2|\nabla\phi_2|^2 + \lambda(\phi_1 - \phi_2)^2 = 0.$$

Comme $\lambda \geq 0$ et que les a_i sont minorés uniformément, on en déduit, après intégration en temps : $\forall t \in [0, T]$,

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)(t) + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} |\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2 \leq C$$

où C est une constante qui dépend de T, α et $\displaystyle\int \left((\phi_1^0)^2 + (\phi_2^0)^2\right)$. Ces estimées montrent que les fonctions ϕ_i sont *a priori* bornées en norme $L^\infty([0, T], L^2(\mathcal{D}))$ et $L^2([0, T], H^1(\mathcal{D}))$. Remarquer que l'estimation en norme $L^2([0, T], L^2(\mathcal{D}))$ est une conséquence de l'estimation en norme $L^\infty([0, T], L^2(\mathcal{D}))$. La démarche suivie dans le polycopié pour l'équation de la chaleur (convergence d'une approximation de Galerkin, puis unicité) s'applique ensuite telle quelle à ce système d'équation, puisque le problème est linéaire. En particulier, on obtient facilement l'unicité de la solution en utilisant l'estimée *a priori* sur la différence de deux solutions.

I.3 Nous avons vu en cours que pour une fonction $\psi \in H^1$, $\nabla \psi^+ = 1_{\psi>0} \nabla \psi$ (où $\psi^+ = \max(\psi, 0)$). Comme $\psi^- = \psi^+ - \psi$, on a $\nabla \psi^- = \nabla \psi^+ - \nabla \psi = (1_{\psi>0} - 1)\nabla \psi = -1_{\psi \le 0} \nabla \psi$. Par conséquent, on a $|\nabla \psi^-|^2 = 1_{\psi \le 0} |\nabla \psi|^2 = -\nabla \psi \cdot \nabla \psi^-$.

En prenant comme fonctions tests dans la formulation variationnelle $\psi_1 = \phi_1^-(t, \cdot)$ et $\psi_2 = \phi_2^-(t, \cdot)$ et en utilisant le résultat précédent, on obtient donc

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1^-)^2 + (\phi_2^-)^2\right) + \int_{\mathcal{D}} -a_1 |\nabla \phi_1^-|^2 - a_2 |\nabla \phi_2|^2 + \lambda(\phi_1 - \phi_2)(\phi_1^- - \phi_2^-) = 0.$$

Noter que $(\phi_1 - \phi_2)(\phi_1^- - \phi_2^-) \le 0$ car $x \mapsto x^-$ est décroissante. Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1^-)^2 + (\phi_2^-)^2\right) + \int_{\mathcal{D}} a_1 |\nabla \phi_1^-|^2 a_2 |\nabla \phi_2|^2 \le 0,$$

et donc en intégrant en temps, pour tout temps $t \ge 0$,

$$\int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1^-)^2 + (\phi_2^-)^2\right)(t) \le \int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1^{0,-})^2 + (\phi_2^{0,-})^2\right) = 0,$$

puisque les conditions initiales sont supposées positives. Ceci montre que $\phi_1^- = \phi_2^- = 0$ et donc $\phi_1 \ge 0$ et $\phi_2 \ge 0$.

I.4 Il suffit de prendre comme fonctions tests $\psi_1 = \psi_2 = 1$ et d'utiliser l'hypothèse sur la condition initiale : $\int_{\mathcal{D}} \phi_1^0 + \phi_2^0 = 1$.

I.5 On raisonne par l'absurde, comme dans la démonstration de l'inégalité de Poincaré vue en cours. Si cette propriété n'est pas vérifiée, on peut trouver une suite de fonctions $(\psi_1^n, \psi_2^n) \in V_0$ tel que

$$\int_{\mathcal{D}} \left((\psi_1^n)^2 + (\psi_2^n)^2\right) = 1$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left(a_1 |\nabla \psi_1^n|^2 + a_2 |\nabla \psi_2^n|^2\right) + \int_{\mathcal{D}} \lambda(\psi_1^n - \psi_2^n)^2 \le \frac{1}{n}.$$

En particulier (comme $\lambda \ge 0$ et $a_i \ge \alpha > 0$), ψ_1^n et ψ_2^n sont des suites bornées dans H^1. Quitte à extraire une sous-suite, on en déduit qu'il existe ψ_1^∞ et ψ_2^∞ dans H^1 telle que ψ_i^n converge (quand $n \to \infty$) vers ψ_i^∞ $(i = 1, 2)$ faiblement dans H^1 et fortement dans L^2 (on utilise ici le fait que le domaine $\mathcal{D}$ est borné). Le fait que $\int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi_1^n|$ et $\int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi_2^n|$ convergent vers 0 montre que la suite est de Cauchy dans H^1 et donc que la convergence est en fait forte dans H^1. En particulier, on a donc (i) $(\psi_1^\infty, \psi_2^\infty) \in V$, (ii) $\int_{\mathcal{D}} \left((\psi_1^\infty)^2 + (\psi_2^\infty)^2\right) = 1$, (iii) $\int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi_1^\infty|^2 = \int_{\mathcal{D}} |\nabla \psi_2^\infty|^2 = 0$ et (iv) $\int_{\mathcal{D}} \lambda(\psi_1^\infty - \psi_2^\infty)^2 = 0$. La propriété (iii) montre que $\psi_i^\infty = C_i$ est une fonction constante. La propriété (iv) montre que $C_1 = C_2$, puisque λ est non nul sur un ensemble de mesure non nulle. La propriété (i) implique alors que $C_1 = C_2 = 0$, ce qui est en contradiction avec (ii).

On obtient ensuite la deuxième inégalité sur les fonctions de V_s en considérant, pour $(\psi_1, \psi_2) \in V_s$ les fonctions $(\tilde{\psi_1}, \tilde{\psi_2}) = \left(\psi_1 - \frac{s}{2|\mathcal{D}|}, \psi_2 - \frac{s}{2|\mathcal{D}|}\right) \in V_0$ et en appliquant le résultat précédent à $(\tilde{\psi_1}, \tilde{\psi_2})$.

I.6 On note $c = \frac{1}{2|\mathcal{D}|}$. On a (en prenant dans la formulation variationnelle $\psi_i = \phi_i(t,\cdot) - c$) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1 - c)^2 + (\phi_2 - c)^2\right) = \int_{\mathcal{D}} (\partial_t \phi_1)(\phi_1 - c) + \partial_t \phi_2 (\phi_2 - c) \\
&= \int_{\mathcal{D}} -a_1 \nabla\phi_1 \cdot \nabla(\phi_1 - c) - a_2 \nabla\phi_2 \cdot \nabla(\phi_2 - c) - \lambda(\phi_1 - \phi_2)\left[(\phi_1 - c) - (\phi_2 - c)\right] \\
&= \int_{\mathcal{D}} -a_1 |\nabla\phi_1|^2 - a_2 |\nabla\phi_2|^2 - \lambda(\phi_1 - \phi_2)^2 \\
&\leq -\lambda_0 \int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1 - c)^2 + (\phi_2 - c)^2\right),
\end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question précédente, et le fait que $(\phi_1, \phi_2)(t,\cdot) \in V_1$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1 - c)^2 + (\phi_2 - c)^2\right)(t) \leq \exp(-2\lambda_0 t) \int_{\mathcal{D}} \left((\phi_1^0 - c)^2 + (\phi_2^0 - c)^2\right),$$

ce qui montre la converge exponentielle de $(\phi_1, \phi_2)(t,\cdot)$ vers (c, c) dans la limite $t \to \infty$.

II.1 C'est une formule d'Itô pour les deux premiers termes (quand la différentielle en temps est appliquée sur X_t). Il faut ensuite appliquer la différentielle en temps sur N_t, qui est un processus croissant donc à variation finie. Le fait que dN_t soit nul sauf aux temps de saut de N_t, qui coïncident avec les temps où I_t change de valeur justifie le troisième terme.

II.2 On note $Z_t = f(\bar{I}_t, X_t) - f(I_t, X_t)$. Noter que Z_t est $\mathcal{F}_t$-adapté. On a donc :

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}\big(Z_t(N_{t+h} - N_t)\big) = \mathbb{E}\left(Z_t \frac{\mathbb{E}(N_{t+h} - N_t \,|\, \mathcal{F}_t)}{h}\right).$$

Par convergence dominée (comme f est une fonction bornée, Z_t est bornée p.s.), on a donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}\big(Z_t(N_{t+h} - N_t)\big) = \lambda\, \mathbb{E}(Z_t).$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} Z_s dN_s\right) = \lambda\, \mathbb{E}(Z_t).$$

II.3 On vérifie facilement que $\tilde{\phi}_i \geq 0$ (puisque pour tout $f \geq 0$, $\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{D}} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\,dx = \mathbb{E}(f(I_t, X_t)) \geq 0$) et $\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_i(t,x)\,dx = 1$ (en prenant $f = 1$ dans la relation qui définit les $\tilde{\phi}_i$).

En intégrant la relation obtenue en II.1 entre t et $t+h$, on a :

$$\begin{aligned}
f(I_{t+h}, X_{t+h}) - f(I_t, X_t) = &\int_t^{t+h} \partial_x f(I_s, X_s)\sigma_{I_s}(X_s) dW_s + \int_t^{t+h} a_{I_s}(X_s)\partial_{x,x} f(I_s, X_s) ds \\
&+ \int_t^{t+h} \big(f(\bar{I}_s, X_s) - f(I_s, X_s)\big)\, dN_s.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on a donc

$$\mathbb{E}(f(I_{t+h}, X_{t+h})) - \mathbb{E}(f(I_t, X_t)) = \int_t^{t+h} \mathbb{E}(a_{I_s}(X_s)\partial_{x,x} f(I_s, X_s)) ds + \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} \big(f(\bar{I}_s, X_s) - f(I_s, X_s)\big)\, dN_s\right).$$

En divisant par h et en passant à la limite $h \to 0$, on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(f(I_t, X_t)) = \mathbb{E}(a_{I_t}(X_t)\partial_{x,x} f(I_t, X_t)) + \lambda\,\mathbb{E}\left(f(\bar{I}_t, X_t) - f(I_t, X_t)\right).$$

On en déduit l'équation

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathcal{D}} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\,dx = \sum_{i=1}^{2}\int_{\mathcal{D}} a_i(x)\partial_{x,x} f(i,x)\tilde{\phi}_i(t,x)\,dx + \lambda\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathcal{D}} \left(f(\bar{i},x) - f(i,x)\right)\tilde{\phi}_i(t,x).$$

On remarque alors que cette équation est exactement la formulation variationnelle donnée dans la question I.1 du problème initial (1) (avec comme fonctions tests $\psi_i(x) = f(i,x)$). Autrement dit, on peut interpréter le couple de solutions (ϕ_1, ϕ_2) du problème (1) en terme de loi du processus couplé (I_t, X_t), ce qui explique en particulier les hypothèses que nous avions faites sur les conditions initiales (ϕ_1^0, ϕ_2^0).

Exercice 4 : Méthode de tir pour une équation différentielle ordinaire.

1 Soit $(x_1(t), x_2(t))$ les coordonnées de $x(t)$. On vérifie que le problème se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = b_2 \text{ pour } t \in [0,T], \\ x_1(0) = f_1 \text{ et } x_1(T) = f_2, \end{cases}$$

avec $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$, qui est un problème (en dimension 1) de Poisson avec conditions aux limite de Dirichlet sur x_1 et qui admet donc une unique solution.

2 On sait que l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ avec comme condition initiale $x(t_0)$ en $t = t_0$ admet une unique solution

$$x(t) = R(t_0,t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(s,t)b(s)\,ds.$$

C'est la formule de Duhamel. On en déduit la réécriture du problème (3) sous la forme

$$B_0\left(R(t_0,0)x(t_0) - \int_0^{t_0} R(s,0)b(s)\,ds\right) + B_T\left(R(t_0,T)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} R(s,T)b(s)\,ds\right) = f.$$

3 L'équation précédente se réécrit

$$E(t_0)x(t_0) = f + B_0\int_0^{t_0} R(s,0)b(s)\,ds - B_T\int_{t_0}^{T} R(s,T)b(s)\,ds.$$

C'est un problème linéaire en $x(t_0)$, qui admet donc une unique solution $x^*(t_0)$ si $E(t_0)$ est inversible.

Par ailleurs, la relation :

$$E(t_0) = B_0 R(t_0,0) + B_T R(t_0,T) = E(t)R(t_0,t)$$

(qui se déduit des relations de flot $R(t_0, 0) = R(t, 0)R(t_0, t)$ et $R(t_0, T) = R(t, T)R(t_0, t)$) montre que si $E(t_0)$ est inversible alors $E(t)$ aussi (puisque $R(t_0, t)$ est inversible).

4 On introduit le flot associé à l'équation différentielle ordinaire (4) : $t \mapsto \Phi(t_0, x_0; t)$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = g(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Noter que les hypothèses sur g garantissent l'existence d'une solution pour tout temps. Le problème (4) se réécrit : pour t_0 fixé, trouver $x(t_0)$ tel que :

$$B_0\Phi(t_0, x(t_0), 0) + B_T\Phi(t_0, x(t_0), T) = f.$$

C'est un problème non-linéaire. On suppose dans l'énoncé qu'il admet une solution $x^*(t_0)$. On obtient donc l'unicité de la solution à condition que l'application

$$\psi : x_0 \mapsto B_0\Phi(t_0, x_0, 0) + B_T\Phi(t_0, x_0, T) - f$$

admet une différentielle en $x^*(t_0)$ inversible. On note $W(t_0, t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ la différentielle de $x_0 \mapsto \Phi(t_0, x_0, t)$ prise au point $x^*(t_0)$. Noter que $t \mapsto W(t_0, t)$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt}(t) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t))R(t) \\ R(t_0) = \mathrm{Id}. \end{cases}$$

La fonction $W(t_0, t)$ joue le rôle de la résolvante $R(t_0, t)$ dans le cas linéaire. On définit donc comme précédemment

$$E(t_0) = B_0W(t_0, 0) + B_TW(t_0, T).$$

Si $E(t_0)$ est inversible, alors il existe une unique solution $x^*(t_0)$ au problème $\psi(x_0) = 0$ et donc une unique solution x^* à (4).

Comme précédemment, on vérifie aussi que si $E(t)$ est inversible pour un $t = t_0$, alors elle est inversible pour tout temps t.

5 Pour résoudre le problème (3), il suffit donc de choisir un temps $t_0 \in [0, T]$, de construire $E(t_0)$, puis de résoudre le problème linéaire introduit dans la Question 2. Ceci nécessite de construire explicitement la résolvante, ce qui peut être coûteux en pratique. Pour le problème non-linéaire (4), il faut cette fois adopter une méthode itérative, de type Newton par exemple, pour résoudre le problème non-linéaire. Là aussi, la construction de la matrice $E(t_0)$ peut s'avérer coûteuse. Des méthodes de différentiation automatique peuvent être utiles. On observe en pratique sur si les points 0 et T sont "éloignés", la matrice $E(t_0)$ est très mal conditionnée, et il peut être utile d'introduire des points intermédiaires entre 0 et T, et de résoudre le problème sur chacun des intervalles, en imposant la continuité aux bornes : c'est la méthode de tir multiple.

Pour plus dinformations, on renvoie par exemple au chapitre 8 de [P. Deuflhard et F. Bornemann, *Scientific computing with ordinary differential equations*, Springer, 2002].