Examen du cours MOPSI

9 février 2012, 08h30-12h00.

Corrigé.

Exercice 1 : Solutions périodiques à des équations différentielles ordinaires

1 Il suffit de prendre $(f,g)(x,y) = (-y,x)$, de sorte que $\ddot{x}+x=0$. Les solutions sont alors $x(t) = x(0)\cos(t) - y(0)\sin(t)$ et $y(t) = y(0)\cos(t) + x(0)\sin(t)$, et sont 2π-périodiques.

2 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une solution T-périodique $(x(t),y(t))$. On a alors

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = \|\nabla V\|^2(x(t),y(t))$$

et donc $V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \|\nabla V\|^2(x(t),y(t))\,dt$. Le membre de gauche est nul par périodicité et donc, pour tout $t \in [0,T]$, $\|\nabla V\|^2(x(t),y(t)) = 0$. Autrement dit, $(x(t),y(t)) = (x(0),y(0))$ pour tout temps, et ce n'est pas une solution périodique de période $T>0$, mais une solution stationnaire.

3 La fonction $t \in [0,T] \mapsto (x(t),y(t))$ est une paramétrisation de C et donc, $(\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = (f,g)(x(t),y(t))$ est un vecteur tangent à C au point $(x(t),y(t))$.

4 On raisonne par l'absurde. Soit $(x(t),y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une solution périodique : il existe $T>0$ tel que $(x(0),y(0)) = (x(T),y(T))$. On note

$$C = \{(x(t),y(t))_{t\in[0,T]}\}$$

la courbe décrite par la solutin périodique. Noter que cette courbe ne se recoupe pas (par le théorème de Cauchy Lispschitz) et délimite donc (puisqu'on est en dimension deux) un domaine borné noté D, qui a pour bord C. Par la formule de Stokes, on a

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y)\,dxdy = \int_C (fn_x + gn_y)(x,y)dl$$

où (n_x,n_y) désigne la normale sortante à D, et dl est l'élément d'intégration le long de C. Par la question précédente, en tout point $(x,y) \in C$, le vecteur $(f(x,y),g(x,y))$ est tangent à C. Par conséquent, on a

$$\int_C (fn_x + gn_y)(x,y)dl = 0.$$

On a donc

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y)\,dxdy = 0.$$

Ceci est contradictoire avec le fait que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ est strictement positif (ou négatif) dans D, d'où la contradiction.

5 Par le raisonnement précédent, on voit facilement qu'il ne peut y avoir de solution périodique dans $\mathbb{R}^2 \setminus B$ qui n'entoure pas B. Montrons maintenant qu'il y a au plus une orbite périodique dans $\mathbb{R}^2 \setminus B$ qui entoure B. On raisonne pour cela par l'absurde : on considère $(x^1(t), y^1(t))$ et $(x^2(t), y^2(t))$ deux solutions périodiques à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus B$ telles que les orbites associées C^1 et C^2 entourent B. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces orbites ne se recoupent pas, et délimitent donc un domaine annulaire borné D, qui a pour bord $C^1 \cup C^2$, avec $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$. On a donc :

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) (x, y)\, dxdy = \int_{C^1} (fn_x + gn_y)(x, y)dl + \int_{C^2} (fn_x + gn_y)(x, y)dl.$$

Le membre de droite est nul, et le membre de gauche a un signe strictement positif ou négatif. D'où la contradiction.

Le critère de non-existence de solution périodique qu'on a discuté ici s'appelle le critère de Dulac. Il admet une généralisation au cas où il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{\partial(\phi f)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\phi g)}{\partial y}$ ne s'annule pas.

Exercice 2 : Problème sur le renouvellement.

1 Grâce à la loi forte des grands nombres, nous avons $T_k/k \underset{k\to+\infty}{\to} m$, p.s. Cela donne en particulier que $T_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ p.s, puis $X_n \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, p.s. Par conséquent, il vient que $T_{X_n}/X_n \underset{n\to+\infty}{\to} m$.

2 Par définition de X_n, on a $T_{X_n} \leq n < T_{X_n+1}$. On en déduit que :

$$\frac{T_{X_n}}{X_n} \leq \frac{n}{X_n} < \frac{T_{X_n+1}}{X_n+1} \frac{X_n+1}{X_n}.$$

Comme $X_n \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ p.s., il vient que : $\frac{T_{X_n}}{X_n} \underset{n\to+\infty}{\to} m$, $\frac{T_{X_n+1}}{X_n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} m$ et $\frac{X_n+1}{X_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ p.s. Ainsi, on en déduit que $\frac{X_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1/m$, p.s. Cela signifie qu'après un temps suffisament long, le nombre moyen d'autobus (resp. composants) par unité de temps que l'on a vu (resp. changé) est de $1/m$.

3 On a $R_0(\omega) = 3$, $R_1(\omega) = 2$, $R_2(\omega) = 1$, $R_3(\omega) = 5$, $R_4(\omega) = 4$, $R_5(\omega) = 3$, $R_6(\omega) = 2$, $R_7(\omega) = 1$, $R_8(\omega) = 2$, $R_9(\omega) = 1$.

4 On a $R_{T_0} = \xi_1$, puis, par récurrence immédiate, $R_{T_k} = \xi_{k+1}$. Or, nous avons $T_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, on en déduit que $\xi_1 = R_0, \xi_2 = R_{R_0}$ puis $\xi_{k+1} = R_{\xi_1+\cdots+\xi_k}$, $k \geq 0$.

5 L'événement $\{R_0 = r_0, \ldots, R_n = r_n\}$ correspond à avoir $\xi_{i+1} = r_{k_i^{\mathbf{r}}}$, pour tout $0 \leq i \leq i^{\mathbf{r}}$, et $R_k = R_{k-1} - 1$ pour tout $k \in \{0 \leq l \leq n, \forall i \geq 0, l \neq k_i^{\mathbf{r}}\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}&\{R_0 = r_0, \ldots, R_n = r_n\}\\ &= \left(\cap_{0\leq i\leq i^{\mathbf{r}}} \{\xi_{i+1} = r_{k_i^{\mathbf{r}}}\}\right) \bigcap \left(\cap_{0\leq k\leq n, \forall i, k\neq k_i^{\mathbf{r}}} \{r_k = r_{k-1} - 1\}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'indépendance des variables aléatoires ξ_i, on obtient que $\mathbb{P}(R_0 = r_0, \ldots, R_n = r_n) = \prod_{0\leq i\leq i^{\mathbf{r}}} p(r_{k_i^{\mathbf{r}}}) \prod_{0\leq k\leq n, \forall i, k\neq k_i^{\mathbf{r}}} \mathbf{1}_{\{r_k=r_{k-1}-1\}}$. Par définition des $k_i^{\mathbf{r}}$, nous avons $r_{k_i^{\mathbf{r}}-1} = r_{k_{i-1}^{\mathbf{r}}} - (k_i^{\mathbf{r}} - 1 - k_{i-1}^{\mathbf{r}}) = 1$ pour $1 \leq i \leq i^{\mathbf{r}}$, et donc

$$\mathbb{P}(R_0 = r_0, \dots, R_n = r_n) = p(r_0) \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{r_k = r_{k-1}-1\}} + \mathbf{1}_{\{r_{k-1}=1\}} p(r_k).$$

On en déduit que $(R_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de loi initiale $(p(k), k \in \mathbb{N}^*)$ et de matrice de transition $P(r, r') = \mathbf{1}_{\{r'=r-1\}} + \mathbf{1}_{\{r=1\}} p(r')$, pour $r, r' \in \mathbb{N}^*$.

6 Clairement, l'état 1 conduit à tous les états $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $P(1, n) = p(n) > 0$ par hypothèse. Inversement, tout état $n \geq 2$ conduit à l'état 1 puisque $P(n, n-1) = 1$, et par récurrence $P^{n-1}(n, 1) = 1 > 0$. On en déduit que la chaîne de Markov est irréductible. Clairement, elle retourne une infinité de fois à l'état 1 et est donc récurrente. En outre, partant de 1, l'espérence du premier temps de retour à l'état 1 est $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$, elle est donc récurrente positive. Elle admet donc une unique probabilité invariante ν. En écrivant $\nu P = \nu$, on obtient que

$$k \in \mathbb{N}^*, \nu(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(i) P(i, k) = \nu(k+1) + \nu(1) p(k).$$

En itérant cette formule, on obtient pour $\nu(k) = \nu(k+l+1) + \nu(1) \sum_{j=k}^{l} p(j)$, pour $l \in \mathbb{N}^*$, puis en faisant tendre $l \to +\infty$,

$$\nu(k) = \nu(1) \sum_{j=k}^{\infty} p(j) = \nu(1) \mathbb{P}(\xi_1 \geq k).$$

Comme ν est une mesure de probabilité, on doit avoir $1 = \nu(1) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_1 \geq k) = \nu(1) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\xi_1 \geq k}] = \nu(1) \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\xi_1 \geq k}] = \nu(1) \mathbb{E}[\xi_1]$, et donc $\nu(1) = 1/m$.

7 Dans le cas où $p(k) = q(1-q)^{k-1}$, on a $\mathbb{E}[\xi_1] = 1/q$ et $\mathbb{P}(\xi_1 \geq k) = (1-q)^{k-1}$. Il vient que $\nu(k) = q(1-q)^{k-1} = p(k)$. Ainsi, la loi invariante est la même que la loi initiale, et on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(R_n = k) = \nu(k)$. Ainsi, la loi de l'attente d'un autobus est la même, quel que soit l'instant où l'on arrive à l'arrêt de bus.

8 Supposons que l'on ait une partition $C_1, \dots, C_d$ de $\mathbb{N}^*$ telle que, en posant $C_0 = C_d$, on ait $\forall k \in \{1, \dots, d\}, \forall r \in C_{k-1} \sum_{r' \in C_k} P(r, r') = 1$. Quitte à renuméroter les partition, on peut supposer que $1 \in C_0$ et $\sum_{r' \in C_1} P(1, r') = \sum_{r' \in C_1} p(r') = 1$ implique par hypothèse sur p que $C_1 = \mathbb{N}^*$, et nécessairement, $d = 1$. Cela prouve l'apériodicité. Le second théorème ergodique assure alors que R_n converge en loi vers la loi invariante ν. Pour un usager de la ligne de bus la loi limite ν représente la loi de son attente à l'arrêt de bus, s'il arrive "bien après" la mise en fonction de la ligne de bus.

Exercice 3.

0 L'égalité $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\varphi(u) + \psi(u)) dW_u\right)^2\right] = \int_0^t (\varphi(u) + \psi(u))^2 du$ vient immédiatement de la propriété d'isométrie. On développe les carrés, $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \varphi(u) dW_u\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi(u) dW_u \int_0^t \psi(u) dW_u\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \psi(u) dW_u\right)^2\right] = \int_0^t \varphi(u)^2 du + 2 \int_0^t \varphi(u)\psi(u) du + \int_0^t \psi(u)^2 du$ et utilise à nouveau la propriété d'isométrie pour obtenir l'identité demandée.

1 Pour $0 \leq t_1 \leq \ldots, \leq t_n$, nous avons

$$\left(\sum_{i=0}^{N} \varphi(i\frac{t_1}{N})(W_{(i+1)\frac{t_1}{N}} - W_{i\frac{t_1}{N}}), \ldots, \sum_{i=0}^{N} \varphi(i\frac{t_1}{N})(W_{(i+1)\frac{t_n}{N}} - W_{i\frac{t_n}{N}})\right) \underset{N\to+\infty}{\overset{L^2}{\to}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}).$$

Le membre de gauche est un vecteur gaussien pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, puisque le mouvement brownien est un processus gaussien. Par conséquent, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien comme limite (en loi) de vecteurs gaussien. Cela prouve que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien.

2 Les variables X_s et X_t étant centrée, on a $cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s X_t]$. Par la propriété d'isométrie, on a pour $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi(u)\mathbf{1}_{u\leq s} dW_u \int_0^t \varphi(u) dW_u\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi(u)^2 \mathbf{1}_{u\leq s} du\right] = \int_0^s \varphi(u)^2 du = \mathbb{E}[X_s^2].$$

Par conséquent, $X_t - X_s$ suit une loi gaussienne centrée de variance $\mathbb{E}[X_t^2] - 2\mathbb{E}[X_s X_t] + \mathbb{E}[X_s^2] = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_s^2] = \int_s^t \varphi(u)^2 du$.

En utilisant la même formule, nous avons pour $0 \leq r \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_r(X_t - X_s)] = \mathbb{E}[X_r^2] - \mathbb{E}[X_r^2] = 0$. Comme $(X_r, X_t - X_s)$ est un vecteur gaussien, cela signifie que X_r est indépendant de $X_t - X_s$. De façon plus générale, $(X_{r_1}, \ldots, X_{r_n})$ est indépendant de $X_t - X_s$ pour tout $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_n \leq s \leq t$, ce qui donne que $X_t - X_s$ est indépendant de $(X_r, 0 \leq r \leq s)$ et donc de $\mathcal{F}_s$.

3 Pour $0 \leq s \leq t$, on :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[M_s \exp\left(\lambda(X_t - X_s) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \varphi(u)^2 du\right) \Big| \mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(X_t - X_s) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \varphi(u)^2 du\right) \Big| \mathcal{F}_s\right] \text{ puisque } M_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\
&= M_s \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(X_t - X_s) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \varphi(u)^2 du\right)\right] \text{ puisque } X_t - X_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s \\
&= M_s \text{ puisque } X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, \int_s^t \varphi(u)^2 du)\ .
\end{aligned}$$

4 Le processus $(X_t, t \geq 0)$ est une intégrale stochastique et est donc p.s. continu. On procède comme dans le cours pour le mouvement brownien : $\{\tau_a^X \leq t\} = \cup_{s\in[0,t]}\{X_s \geq a\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]} \{X_s > a - 1/n\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{X_s > a - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$, où nous avons utilisé, pour la deuxième et la troisième égalité que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus continu.

5 Il suffit d'observer que $\tau_a^X \wedge t$ est un temps d'arrêt borné par t. Le théorème d'arrêt donne alors $\mathbb{E}[M_{\tau_a^X \wedge t}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$. Cela donne

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda X_{\tau_a^X \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X \wedge t)\right)\right] = 1.$$

Comme $\Phi \geq 0$, on a $0 \leq \exp\left(\lambda X_{\tau_a^X \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X \wedge t)\right) \leq \exp(\lambda a)$. Par ailleurs, on a presque sûrement que $\exp\left(\lambda X_{\tau_a^X \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X \wedge t)\right) \underset{t\to+\infty}{\to} \exp(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X))\mathbf{1}_{\tau_a^X < \infty}$. Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lambda > 0, \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X)\right)\mathbf{1}_{\tau_a^X<\infty}\right] = 1.$$

Pour $\lambda \in]0,1]$, $0 \leq \exp(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X)) \leq \exp(a)$, et le théorème de convergence dominée donne pour $\lambda \to 0$ que $\mathbb{P}(\tau_a^X < \infty) = 1$. On en déduit que

$$\lambda > 0, \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X)\right)\right] = 1,$$

ce qui donne $\mathbb{E}\left[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}\Phi(\tau_a^X))\right] = \exp(-\lambda a)$. Par ailleurs, nous savons que $\mathbb{E}\left[\exp(-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a^W)\right] = \exp(-\lambda a)$: c'est un résultat du cours qui correspond au cas particulier $\varphi \equiv 1$. Ainsi, $\Phi(\tau_a^X)$ et τ_a^W ont la même transformée de Laplace et ont donc même loi.

6 Le processus $(W_{\Phi(t)}, t \geq 0)$ est clairement un processus gaussien : pour $t_1, \ldots, t_n \geq 0$, $(W_{\Phi(t_1)}, \ldots, W_{\Phi(t_n)})$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance $(\Phi(t_i \wedge t_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Ainsi, $(W_{\Phi(t_1)}, \ldots, W_{\Phi(t_n)})$ a même loi que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, et les processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(W_{\Phi(t)}, t \geq 0)$ ont même loi. On en déduit que τ_a^X a même loi que $\inf\{t \geq 0, W_{\Phi(t)} = a\} = \Phi^{-1}(\tau_a^W)$, où $\Phi^{-1}(u) = \inf\{s \geq 0, \Phi(s) = u\}$. Par conséquent, $\Phi(\tau_a^X)$ a même loi que $\Phi(\Phi^{-1}(\tau_a^W)) = \tau_a^W$.

7 Pour $t > 0$, X_t et $W_{\Phi(t)}$ suivent toutes les deux la loi $\mathcal{N}(0, \Phi(t))$. En particulier $|f(x)|\exp(-\frac{x^2}{2\Phi(t)})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $u(t,x)$ est bien définie. On pose $\tilde{u}(t,x) = \mathbb{E}[f(x + W_t)]$. Par un théorème du cours, u est régulière et résout l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 \tilde{u}(t,x) \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

On a $u(t,x) = \tilde{u}(\Phi(t), x)$ et donc $\partial_t u(t,x) = \varphi(t)^2 \partial_t \tilde{u}(\Phi(t), x)$. On en déduit immédiatement que u résout l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(t)^2 \partial_x^2 u(t,x) \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Problème : Une équation aux dérivées partielles non-linéaire et sa discrétisation par une méthode d'éléments finis à deux grilles.

1 Il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ définit bien un produit scalaire. De plus, $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert, car c'est un sous espace fermé du Hilbert H^1. Enfin, la norme $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ est équivalent à la norme H^1 par l'inégalité de Poincaré.

L'espace $H^1(\Omega)$ (et donc $H_0^1(\Omega)$) s'injecte de manière continue dans les espaces $L^q(\Omega)$ avec $q \in [1, p^*]$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, soit $p^* = 6$. De plus, comme le domaine est borné, l'injection est compacte pour $q \in [1, p^*)$.

2 La fonctionnelle est bien définie puisque si $v \in H_0^1(\Omega)$, alors $v \in L^4(\Omega)$ (et donc $\frac{1}{4}\int_\Omega v^4 < \infty$) et $v \in L^2(\Omega)$ (et donc $\int_\Omega fv < \infty$ par Cauchy Schwarz). On a (en utilisant l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega fv\right| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega v^4 - \int_\Omega fv \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega v^4 - \frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|v\|^4_{L^4(\Omega)} - C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq -C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

La fonctionnelle J est donc minorée par une constante indépendante de v.

3 La suite $J(v_k)$ est majorée (puisqu'elle converge) par une constante M et donc, en utilisant l'inégalité ci-dessus,

$$M \geq J(v_k) \geq \frac{1}{4}\|v_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|v_k\|^4_{L^4(\Omega)} - C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ce qui implique

$$\|v_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 4\left(M + C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

La suite (v_k) est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On en déduit que, quitte à extraire une sous suite, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que v_k converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement vers u dans les $L^q(\Omega)$, avec $q \in [1, 6)$. En particulier, on a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|_{L^4(\Omega)}$$

et

$$\int_\Omega fu = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega fv_k.$$

Ceci implique que

$$J(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J(v_k) = m.$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a aussi $J(u) \geq m$, et donc $J(u) = m$. L'infimum est en fait un minimum.

On pourrait aussi utiliser le fait que la fonctionnelle J est α-convexe : pour deux fonctions v et w de $H_0^1(\Omega)$,

$$J(v+w) + J(v-w) \geq 2J(v) + \int_\Omega |\nabla w|^2.$$

En prenant $v = (v_k + v_l)/2$ et $w = (v_k - v_l)/2$ (comme dans la preuve du théorème de projection sur un convexe, Section 10.3), on montre alors que la suite est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$, et donc cela donne la convergence forte de toute la suite v_k vers u.

4 On a

$$\begin{aligned} J(u+\varepsilon v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+\varepsilon v)|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega (u+\varepsilon v)^4 - \int_\Omega f(u+\varepsilon v) \\ &= J(u) + \varepsilon\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega u^3 v - \int_\Omega fv\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

5 On a

$$J(u+\varepsilon v) \geq J(u)$$

et donc

$$\varepsilon\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega u^3 v - \int_\Omega fv\right) + O(\varepsilon^2) \geq 0$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$. En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans cette relation, pour $\varepsilon > 0$ et pour $\varepsilon < 0$, on a donc que : pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega u^3 v - \int_\Omega fv = 0.$$

Ceci est clairement une formulation variationnelle associée au problème (2) (l'EDP étant donc vérifiée au sens des distributions). On a donc obtenue l'existence d'une solution à (2), au sens de la formulation variationnelle ci-dessus.

Pour montrer l'unicité, supposons par l'absurde qu'on dispose de deux solutions u_1 et u_2 dans $H_0^1(\Omega)$ à la formulation variationnelle. Par différence, on a, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\cdot\nabla v + \int_\Omega \left((u_1)^3 - (u_2)^3\right) v = 0.$$

En prenant comme fonctiont test $v = u_1 - u_2$, on a donc

$$\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 + \int_\Omega \left((u_1)^3 - (u_2)^3\right)(u_1-u_2) = 0.$$

On note que $(a^3-b^3)(a-b) \geq 0$ par croissance de la fonction $a \mapsto a^3$ et donc

$$\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 = 0$$

ce qui implique $u_1 = u_2$.

Noter qu'on ne peut pas appliquer le classique théorème de Lax-Milgram pour prouver l'existence et unicité d'une solution à cette formulation variationnelle, puisque c'est un problème non-linéaire en u.

6 En prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle, on a (en utilisant l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^4 &= \int_\Omega fu \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}C^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

7 On a, au sens des distributions,

$$-\Delta u = g$$

avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et $g = f - u^3$ une fonction de $L^2(\Omega)$ puisque $u \in L^6(\Omega)$ par injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$. On en déduit, par le résultat de régularité elliptique vue en cours que $u \in H^2(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

où C est une constante indépendant de f et u. Il reste maintenant à estimer $\|g\|_{L^2(\Omega)}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|f - u^3\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|^6_{L^6(\Omega)}
\end{aligned}$$

et donc (en utilisant la question 6)

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{2}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^3_{L^6(\Omega)}\right) \\
&\leq \sqrt{2}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^3_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
&\leq \sqrt{2}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C^3\|f\|^3_{L^2(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

8 Par exactement les mêmes arguments qu'aux questions 4 et 5 ci-dessus, on a : $u_h \in V_h$ et pour tout $v_h \in V_h$,

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_\Omega u_h^3 v_h - \int_\Omega f v_h = 0.$$

La solution est unique par le même argument que celui utilisé à la question 5. C'est un problème discret non-linéaire. Enfin, en prenant $v_h = u_h$ et en reproduisant l'argument de la question 6, on a

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec la même constant C, qui est donc indépendante de h.

9 Puisque $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, on peut prendre $v = v_h$ dans la formulation variationnelle pour u énoncée à la question 5. Par différence des formulations variationnelles pour u et pour u_h, on a donc : pour toute fonction $v_h \in V_h$,

$$\int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u^3 - u_h^3) v_h = 0.$$

10 En utilisant le fait que $(u^3 - u_h^3) = (u - u_h)(u^2 + uu_h + u_h^2)$ et en écrivant $u - u_h = u - w_h + w_h - u_h$, on obtient facilement que pour toutes fonctions v_h, $w_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(w_h - u_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (w_h - u_h)(u^2 + uu_h + u_h^2) v_h \\ &= \int_\Omega \nabla(w_h - u) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (w_h - u)(u^2 + uu_h + u_h^2) v_h. \end{aligned}$$

En prenant ensuite $v_h = w_h - u_h$, on a donc (noter que pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + ab + b^2 \geq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) \geq 0$)

$$\begin{aligned} &\|w_h - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (w_h - u_h)^2 (u^2 + uu_h + u_h^2) \\ &= \int_\Omega \nabla(w_h - u) \cdot \nabla(w_h - u_h) + \int_\Omega (w_h - u)(u^2 + uu_h + u_h^2)(w_h - u_h) \\ &\leq \|w_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|(w_h - u)\sqrt{u^2 + uu_h + u_h^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|(w_h - u_h)\sqrt{u^2 + uu_h + u_h^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w_h - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\|(w_h - u)\sqrt{u^2 + uu_h + u_h^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|(w_h - u_h)\sqrt{u^2 + uu_h + u_h^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $(3/2)$ et 3, on a

$$\begin{aligned} &\|w_h - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (w_h - u_h)^2 (u^2 + uu_h + u_h^2) \\ &\leq \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (w_h - u)^2 (u^2 + uu_h + u_h^2) \\ &\leq \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\int_\Omega (w_h - u)^2 (u^2 + u_h^2) \\ &\leq \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\|(w_h - u)^2\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|(u^2 + u_h^2)\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\|w_h - u\|^2_{L^3(\Omega)} \left(\|u^2\|_{L^3(\Omega)} + \|u_h^2\|_{L^3(\Omega)}\right) \\ &= \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\|w_h - u\|^2_{L^3(\Omega)} \left(\|u\|^2_{L^6(\Omega)} + \|u_h\|^2_{L^6(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

11 On sait que u et u_h sont bornés dans $H_0^1(\Omega)$ (indépendamment de h) et on déduit donc de l'inégalité précédente (puisque $\int_\Omega (w_h - u_h)^2 (u^2 + uu_h + u_h^2) \geq 0$)

$$\|w_h - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w_h - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C\|w_h - u\|^2_{L^3(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de h. On a donc

$$\|w_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{C}\|w_h - u\|_{L^3(\Omega)},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|u - w_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq 2\|w_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{C}\|w_h - u\|_{L^3(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ensuite, par injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ on a, pour tout $w_h \in V_h$,

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{C}\|w_h - u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et en utilisant une estimée d'erreur classique pour des éléments finis P1,

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \tilde{C} \inf_{w_h \in V_h} \|w_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C}h\|u\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve puisque $u \in H^2(\Omega)$ par la question 7.

12 L'intérêt de cette méthode est que le problème non-linéaire associée au problème (2) (dont la formulation variationnelle est donnée dans la question 8, au niveau discret) ne doit être résolu que sur le maillage grossier, donc pour un nombre de degrés de liberté petit par rapport au maillage fin. Noter que la résolution de ce problème non-linéaire nécessite typiquement un algorithme itératif pour être résolu (penser à Newton), et est donc d'autant moins couteux que le nombre de degrés de liberté est faible. Ensuite, le problème sur $\bar{u}_h$ est linéaire. C'est un problème bien posé par application standard du théorème de Lax-Milgram. Il est donc beaucoup plus simple à résoudre que le problème original non-linéaire sur u_h. La question est bien sûr : quelle est l'estimée d'erreur sur $\bar{u}_h$, comparée à celle sur u_h ?

13 En faisant la différence des formulations variationnelles sur u (avec $v = v_h$ comme fonction test) et sur $\bar{u}_h$, on a :

$$\int_\Omega \nabla(u - \bar{u}_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u^3 - u_H^2 \bar{u}_h) v_h = 0.$$

Des manipulations algébriques simples permettent ensuite de réécrire cette égalité sous la forme : pour toutes fonctions v_h et w_h de V_h,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla(w_h - \bar{u}_h) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega u_H^2 (w_h - \bar{u}_h) v_h \\ &\quad = \int_\Omega \nabla(w_h - u) \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (u_H^2 - u^2) u v_h + \int_\Omega u_H^2 (w_h - u) v_h.\end{aligned}$$

14 En prenant $v_h = w_h - \bar{u}_h$, on a donc, en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants 2, 6, 6 et 6 ($1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$) pour le deuxième terme et avec les exposants 3/2, 6 et 6 $(2/3 + 1/6 + 1/6 = 1)$ pour le troisième terme :

$$\begin{aligned}
&\|w_h - \bar{u}_h\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega u_H^2 (w_h - \bar{u}_h)^2 \\
&\leq \|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\quad + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \|u + u_H\|_{L^6(\Omega)} \|u\|_{L^6(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{L^6(\Omega)} \\
&\quad + \|u_H\|^2_{L^3(\Omega)} \|w_h - u\|_{L^6(\Omega)} \|w_h - \bar{u}_h\|_{L^6(\Omega)}.
\end{aligned}$$

15 En utilisant $\|w_h - \bar{u}_h\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|w_h - \bar{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)}$, et le fait que par la question 8, u_H est borné uniformément en H en norme $H^1_0(\Omega)$ (et donc en normes $L^3(\Omega)$ et $L^6(\Omega)$), on a donc

$$\|w_h - \bar{u}_h\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \left(\|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} + \|w_h - u\|_{L^6(\Omega)} \right).$$

On en déduit que (pour de nouvelles constantes C, toujours indépendantes de h et H),

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} &\leq \|\bar{u}_h - w_h\|_{H^1_0(\Omega)} + \|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq C \left(\|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} + \|w_h - u\|_{L^6(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(\|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $w_h \in V_h$ et donc

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} &\leq C \left(\inf_{w_h \in V_h} \|w_h - u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(h + H^2 \right).
\end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que $u \in H^2(\Omega)$ et une estimée d'erreur classique pour des éléments finis P1, ainsi que l'estimée d'erreur (3) sur u_H.

On voit donc qu'en choisissant $H = \sqrt{h}$ (noter qu'on a bien alors H beaucoup plus grand que h, pour h petit), on a une estimée d'erreur sur $\bar{u}_h$ du même ordre que celle sur u_h (cf. question 11). Par cette technique de double grilles, on obtient donc une méthode aussi précise que la résolution du problème non-linéaire original, mais beaucoup moins coûteuse puisque la résolution du problème non-linéaire n'est faite que sur le maillage grossier.

16 Ce problème est bien posé dans $H^1_0(\Omega)$ par application classique du théorème de Lax-Milgram, en notant que $u^2 + uu_h + u_h^2 \geq \frac{1}{2}\left(u^2 + u_h^2\right) \geq 0$. On a en particulier l'estimée :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega (u^2 + uu_h + u_h^2) v^2 &\leq \int_\Omega (u - u_h) v \\
&\leq \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq \frac{C^2}{2} \|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)},
\end{aligned}$$

et donc

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

pour une constante C indépendante de h. On note ensuite que $v \in H_0^1(\Omega)$ satisfait $-\Delta v = g$ avec $g = -(u^2 + uu_h + u_h^2)v + u - u_h$ une fonction de $L^2(\Omega)$. Par régularité elliptique, on a donc, pour de nouvelles constantes C indépendantes de h :

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\|g\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C\| - (u^2 + uu_h + u_h^2)v + u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\left(\|(u^2 + uu_h + u_h^2)v\|_{L^2(\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\|(u^2 + uu_h + u_h^2)\|_{L^3(\Omega)}\|v\|_{L^6(\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left((\|u^2\|_{L^3(\Omega)} + \|u_h^2\|_{L^3(\Omega)})\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= C\left((\|u\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|u_h\|_{L^6(\Omega)}^2)\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que u et u_h sont bornés en norme $H_0^1(\Omega)$ (et donc $L^6(\Omega)$) indépendamment de h.

17 En multipliant l'EDP (5) par $(u - u_h)$, on a :

$$\int_\Omega (u - u_h)^2 = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(u - u_h) + \int_\Omega (u^3 - u_h^3)v.$$

En utilisant la question 9, on a donc : pour toute fonction $v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u - u_h)^2 &= \int_\Omega \nabla(v - v_h) \cdot \nabla(u - u_h) + \int_\Omega (u^3 - u_h^3)(v - v_h) \\
&= \int_\Omega \nabla(v - v_h) \cdot \nabla(u - u_h) + \int_\Omega (u - u_h)(u^2 + uu_h + u_h^2)(v - v_h) \\
&\leq \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\|u^2 + uu_h + u_h^2\|_{L^3(\Omega)}\|v - v_h\|_{L^6(\Omega)} \\
&\leq \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\left(\|u^2\|_{L^3(\Omega)} + \|u_h^2\|_{L^3(\Omega)}\right)\|v - v_h\|_{L^6(\Omega)} \\
&= \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{3}{2}\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}\left(\|u\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|u_h\|_{L^6(\Omega)}^2\right)\|v - v_h\|_{L^6(\Omega)} \\
&\leq C\|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a encore utilisé le fait que u et u_h sont bornés en norme $H_0^1(\Omega)$ (et donc $L^6(\Omega)$) indépendamment de h. On a donc, en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u - u_h)^2 &\leq C\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq Ch\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq Ch\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En divisant par $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ puis en utilisant la question 11, on a donc

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$$