Examen du cours MOPSI

14 février 2013, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopié) sont autorisées.

Important : L'examen comporte trois exercices et deux problèmes, tous indépendants. Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes.
- Sur la **copie "Probabilités"**, rédiger les réponses aux **exercices 2 et 3, et au problème 2**.
- Sur la **copie "Analyse numérique"**, rédiger les réponses à **l'exercice 1 et au problème 1**.

Exercice 1 : une équation aux dérivées partielles non linéaire.

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ et f une application continue lipschitzienne : $\forall u, v \in \mathbb{R}$,

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|.$$

1 Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ une fonction fixée, et soit u_1 solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f(u_0) \text{ sur } \Omega, \\ u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que ce problème admet une unique solution $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. On note $\mathcal{T} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ l'application qui à u_0 associe u_1.

2 On munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme $\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\right)^{1/2}$. Donner une hypothèse sur L qui permet de rendre l'application $\mathcal{T}$ contractante. En déduire un théorème d'existence unicité pour (1) ainsi qu'une méthode numérique pour approximer la solution de (1).

Exercice 2 : processus gaussien.

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(W_t, t \in [0,T])$ un mouvement brownien standard. On définit pour $t \in [0, T[$,

$$X_t = W_t + \int_0^t \frac{W_u - W_T}{T - u} du.$$

1 Montrer que $(X_t, t \in [0, T[)$ est un processus gaussien centré.

2 Montrer que $(X_t, t \in [0, T[)$ est indépendant de W_T.

3 Soient $s, t \in [0, T[$. On rappelle que $\mathbb{E}[W_s W_t] = s \wedge t$. Calculer $\mathbb{E}[X_s X_t]$. Que peut on conclure ?

Exercice 3 : calcul de projection orthogonale. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[f^2(X_1, \dots, X_n)] < \infty$. L'objectif est de calculer la projection L^2 de la variable aléatoire $f(X_1, \dots, X_n)$ sur le sous-espace vectoriel

$$V = \{\sum_{i=1}^{n} h_i(X_i),\ h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ t.q. } \mathbb{E}[h_i(X_i)^2] < \infty\},$$

c'est à dire trouver $Y \in V$ t.q. $\forall Y' \in V,\ \mathbb{E}[(f(X_1, \dots, X_n) - Y)^2] \leq \mathbb{E}[(f(X_1, \dots, X_n) - Y')^2]$.

On suppose dans un premier temps que $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] = 0$.

1 Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_i(x) = \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_{i-1}, x, X_{i+1}, \dots, X_n)]$. Exprimer $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)|X_i]$ à l'aide de f_i.

2 On considère n fonctions $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ telles que $\mathbb{E}[h_i(X_i)^2] < \infty$. Montrer que

$$\forall l \in \{1, \dots, n\},\ \mathbb{E}\left[(f_l(X_l) - h_l(X_l))\left(f(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right)\right] = 0.$$

3 En déduire que $\mathbb{E}\left[(f(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(f(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{n} h_i(X_i))^2\right]$.

4 Désormais, on ne suppose plus que $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] = 0$. Construire à l'aide des questions précédentes une variable $Y \in V$ satisfaisant $\forall Y' \in V,\ \mathbb{E}[(f(X_1, \dots, X_n) - Y)^2] \leq \mathbb{E}[(f(X_1, \dots, X_n) - Y')^2]$.

5 On considère $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et $f(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$. Calculer Y dans ce cas.

Problème 1 : contrôle optimal.

1 On considère une masse ponctuelle astreinte à se déplacer le long d'un axe et attachée à un ressort linéaire. On applique à cette masse une force extérieure $u(t)$ de manière à contrôler le mouvement. Expliquer les différents termes régissant le mouvement de cette masse :

$$m_0\ddot{y}(t) + k_0(y(t) - l_0) = u(t).$$

Réécrire cette équation sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ en explicitant les vecteurs x et B et la matrice A. (Dans la suite, sauf mention explicite, les vecteurs sont des vecteurs colonnes.)

Contrôlabilité

On considère dans cette partie le problème général, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $r \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ et $u \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$. Dans la suite, la fonction u s'appelle *le contrôle* : on souhaite modifier u de manière à satisfaire certaines propriétés sur la trajectoire associée x.

On note

$$\mathrm{Acc}(x_0, T) = \{x(T), u \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)\},$$

où x est solution de (3), l'ensemble des points accessibles (pour tous les contrôles u possibles) à partir de x_0, en un temps $T > 0$.

2 Montrer que $x(t) = \exp(tA)x_0 + \int_0^t \exp((t-s)A)(Bu(s) + r(s))\,ds$.

3 Montrer que $\mathrm{Acc}(x_0, T)$ est convexe.

On introduit

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times nm}$$

la matrice de Kalman (K est une application linéaire de $\mathbb{R}^{nm}$ dans $\mathbb{R}^n$) et Φ l'application linéaire suivante :

$$\Phi : \begin{cases} L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n \\ \qquad u \mapsto \displaystyle\int_0^T \exp((T-t)A)Bu(t)\,dt. \end{cases}$$

Nous allons montrer dans les deux questions qui suivent que Φ est sujective si et seulement si K est surjective (i.e. $\mathrm{rg}(K) = n$).

4 On suppose que $\mathrm{rg}(K) < n$. Montrer que Φ n'est pas surjective. *Indication : On introduit un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi K = 0$, et donc $\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1}B = 0$. On rappelle que par le théorème de Cayley-Hamilton, la matrice A annule un polynôme de degré n. En déduire que $\psi \exp(tA)B = 0$, et conclure.*

5 On suppose que Φ n'est pas surjective. Montrer que $\text{rg}(K) < n$.

6 En déduire que $\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\text{rg}(K) = n$.

7 Dans le cas de l'oscillateur décrit à la question 1, que dire de $\text{Acc}(x_0, T)$?

Contrôle optimal

On considère dans cette partie le problème général, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ et on définit le coût :

$$C(u) = \|x(T)\|^2 + \int_0^T \left(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right) dt,$$

où $(x(t))_{0\leq t\leq T}$ est la trajectoire solution de (4) associée au contrôle u. On s'intéresse désormais au problème suivant : x_0 et $T < \infty$ étant fixés, comment choisir $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ pour minimiser le coût $C(u)$?

8 Montrer qu'il existe un contrôle $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ qui réalise le minimum de $C(u)$. *Indication : On pourra considérer une suite u^n telle que* $\lim_{n\to\infty} C(u^n) = \inf_{u\in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)} C(u)$.

9 Soit $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ un contrôle et $u + \delta u$ une perturbation de u (pour un $\delta u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$). On note x la trajectoire associée à u et $x + \delta x$ la trajectoire associée à $u + \delta u$. Vérifier que $\delta x(t) = \int_0^t \exp((t - s)A)B\delta u(s)\, ds$. Montrer que

$$C(u + \delta u) = C(u) + 2\int_0^T D(u)(s)\delta u(s)\, ds + \|\delta x(T)\|^2 + \int_0^T \left(\|\delta x(t)\|^2 + \|\delta u(t)\|^2\right) dt$$

avec $D(u)(s)$ un vecteur ligne de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$D(u)(s) = (x(T))^T \exp((T - s)A)B + \int_s^T (x(t))^T \exp((t - s)A)B\, dt + (u(s))^T.$$

10 Soit $u_0 \neq u_1$ deux fonctions de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, et $\lambda \in (0, 1)$. Montrer que

$$C(u_0) > C(\lambda u_0 + (1 - \lambda)u_1) + 2(1 - \lambda)\int_0^T D(\lambda u_0 + (1 - \lambda)u_1)(s)(u_0 - u_1)(s)\, ds.$$

En déduire que l'application $u \mapsto C(u)$ est strictement convexe : $C(\lambda u_0 + (1 - \lambda)u_1) < \lambda C(u_0) + (1 - \lambda)C(u_1)$. Qu'en déduit-on sur le minimum de C ?

Dans la suite, on note $u^* \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ le contrôle optimal réalisant le minimum de C, et x^* la trajectoire optimale associée.

11 Montrer que les résultats des questions 8 et 10 sont encore valables si $T = \infty$ et si $\text{rg}(K) = n$. *Indication : Se convaincre que cela revient à montrer qu'il existe $v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que $C(v) < \infty$.*

12 En utilisant le fait que $C(u) \geq C(u^*)$ et la question 9 montrer que $D(u^*) = 0$ et en déduire que

$$u^*(t) = (p(t)B)^T$$

où $p(t)$ est le vecteur ligne de $\mathbb{R}^n$ solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -p(t)A + (x^*(t))^T, \\ p(T) = -(x^*(T))^T. \end{cases}$$

13 Réciproquement, on suppose que le couple $(x(t), p(t))_{0 \leq t \leq T}$ est solution du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{p}(t) = -p(t)A + (x(t))^T, \\ p(T) = -(x(T))^T. \end{cases}$$

avec $u(t) = (p(t)B)^T$. Montrer que u réalise le minimum de C (et donc $u^*(t) = u(t) = (p(t)B)^T$). *Indication : montrer que $D(u) = 0$ et utiliser la question 9.* Est-ce que cette caractérisation permet de calculer numériquement la trajectoire optimale simplement ?

14 On considère, pour $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'équation de Riccati :

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = \mathrm{Id} - A^T E(t) - E(t)A - E(t)BB^T E(t), \\ E(T) = -\mathrm{Id}. \end{cases} \tag{5}$$

Montrer qu'il existe une unique solution maximale sur un intervalle de temps (t_0, T) (avec $t_0 < T$ et éventuellement $t_0 = -\infty$), et que pour $t \in (t_0, T)$, $E(t) = E(t)^T$. Que dire de $\|E(t_0)\|$ si $t_0 > -\infty$?

15 On suppose $t_0 > -\infty$ et on considère la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

avec $u(t) = B^T E(t)x(t)$, où E est la solution de (5) sur (t_0, T). En utilisant la question 13, montrer que u réalise le minimum de

$$C(u; t_0, x_0) = \|x(T)\|^2 + \int_{t_0}^{T} \left(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right) dt,$$

où $(x(t))_{t \in [t_0, T]}$ est solution de (6).

16 En calculant $\frac{d}{dt} x(t)^T E(t) x(t)$, montrer que

$$C(u; t_0, x_0) = -x_0^T E(t_0) x_0.$$

En déduire que $E(t_0)$ est une matrice de norme finie, et donc que l'équation de Riccati (5) admet une solution pour tout $t \leq T$.

Conclure sur une manière pratique de calculer numériquement la trajectoire optimale partant de x_0 à l'instant 0.

Problème 2 : une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\geq 1}$ indépendantes et distribuées selon la loi suivante :

$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=-1)=1/4,\ \mathbb{P}(Y=0)=1/2.$$

On pose $M_0=0$ et $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $M_n=\sum_{k=1}^n Y_k$ et $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$.

1 Montrer que $(M_n, n\in\mathbb{N})$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont on précisera la matrice de transition. Est-elle irréductible ?

2 Montrer soigneusement que $(M_n, n\in\mathbb{N})$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Calculer $[M]_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

4 Pour $x\in\mathbb{Z}$, on pose $\tau_x=\inf\{n\in\mathbb{N}, M_n=x\}$. Montrer que τ_x est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $a,b\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\tau=\tau_{-a}\wedge\tau_b.$$

Montrer que τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}[M^2_{\tau\wedge n}]=\frac{1}{2}\mathbb{E}[\tau\wedge n]$. En déduire que $\mathbb{E}[\tau]<\infty$ puis que $\mathbb{E}[\tau]=2\mathbb{E}[M_\tau^2]$.

6 Montrer que $\mathbb{E}[M_\tau]=0$. En déduire alors la valeur de $\mathbb{P}(\tau_b<\tau_{-a})$, puis celle de $\mathbb{E}[\tau]$.

7 Montrer que $(M_n^3-\frac{3}{2}nM_n, n\in\mathbb{N})$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[\tau M_\tau]$, puis montrer que τ est indépendant de M_τ si et seulement si $a=b$.

8 On note $(\Sigma_n, n\in\mathbb{N})$ la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$. Montrer que les processus $(M_n, n\in\mathbb{N})$ et $(\frac{1}{2}\Sigma_{2n}, n\in\mathbb{N})$ ont même loi. Calculer alors la transformée de Laplace de τ_b, $\mathbb{E}[e^{-y\tau_b}]$ pour $y\geq 0$.