Examen du cours MOPSI

9 février 2012, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopié) sont autorisées.

Important : L'examen comporte trois exercices et un problème, tous indépendants. Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes :
– Sur la copie "Probabilités", rédiger les réponses aux exercices 2 et 3.
– Sur la copie "Analyse numérique", rédiger les réponses à l'exercice 1 et au problème.

Exercice 1 : Solutions périodiques à des équations différentielles ordinaires.

On considère une solution $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ à une équation différentielle ordinaire homogène, en dimension 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)), \end{cases} \tag{1}$$

où $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1 Donner un exemple de couple (f, g) pour lequel il existe une solution périodique en temps à (1), c'est-à-dire une solution $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ telle qu'il existe $T > 0$ avec $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$. *(Ici et dans toute la suite, les solutions périodiques sont supposées non triviales, c'est-à-dire non constante en temps. On note $T > 0$ la plus petite période.)*

2 On suppose qu'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $g = \frac{\partial V}{\partial y}$. Montrer qu'il ne peut pas y avoir de solution périodique à (1).

3 Soit $(x(t), y(t))_{t\in[0,T]}$ une solution périodique de (1). On note $C = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$ l'orbite périodique. Pour $t \in [0, T]$ fixé, que dire du vecteur $\big(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))\big)$ par rapport à la courbe C ?

4 On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ ne s'annule pas dans $\mathbb{R}^2$ (et donc cette fonction a un signe : elle est soit strictement positive, soit strictement négative). Montrer que dans ce cas, il ne peut pas y avoir de solution périodique à (1). *(On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la formule de Stokes.)*

5 On suppose maintenant que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ ne s'annule pas dans $\mathbb{R}^2 \backslash B$, avec $B = \big\{(x, y),\, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$. Montrer que (1) admet au plus une orbite périodique dans $\mathbb{R}^2 \backslash B$, et que cette orbite entoure nécessairement B.

Exercice 2 : Problème sur le renouvellement.

On considère une suite i.i.d de variables aléatoires $(\xi_i, i \in \mathbb{N}^*)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note pour $l \in \mathbb{N}^*$, $p(l) = \mathbb{P}(\xi_1 = l)$, et on suppose que $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $p(l) > 0$. On suppose ξ_1

intégrable, et on note $m = \mathbb{E}[\xi_1]$. On définit ensuite

$$T_0 = 0,\ T_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, k \in \mathbb{N}^*.$$

Les variables aléatoires ξ_i peuvent modéliser différentes choses : la durée de vie d'un composant électronique, la durée d'attente à un arrêt d'autobus, etc. Et les variables aléatoires T_k représentent alors respectivement les instants auxquels on remplace le composant électronique ou les temps de passage des autobus à une station donnée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \max\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq n\}.$$

X_n représente le nombre de composants que l'on a changé ou le nombre d'autobus que l'on a vu passer à la date n. On s'intéresse au processus de reste de vie $(R_n, n \in \mathbb{N})$, défini par :

$$R_n = T_{X_n+1} - n,\ n \in \mathbb{N}.$$

R_n représente le temps que l'on va attendre avant de changer le prochain composant, ou bien de voir le prochain autobus.

1 Donner le comportement asymptotique de T_k/k lorsque $k \to +\infty$. En déduire que $X_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire le comportement asymptotique de T_{X_n}/X_n lorsque $n \to +\infty$.

2 En observant que $T_{X_n} \leq n < T_{X_n+1}$, donner le comportement asymptotique de X_n/n. Interpréter ce résultat à l'aide d'une des deux modélisations proposées.

3 On suppose que l'on a observé les trois premières réalisations suivantes : $\xi_1(\omega) = 3$, $\xi_2(\omega) = 5$ et $\xi_3(\omega) = 2$. Donner les valeurs de $R_n(\omega)$ pour le maximum d'entiers n possibles.

4 Exprimer les variables $(R_{T_k}, k \in \mathbb{N})$ à l'aide des $(\xi_k, k \in \mathbb{N}^*)$. En déduire une façon d'exprimer les variables $(\xi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ à l'aide uniquement du processus $(R_n, n \in \mathbb{N})$.

Pour $r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{r} = (r_0, \ldots, r_n)$, et on pose :

$$\begin{aligned} k_0^{\mathbf{r}} &= 0, \\ k_{i+1}^{\mathbf{r}} &= \begin{cases} r_{k_i^{\mathbf{r}}} + k_i^{\mathbf{r}} \text{ pour } i \text{ t.q. } k_i^{\mathbf{r}} \leq n \\ +\infty \text{ si } k_i^{\mathbf{r}} > n \end{cases}, \end{aligned}$$

et $i^{\mathbf{r}} = \max\{i \in \mathbb{N}, k_i^{\mathbf{r}} \leq n\}$.

5 Exprimer l'événement $\{R_0 = r_0, \ldots, R_n = r_n\}$ à l'aide des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_{i^{\mathbf{r}}+1}$. En déduire que $(R_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ dont on donnera la loi initiale et de matrice de transition $P(r, r') = \mathbf{1}_{\{r'=r-1\}} + \mathbf{1}_{\{r=1\}} p(r')$, $r, r' \in \mathbb{N}^*$.

6 Montrer que $(R_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaine de Markov irréductible, récurrente positive. Montrer que sa loi de probabilité invariante ν, vaut :

$$\nu(k) = \frac{\mathbb{P}(\xi_1 \geq k)}{m}, k \in \mathbb{N}^*.$$

7 (Paradoxe de l'autobus) On suppose, uniquement dans cette question, que les autobus arrivent selon une loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$ (i.e. $\xi_1 \sim \mathcal{G}eo(q)$). Montrer que pour tout n, R_n a même loi que ξ_1. Interpréter.

8 Montrer que $(R_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaine de Markov apériodique. En déduire que R_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi ν lorsque $n \to +\infty$. Que représente la limite en loi de R_n pour un usager d'une ligne de bus ?

Exercice 3.

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard. On se donne $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et on considère le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par

$$t \geq 0, X_t = \int_0^t \varphi(u) dW_u.$$

On notera $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration usuelle engendrée par $(X_t, t \geq 0)$.

0 Montrer que pour $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \psi(u)^2 du < \infty$, on a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\varphi(u) + \psi(u)) dW_u\right)^2\right] = \int_0^t (\varphi(u) + \psi(u))^2 du$. En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi(u) dW_u \int_0^t \psi(u) dW_u\right] = \int_0^t \varphi(u)\psi(u) du.$$

1 Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien.

2 Soient $0 \leq s \leq t$. En écrivant que $X_s = \int_0^t \varphi(u) \mathbf{1}_{u \leq s} dW_u$, calculer $cov(X_s, X_t)$. Donner la loi de $X_t - X_s$. Calculer, pour $0 \leq r \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_r(X_t - X_s)]$. Que peut-on dire des variables aléatoires X_r et $X_t - X_s$? En déduire que $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

3 Pour $\lambda > 0$, On pose $M_t = \exp\left(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \varphi(u)^2 du\right)$. Montrer que $(M_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

4 Pour $a > 0$, on pose $\tau_a^X = \inf\{s \geq 0, X_s = a\}$. Montrer que τ_a^X est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

On pose $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)^2 ds$, $t \geq 0$, et on suppose que $\Phi(t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$.

5 Montrer que $\mathbb{E}\left[M_{\tau_a^X \wedge t}\right] = 1$. En déduire que

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{E}[\exp(-\frac{\lambda^2}{2} \Phi(\tau_a^X))] = \exp(-\lambda a).$$

En déduire que $\Phi(\tau_a^X) \overset{loi}{=} \tau_a^W$, où $\tau_a^W = \inf\{s \geq 0, W_s = a\}$.

6 Montrer, à l'aide de la question 2 que les processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(W_{\Phi(t)}, t \geq 0)$ ont même loi. Retrouver que $\Phi(\tau_a^X) \overset{loi}{=} \tau_a^W$.

7 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\alpha \in (0,2)$ et $c, M > 0$ pour lesquels $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{|f(x)|}{e^{c|x|^\alpha}} \leq M$. On pose $u(t,x) = \mathbb{E}[f(x+X_t)]$. Montrer que X_t a même loi que $W_{\Phi(t)}$, expliquer pourquoi u est bien définie, puis écrire l'EDP satisfaite par u.

Problème : Une équation aux dérivées partielles non-linéaire et sa discrétisation par une méthode d'éléments finis à deux grilles.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier borné.

1 Rappeler pourquoi $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

est un espace de Hilbert. Dans la suite, on note $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ la norme associée. Rappeler dans quels espaces $L^p(\Omega)$ l'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de manière continue. Ces injections sont-elles compactes ?

On introduit la fonctionnelle

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Omega v^4 - \displaystyle\int_\Omega f v \end{array} \right.$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de $L^2(\Omega)$.

2 Montrer que $J(v)$ est bien défini, pour $v \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $J(v)$ est minorée par une constante indépendante de v.

On introduit

$$m = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Soit $(v_k)_{k \geq 1}$ une suite minimisante associée à m, c'est-à-dire une suite telle que $v_k \in H_0^1(\Omega)$ et $\lim_{k \to \infty} J(v_k) = m$.

3 Montrer que la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Que peut-on en déduire sur la suite $(v_k)_{k \geq 1}$? En déduire qu'il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$m = J(u).$$

4 Pour une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ fixée, et pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, montrer que (dans la limite $\varepsilon \to 0$)

$$J(u + \varepsilon v) = J(u) + \varepsilon I_1 + O(\varepsilon^2)$$

où on identifiera I_1 en fonction de u, v et f.

5 En déduire que $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution, en un sens à préciser, du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Vérifier que ce problème admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$.

6 Montrer qu'il existe une constante C indépendante de u et de f telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

7 Montrer que $u \in H^2(\Omega)$ et prouver qu'il existe une constante C indépendante de u et de f telle que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(\Omega)}\right).$$

On s'intéresse à une discrétisation par éléments finis P^1. On considère donc une suite de maillages triangulaires réguliers de Ω et une discrétisation de $H_0^1(\Omega)$ par des fonctions continues, et affines sur les éléments du maillage. On note $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ les espaces d'éléments finis associés.

En reprenant les arguments précédents, on montre facilement qu'il existe une unique fonction $u_h \in V_h$ telle que

$$J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h).$$

8 Montrer que u_h est l'unique solution d'une formulation variationnelle qu'on précisera. Monter qu'il existe une constante C indépendante de u_h, f et du maillage telle que

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

9 Montrer que : pour toute fonction $v_h \in V_h$,

$$\int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u^3 - u_h^3) v_h = 0.$$

10 En déduire que pour toutes fonctions v_h, $w_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(w_h - u_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (w_h - u_h)(u^2 + u u_h + u_h^2) v_h \\ &= \int_\Omega \nabla(w_h - u) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (w_h - u)(u^2 + u u_h + u_h^2) v_h, \end{aligned}$$

puis que

$$
\begin{aligned}
&\|w_h - u_h\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega (w_h - u_h)^2(u^2 + uu_h + u_h^2) \\
&\leq \|u - w_h\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega (u - w_h)^2(u^2 + uu_h + u_h^2) \\
&\leq \|u - w_h\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{3}{2}\|u - w_h\|^2_{L^3(\Omega)} \left(\|u\|^2_{L^6(\Omega)} + \|u_h\|^2_{L^6(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

11 En déduire que pour toute fonction $w_h \in V_h$,

$$\|u_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \left(\|u - w_h\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u - w_h\|_{L^3(\Omega)}\right)$$

où C est une constante indépendante de h. En déduire que

$$\|u_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq Ch,$$

où C est une constante indépendante de h.

On peut montrer par ailleurs (cf. les questions subsidiaires en fin de problème) que

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \tag{3}$$

où C est une constante indépendante de h.

On considère maintenant une approximation de u construite en deux temps, sur deux maillages (un grossier de pas H, et un fin de pas h). Dans un premier temps, $u_H \in V_H$ est construit comme u_h ci-dessus, sur le maillage grossier. Ensuite, $\bar{u}_h \in V_h$ est définie comme la solution du problème : pour tout $v_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}_h \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u_H)^2 \bar{u}_h v_h = \int_\Omega f v_h. \tag{4}$$

12 Discuter l'intérêt de cette méthode numérique par rapport à la recherche directe de $u_h \in V_h$ solution du problème initial.

13 Montrer que pour toutes fonctions v_h et w_h de V_h,

$$\int_\Omega \nabla(u - \bar{u}_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u^3 - u_H^2 \bar{u}_h) v_h = 0,$$

et donc

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(w_h - \bar{u}_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega u_H^2 (w_h - \bar{u}_h) v_h \\
&\quad = \int_\Omega \nabla(w_h - u) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u_H^2 - u^2) u v_h + \int_\Omega u_H^2 (w_h - u) v_h.
\end{aligned}
$$

14 En déduire que

$$\begin{aligned}\|w_h - \bar{u}_h\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq\ & \|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)} \\ & + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \|u + u_H\|_{L^6(\Omega)} \|u\|_{L^6(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{L^6(\Omega)} \\ & + \|u_H\|^2_{L^3(\Omega)} \|w_h - u\|_{L^6(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{L^6(\Omega)}.\end{aligned}$$

15 Déduire de ce qui précède que

$$\|u - \bar{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C(h + H^2),$$

où C est une constante indépendante de h et H. Discuter comment choisir H par rapport à h, et conclure sur l'intérêt de la méthode.

Questions subsidiaires : L'objectif de ces deux questions est de montrer l'estimée (3).

16 Pour u et u_h fixés, on considère v solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v + (u^2 + u u_h + u_h^2) v = u - u_h \text{ dans } \Omega, \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Pourquoi ce problème est bien posé ? Montrer qu'il existe C indépendante de h telle que $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$.

17 Vérifier que, pour toute fonction $v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u - u_h)^2 &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(u - u_h) + \int_\Omega (u^3 - u_h^3) v \\ &= \int_\Omega \nabla(v - v_h) \cdot \nabla(u - u_h) + \int_\Omega (u^3 - u_h^3)(v - v_h) \\ &\leq \|v - v_h\|_{H^1_0(\Omega)} \|u - u_h\|_{H^1_0(\Omega)} + \frac{3}{2} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \left(\|u\|^2_{L^6(\Omega)} + \|u_h\|^2_{L^6(\Omega)} \right) \|v - v_h\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq C \|v - v_h\|_{H^1_0(\Omega)} \|u - u_h\|_{H^1_0(\Omega)},\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de h. En déduire (3).