# Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 28 janvier 2020

## Partie 1 : Une technique de biaisage adapté à des calculs de risques

On s'intéresse à la modélisation d'un cumul de risques petits mais nombreux (on peut penser au risque d'une compagnie d'assurance automobile ou au risque de défaillance de contrepartie d'une banque) et au calcul de la "value at risk" associée.

Pour cela, on considère $m$ variables aléatoires de Bernouilli (valant 0 ou 1) indépendantes $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ telles que, pour $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{P}(Y_i = 1) = p_i = 1 - \mathbf{P}(Y_i = 0)$, $0 < p_i < 1$.
$Y_i = 1$ correspond à la réalisation de la perte $i$. On se donne aussi une famille $(e_1, \dots, e_m)$ où chaque $e_i$ est un réel strictement positif représentant la valeur de la perte lorsque le risque $i$ se réalise.
On s'intéresse au risque total $L$, donné par $L = l(Y)$ où

$$l(y) = e_1 y_1 + \cdots + e_m y_m.$$

On cherche en particulier à calculer des probabilités du type $\mathbf{P}(L > c)$ pour des valeurs de cette probabilité petite, en vue d'évalue une "value at risk".

1. Montrer que
$$\mathbf{P}(L > c) = \sum_{y \in \{0,1\}^m} \mathbf{1}_{\{l(y) > c\}} \prod_{i=1}^{m} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i}.$$
   Lorsque $m$ est de l'ordre de quelques milliers est il raisonnable d'espérer calculer explicitement cette somme ($2^{1000} > 10^{693}$)?

   On va utiliser une méthode de Monte-Carlo pour évaluer cette probabilité. Expliquer comme simuler la variable aléatoire $L$ à partir de $m$ tirages indépendants et uniformes sur $[0, 1]$.

2. Lorsque la probabilité que l'on cherche à calculer $\mathbf{P}(L > c)$ est d'ordre $10^{-3}$, donner l'ordre de grandeur du nombre de tirages de $L$ qui sont nécessaires pour obtenir une précision relative de l'ordre de $50\%$ sur la probabilité.

3. On pose $M(t) = \mathbf{E}(e^{t \times l(Y)})$, pour un $t \geq 0$. Calculer $M(t)$ explicitement en fonction de $t$, des $p_i$ et des $e_i$.

4. Pour $y = (y_1, \dots, y_m)$ où $y_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$, on note $p$ la loi de $Y$, $p(y) = \mathbf{P}(Y = y)$. On définit $q_t(y)$ par,
$$q_t(y) = \frac{e^{t \times l(y)}}{M(t)} p(y).$$
   Vérifier que $q_t$ est la loi d'une variable aléatoire et que
$$q_t(y) = \prod_{i=1}^{m} q_{t,i}^{y_i} (1 - q_{t,i})^{1 - y_i},$$
   les $q_{t,i}$ prenant des valeurs que l'on explicitera.

5. Comment peut on simuler un vecteur aléatoire $Y_t$ selon la loi de $q_t$ ?

6. Si $Y_t$ suit la loi $q_t$, vérifier que, pour toute fonction mesurable bornée$f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$
$$\mathbf{E}(f(Y_t)) = \frac{1}{M(t)} \mathbf{E}(e^{t \times l(Y)} f(Y)).$$

7. On note $\psi$ la fonction définie par $\psi(t) = \mathbf{E}(l(Y_t))$. Montrer que

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i e_i}{p_i + (1-p_i)e^{-te_i}}.$$

   En déduire que $\psi$ est une fonction strictement croissante de $t$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.

   En déduire que, pour tout $c$, $0 < c < \sum_{i=1}^m e_i$, il existe un unique $t_c$ entre $-\infty$ et $+\infty$ tel que $\mathbf{E}(l(Y_{t_c})) = c$. Vérifier que $t_c$ est strictement positif lorsque $c > \sum_{i=1}^m p_i e_i = \mathbf{E}(l(Y))$.

   On va voir dans ce qui suit que l'on peut utiliser cette valeur $t_c$ pour réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo précédente.

8. Montrer que, si $Y_t$ est un vecteur aléatoire de loi $q_t$, on a pour toute fonction $\tilde{f}$ nesurable bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

$$\mathbf{E}(\tilde{f}(Y)) = M(t)\mathbf{E}\left(\tilde{f}(Y_t)e^{-t\times l(Y_t)}\right).$$

   En déduire que $\mathbf{P}(Y > c) = \mathbf{E}\left(Z_t\right)$ où $Z_t = M(t)\mathbf{1}_{\{l(Y_t)\,>\,c\}}e^{-t\times l(Y_t)}$.

   Expliquer comment utiliser cette derniere égalité pour construire une nouvelle méthode de Monte-Carlo. A quelle condition sur $Z_t$ cette méthode est-elle préférable à la méthode de Monte-Carlo classique ?

9. On va maintenant expliciter la variance de $Z_t$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(Z_t^2\right) = M(t)\mathbf{E}\left(e^{-t\times l(Y)}\mathbf{1}_{\{l(Y)\,>\,c\}}\right).$$

10. Vérifier que $\frac{d}{dt}M(t) = M(t)\mathbf{E}(l(Y_t))$, puis que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Var}(Z_t) = M(t)\mathbf{E}\left(\{\mathbf{E}\left(l(Y_t)\right) - l(Y)\}\,\mathbf{1}_{\{l(Y)\,>\,c\}}e^{-t\times l(Y)}\right).$$

   Lorsque $c > \sum_{i=1}^m p_i e_i$, en déduire que sur l'intervalle $[0, t_c]$, la variance de $Z_t$ est décroissante.

   Comment utiliser ce résultat pour proposer une méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbf{P}(L > c)$?

## Partie 2 : Ordre convexe entre deux diffusions via leurs schémas d'Euler

Soit $T > 0$ un horizon de temps. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $W_t$ à valeurs $\mathbf{R}^d$. On se donne également des coefficients $\sigma$ : $[0,T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : [0,T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ mesurables et qui vérifient

$$\text{(Lip) } \exists \mathrm{K} < \infty,\ \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}],\ \begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}^n,\ |\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1+|x|) \\ \forall x,y \in \mathbf{R}^n,\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y| \end{cases}.$$

On s'intéresse à l'Équation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t,X_t)dW_t + b(t,X_t)dt,\ t \in [0,T] \\ X_0 = z \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

1. Quel résultat assure l'existence d'une unique solution $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ à (44)?

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N+1}$ et $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ l'instant de cette grille uniforme qui précède $t \in [0,T]$.

2. Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(X^N_t)_{t\in[0,T]}$ de pas $T/N$.

3. Rappeler le résultat de convergence forte de ce schéma.

Pour $x_{0:N} \in \mathbf{R}^{N+1}$ on note $\mathcal{L}_N[x_{0:N}]$ la fonction définie par

$$\forall t \in [0,T],\ \mathcal{L}_N[x_{0:N}](t) = \left(1 - \frac{N}{T}(t-\tau_t)\right) x_{\lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor} + \frac{N}{T}(t-\tau_t) x_{1+\lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor}.$$

Enfin, pour $k \in \{0,\dots,N\}$, on note $X_{t_{0:k}} = (X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ et $X^N_{t_{0:k}} = (X^N_{t_0}, X^N_{t_1}, \dots, X^N_{t_k})$.

4. Montrer que $\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{L}_N[X_{t_{0:N}}](t) - X_t| \leq \sup_{s,t\in[0,T]:|t-s|\leq T/N} |X_s - X_t|$ et en déduire que $\mathbf{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{L}_N[X_{t_{0:N}}](t) - X_t|]$ tend vers 0 lorsque $N \to \infty$.

5. Montrer que pour $x_{0:N}, y_{0:N} \in \mathbf{R}^{N+1}$, $\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{L}_N[x_{0:N}](t) - \mathcal{L}_N[y_{0:N}](t)| = \max_{0\leq k\leq N} |x_k - y_k|$. En déduire que $\mathbf{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{L}_N[X^N_{t_{0:N}}](t) - X_t|]$ tend vers 0 lorsque $N \to \infty$.

6. Conclure que pour toute fonctionnelle $\Phi : \mathcal{C}([0,T], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ lipschitzienne sur l'espace $\mathcal{C}([0,T], \mathbf{R})$ des fonctions $g$ continues de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $\sup_{t\in[0,T]} |g(t)|$, $\mathbf{E}[\Phi(\mathcal{L}_N[X^N_{t_{0:N}}])]$ tend vers $\mathbf{E}[\Phi(X)]$ lorsque $N \to \infty$.

On se place désormais en dimension $\boxed{n = d = 1}$ et on suppose que le coefficient de dérive $b$ est nul, et que pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sigma(t,x)$ est convexe **et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$**.
Soit $\Phi_N : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe à croissance affine. Pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$, et $(x_{0:k}, u) \in \mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}$ avec $x_{0:k} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, on définit par récurrence descendante $\Psi_k(x_{0:k}, u) = \mathbf{E}[\Phi_{k+1}(x_{0:k}, x_k + u(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))]$ et $\Phi_k(x_{0:k}) = \Psi_k(x_{0:k}, \sigma(t_k, x_k))$.

7. Vérifier que pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$, $\mathbf{E}[\Phi_{k+1}(X^N_{t_{0:k+1}})|X^N_{t_{0:k}}] = \Phi_k(X^N_{t_{0:k}})$. En déduire que $\Phi_0(z) = \mathbf{E}\left[\Phi_N(X^N_{t_{0:N}})\right]$.

8. Vérifier que pour $x_{0:k} \in \mathbf{R}^{k+1}$ et $0 \leq u \leq v$,

$$\Psi_k(x_{0:k}, v) = \mathbf{E}[\Phi_{k+1}(x_{0:k}, x_k + u(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \sqrt{v^2 - u^2}(W_{t_{k+2}} - W_{t_k+1}))]$$

et en déduire que si $\Phi_{k+1}$ est convexe alors

$$\forall x_{0:k} \in \mathbf{R}^{k+1},\ \forall 0 \leq u \leq v,\ \Psi_k(x_{0:k}, u) \leq \Psi_k(x_{0:k}, v).$$

9. Vérifier également que la convexité de $\Phi_{k+1}$ entraîne celle de $\Psi_k$.

10. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $\Phi_k$ est convexe. *On pourra comparer* $\Phi_k(\alpha x_{0:k} + (1-\alpha)y_{0:k})$ *à* $\alpha\Phi_k(x_{0:k}) + (1-\alpha)\Phi_k(y_{0:k})$ *avec* $\alpha \in [0,1]$, $x_{0:k}, y_{0:k} \in \mathbf{R}^{k+1}$ .

On note $Y^N$ le schéma d'Euler de pas $\frac{T}{N}$ pour l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \eta(t, Y_t)dW_t,\ Y_0 = z \text{ où } \eta : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ \text{ est telle que}$$

$$\exists K < \infty,\ \forall t \in [0,T],\ \forall x \in \mathbf{R},\ |\eta(t,x)| \leq K(1+|x|) \text{ et } \forall y \in \mathbf{R},\ |\eta(t,x) - \eta(t,y)| \leq K|x-y|.$$

Partant de $\tilde{\Phi}_N = \Phi_N$, on définit par récurrence descendante $\tilde{\Psi}_k(x_{0:k}, u) = \mathbf{E}[\tilde{\Phi}_{k+1}(x_{0:k}, x_k + u(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))]$ et $\tilde{\Phi}_k(x_{0:k}) = \tilde{\Psi}_k(x_{0:k}, \eta(t_k, x_k))$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

11. Montrer que $\tilde{\Phi}_{k+1} \leq \Phi_{k+1}$ entraîne $\tilde{\Psi}_k \leq \Psi_k$.

12. On suppose que $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},\ 0 \leq \eta(t,x) \leq \sigma(t,x)$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $\tilde{\Phi}_k \leq \Phi_k$. En déduire que $\mathbf{E}\left[\Phi_N(Y^N_{t_{0:N}})\right] \leq \mathbf{E}\left[\Phi_N(X^N_{t_{0:N}})\right]$.

13. Soit $\Phi : \mathcal{C}([0,T], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle lipschitzienne et convexe. Montrer que $x_{0:N} \mapsto \Phi(\mathcal{L}_N[x_{0:N}])$ est convexe. En déduire que $\mathbf{E}[\Phi(Y)] \leq \mathbf{E}[\Phi(X)]$. Que peut-on dire de $\mathbf{E}[\Phi(X)]$ comme fonction de la condition initiale $z$ de l'EDS (44)?

14. Comment comparer $\mathbf{E}[\Phi(Y)]$ à $\mathbf{E}[\Phi(X)]$ lorsque $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},\ \eta(t,x) \geq \sigma(t,x)$?

# Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 22 janvier 2019

## Partie 1 : Schéma randomisé pour un coefficient de dérive irrégulier en temps

Soit $T > 0$ un horizon de temps. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $W_t$ à valeurs $\mathbf{R}^d$. On se donne également des coefficients $\sigma : [0,T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : [0,T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ mesurables et qui vérifient

$$(\mathrm{Lip})\ \exists \mathrm{K} < \infty,\ \forall \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}],\ \begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}^n,\ |\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1+|x|) \\ \forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y| \end{cases}.$$

On s'intéresse à l'Équation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt,\ t \in [0,T] \\ X_0 = x_0 \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

1. Quel résultat assure l'existence d'une unique solution à cette équation?

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ et $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ l'instant de cette grille uniforme qui précède $t \in [0,T]$.

2. Écrire le schéma d'Euler sur la grille $(t_k)_{0\leq k\leq N}$.

3. Rappeler le résultat de convergence forte de ce schéma.

On suppose désormais (Lip) et

$$\exists K < \infty,\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T,\ |\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| \leq K(1+|x|)\sqrt{t-s}, \tag{3}$$

mais on ne fait pas d'hypothèse sur la régularité du coefficient de dérive $b$ en la variable temporelle $t$. On se donne $(U_k)_{0\leq k\leq N-1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniquement distribuées sur $[0,1]$ indépendantes de $(W_t)_{t\geq 0}$. On pose $\eta_k = t_k + \frac{T}{N}U_k$ pour $k \in \{0,\ldots,N-1\}$ et on définit le schéma d'Euler avec randomisation de la variable temporelle dans la dérive en posant $\tilde{X}_0^N = x_0$ puis pour $k \in \{0,\ldots,N-1\}$,

$$\tilde{X}^N_{t_{k+1}} = \tilde{X}^N_{t_k} + \sigma(t_k, \tilde{X}^N_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(\eta_k, \tilde{X}^N_{t_k})(t_{k+1} - t_k).$$

4. Quelle est la loi de la suite $(\eta_k)_{0\leq k\leq N-1}$?

5. Montrer que pour $k \in \{0,\ldots,N-1\}$,

   (a)

   $$\mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_{k+1}}|^2\right] = \mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_k}|^2\right] + \frac{T}{N}\mathbf{E}\left[|\sigma(t_k,\tilde{X}^N_{t_k})|^2 + 2\tilde{X}^N_{t_k}.b(\eta_k,\tilde{X}^N_{t_k})\right] + \frac{T^2}{N^2}\mathbf{E}\left[|b(\eta_k,\tilde{X}^N_{t_k})|^2\right],$$

   (b) puis que

   $$\mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_{k+1}}|^2\right] \leq \left(1 + \frac{K(3+2K)T}{N} + \frac{2K^2T^2}{N^2}\right)\mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_k}|^2\right] + \frac{K(1+2K)T}{N} + \frac{2K^2T^2}{N^2}$$

   (c) et enfin que $1 + \mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_{k+1}}|^2\right] \leq \left(1 + \frac{K(3+2K+2KT)T}{N}\right)\left(1 + \mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_k}|^2\right]\right)$.

(d) Conclure que $\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\max_{k\in\{0,\dots,N\}}\mathbf{E}\left[|\tilde{X}^N_{t_k}|^2\right]\leq e^{K(3+2K+2KT)T}(1+|x_0|^2)-1$.

Pour $k\in\{0,\dots,N\}$, on pose $M^N_k=\frac{T}{N}\sum_{\ell=0}^{k-1}b(\eta_\ell,\tilde{X}^N_{t_\ell})-\int_0^{t_k}b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})ds$ (Convention : $M^N_0=0$) et $\mathcal{G}^N_k=\mathcal{F}_{t_k}\vee\sigma(\eta_\ell,0\leq\ell\leq k-1)$.

6. (a) Montrer que $(M^N_k)_{k\in\{0,\dots,N\}}$ est une $\mathcal{G}^N_k$-martingale de carré intégrable.

   (b) Calculer $\langle M^N\rangle_k$ pour $k\in\{0,\dots,N\}$.

   (c) En déduire à l'aide de l'inégalité de Doob que

$$\mathbf{E}\left[\max_{k\in\{0,\dots,N\}}|M^N_k|^2\right]\leq 4\left(\frac{T}{N}\int_0^T\mathbf{E}[|b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})|^2]ds-\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{E}\left[\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})ds\right|^2\right]\right).$$

   (d) Conclure que $\sup_{N\in\mathbb{N}^*}N\mathbf{E}\left[\max_{k\in\{0,\dots,N\}}|M^N_k|^2\right]<\infty$.

Pour $t\in[0,T]$, on pose $\hat{X}^N_t=x_0+\int_0^t\sigma(\tau_s,\tilde{X}^N_{\tau_s})dW_s+\int_0^t b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})ds$.

7. (a) Que peut-on dire de $C:=\sup_{N\in\mathbb{N}^*}N\mathbf{E}\left[\max_{k\in\{0,\dots,N\}}|\hat{X}^N_{t_k}-\tilde{X}^N_{t_k}|^2\right]$?

   (b) Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,t]}|X_u-\hat{X}^N_u|^2\right]\leq 2\int_0^t 4\mathbf{E}[|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\tilde{X}^N_{\tau_s})|^2]+t\mathbf{E}[|b(s,X_s)-b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})|^2]ds$$

   (c) Vérifier que

$$\mathbf{E}[|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\tilde{X}^N_{\tau_s})|^2]\leq 4K^2\Bigg(\mathbf{E}[|X_s-X_{\tau_s}|^2]+(s-\tau_s)\mathbf{E}[(1+|X_{\tau_s}|)^2]$$
$$+\mathbf{E}[|X_{\tau_s}-\hat{X}^N_{\tau_s}|^2]+\frac{C}{N}\Bigg).$$

   (d) Comment majorer $\mathbf{E}[|b(s,X_s)-b(s,\tilde{X}^N_{\tau_s})|^2]$?

   (e) En déduire que $\sup_{N\in\mathbb{N}^*}N\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t-\hat{X}^N_t|^2\right]<\infty$.

   (f) Quel est l'ordre de convergence forte du schéma $(\tilde{X}^N_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$? Comment se dégrade-t-il si on suppose seulement $\sigma$ höldérienne d'ordre $\alpha\in]0,1/2[$ en la variable temporelle $t$ (i.e. $\sqrt{t-s}$ est remplacé par $(t-s)^\alpha$ au membre de droite de (2))?

   (g) Pourquoi la randomisation du coefficient de diffusion ne conduit-elle pas au même ordre de convergence forte sous l'hypothèse (Lip)?

## Partie 2 : Réduction de variance vectorielle

**Préliminaires.** On suppose que $(U_1, U_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes de lois données.

1. Décrire la méthode de Monte-Carlo classique permettant de calculer $\mathbf{P}(U_1 \leq U_2)$ à l'aide de tirages indépendants selon la loi de $(U_1, U_2)$ et expliquer comment l'on peut estimer l'erreur commise à l'issue de $n$ tirages.

On considère une variable réelle $X$, de carré intégrable, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$. On pose $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$.

2. Montrer que $\text{Var}(Y) \leq \text{Var}(X)$.

3. On note $X = \mathbf{1}_{\{U_1 \leq U_2\}}$. Calculer $Y = \mathbf{E}(X|U_1)$ à l'aide de la fonction de répartition $F_2$ de $U_2$, supposée explicite. Expliquer comment l'on peut utiliser ce calcul pour construire un estimateur de variance réduite de $\mathbf{P}(U_1 \leq U_2)$ n'utilisant que des tirages indépendants selon la loi de $U_1$ .

**Matrice de covariance d'un vecteur conditionné.** On considère maintenant un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ et une tribu $\mathcal{B}$. On suppose que les $X_i$ sont de carré intégrable et l'on appelle $\Gamma(X)$ la matrice de variance-covariance de $X$

$$\Gamma(X)_{i,j} = \text{Cov}\,(X_i, X_j).$$

On définit le vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ en posant, pour tout $i$, $1 \leq i \leq d$, $Y_i = \mathbf{E}(X_i|\mathcal{B})$.

4. Montrer que les coordonnées de $Y$ sont de carré intégrable et que pour tout vecteur $\lambda \in \mathbf{R}^d$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i Y_i\right) \leq \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i\right).$$

   On note $\Gamma(Y)$ la matrice de variance-covariance de $Y$. En déduire que $\Gamma(Y) \leq \Gamma(X)$ où sens des matrices définies positives, ce qui signifie, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^d$,

$$\lambda \cdot \Gamma(Y)\lambda \leq \lambda \cdot \Gamma(X)\lambda,$$

   où l'on a noté $x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^d$.

**La méthode "Delta".** On considère une fonction $f$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta)$ existent pour $i = 1, \ldots, d$ et vérifiant de plus[1] que

$$f(x) = f(\theta) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - \theta_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta) + o(x - \theta),$$

avec $|o(h)| \leq |h|\epsilon(h)$ et $\lim_{|h| \to 0} \epsilon(h) = 0$.

On suppose que $(Z_n, n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires de $\mathbf{R}^d$ convergeant presque sûrement vers $\theta$, un vecteur de $\mathbf{R}^d$, telle que $\sqrt{n}(Z_n - \theta)$ converge en loi vers un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\Gamma$.

[1] Cette hypothèse signifie que $f$ est différentiable au point $\theta$, ce qui est plus exigeant que la seule existence des dérivées partielles en ce point.

5. Montrer que, si l'on note $\nabla f(\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta), 1 \leq i \leq d\right)$.
$$\sqrt{n}\,(f(Z_n) - f(\theta)) = \nabla f(\theta) \cdot \sqrt{n}\,(Z_n - \theta) + R_n,$$
où $|R_n| \leq |\sqrt{n}(Z_n - \theta)|\epsilon(Z_n - \theta)$, puis, en utilisant le lemme de Slutzky, prouver que $R_n$ tend en loi vers 0.

6. En déduire que $\sqrt{n}\,(f(Z_n) - f(\theta))$ tend en loi vers une gaussienne de moyenne nulle et de variance $\nabla f(\theta) \cdot \Gamma\, \nabla f(\theta)$.

**Une application.** Soit $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ une suite de couple de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi du couple $(X, Y)$. $A$ et $B$ sont deux sous ensemble de $\mathbf{R}$. On cherche à calculer $\mathbf{P}(X \in A)/\mathbf{P}(Y \in A)$ par une méthode de type Monte-Carlo.

7. Quelle est la limite presque sûre du quotient $Q_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}} / \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \in B\}}$?

8. On considère la suite de variables aléatoires de $\mathbf{R}^2$
$$Z_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \in B\}}\right).$$
On pose $p_A = \mathbf{P}(X \in A)$ et $p_B = \mathbf{P}(Y \in B)$ et $\theta = (p_A, p_B)$. Montrer en appliquant le théorème de la limite centrale multidimensionnel (voir la question 15 pour un énoncé et une preuve) que $\sqrt{n}(Z_n - \theta)$ tend vers un vecteur gaussien centré de matrice de variance covariance $\Gamma_1$ que l'on calculera en fonction de $p_A$, $p_B$ et $p_{AB} = \mathbf{P}(X \in A, Y \in B)$.

9. En déduire, en utilisant la question 6, la convergence en loi de $\sqrt{n}(Q_n - p_A/p_B)$ vers une gaussienne de variance $\sigma_1^2 = \lambda_0 \cdot \Gamma_1 \lambda_0$, avec $\lambda_0 = (1/p_B, -p_A/p_B^2)$.

10. Comment peut on utiliser en pratique ce résultat pour estimer l'erreur commise lorsque l'on approxime $p_A/p_B$ par $Q_n$ ?

11. Soit $T$ une variable aléatoire, alors, il existe deux fonctions $f_X$ et $f_Y$ telles que $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{X \in A\}}|T\right) = f_X(T)$ et $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{Y \in B\}}|T\right) = f_Y(T)$. On suppose que $f_X$ et $f_Y$ se calculent explicitement et l'on considère une suite $(T_n, n \geq 1)$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de $T$. Quelle est la limite presque sûre de $\bar{Q}_n = \sum_{i=1}^n f_X(T_i)/\sum_{i=1}^n f_Y(T_i)$ ?

12. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{Q}_n - p_A/p_B)$ tend vers une gaussienne dont on calculera la variance $\sigma_2^2$ à l'aide de $\lambda_0$ et de la matrice de variance-covariance $\Gamma_2$ du couple $(f_X(T), f_Y(T))$.

13. En utilisant le résultat de la question 4, comparer $\sigma_1$ et $\sigma_2$ et expliquez pourquoi cette deuxième méthode est préférable pour calculer $p_A/p_B$.

**Rappel: Théorème de la limite centrale multidimensionnel.**
Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de vecteurs aléatoires de même loi que $Z = (Z^1, \ldots, Z^d)$. On suppose que $Z$ est de carré intégrable (i.e. $\mathbf{E}(|Z|^2) < +\infty$), que le vecteur $\mathbf{E}(Z) = 0$ et l'on note $\Gamma_Z$ la matrice de variance-covariance du vecteur $Z$.

14. Montrer, en utilisant le théorème de la limite centrale dans $\mathbf{R}$, que pour, tout $\lambda$ de $\mathbf{R}^d$ et pour tout $u$ réel
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}(\lambda\cdot Z_1 + \cdots + \lambda\cdot Z_n)}\right) = e^{-\frac{u^2}{2}\lambda\cdot\Gamma_Z\lambda}.$$

15. En déduire que les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ convergent en loi vers un vecteur gaussien centrée de matrice de variance-covariance $\Gamma_Z$. Étendre le résultat au cas où $\mathbf{E}(Z) \neq 0$.

# Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 23 janvier 2018

## Partie I : Biaisage de loi

Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que pour un $t_0 > 0$, si $t < t_0$, $\mathbf{E}\left(e^{t|X|}\right) < +\infty$. On note

$$M_t = \mathbf{E}\left(e^{tX}\right). \tag{4}$$

1. Vérifier que cette hypothèse est vérifiée pour une variable aléatoire $X$ gaussienne centrée réduite avec $t_0 = +\infty$. Que vaut alors $M_t$ ?

   Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi gamma de densité $p(\lambda, \alpha, x)$

   $$p(\lambda, \alpha, x) = \mathbf{1}_{\{x > 0\}} x^{\alpha-1} \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}.$$

   où $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$. Calculer $\mathbf{E}(e^{tX})$ pour $t < \lambda$. Que vaut $\mathbf{E}(e^{\lambda X})$ ?

Sous l'hypothèse (3) on définit, pour $t < t_0$, une mesure $\mu_t$ par, pour $f$ est une fonction mesurable et positive

$$\mu_t(f) = \frac{\mathbf{E}(e^{tX} f(X))}{M_t}.$$

$\mu_t$ est alors une mesure positive de masse totale $1$ sur $\mathbf{R}$ (autrement dit une loi de probabilité).

2. Soit $Y^{(t)}$ une variable aléatoire de loi $\mu_t$ sous $\mathbf{P}$ (On a donc, pour $f$ mesurable et positive $\mathbf{E}(f(Y^{(t)})) = \frac{\mathbf{E}(e^{tX} f(X))}{M_t}$). Montrer que pour $0 \leq t < t_0$, $\mathbf{E}(|Y^{(t)}|) < +\infty$, puis vérifier que $t \to \mathbf{E}(Y^{(t)})$ est une fonction différentiable dont la dérivée vaut

   $$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(Y^{(t)}) = \frac{\mathbf{E}(e^{tX} X^2)\mathbf{E}(e^{tX}) - \mathbf{E}(e^{tX} X)^2}{\mathbf{E}(e^{tX})^2}.$$

   En déduire que $t \to \mathbf{E}(Y^{(t)})$ est une fonction croissante.

La loi $\mu_t$ n'est pas toujours facile à simuler. Voici, toutefois, deux cas où les choses se passent bien.

3. Quelle est la loi de $Y^{(t)}$ lorsque $X$ suit une loi gaussienne centrée réduite ? Comment simuler $Y^{(t)}$ dans ce cas ?

4. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi gamma de densité $p(\lambda, \alpha, x)$. Quelle est la loi de $Y^{(t)}$, pour $t < \lambda$ ?

   Comment simuler cette loi lorsque $\alpha = 1$ et plus généralement lorsque $\alpha$ est un réel arbitraire.

On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ suivant la loi de $X$. On pose $S_n^X = X_1 + \cdots + X_n$ et l'on cherche à calculer

$$\theta = \mathbf{P}\left(S_n^X \geq a\right).$$

pour une valeur de $a$ telle que $\theta$ est de l'ordre de $10^{-12}$.

5. Quel est l'ordre de grandeur du nombre $N$ de tirages du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ nécessaires pour obtenir un précision relative de $50\%$ sur l'estimation de $\theta$ par une méthode de Monte-Carlo?

On va (donc) chercher à améliorer la méthode ...

6. Pour $t < t_0$ et $Y^{(t)}$ une variable aléatoire de loi $\mu_t$ sous $\mathbf{P}$, vérifier que pour toute fonction $g$ mesurable, positive $\mathbf{E}\left(g(X)\right) = M_t \mathbf{E}\left(e^{-tY^{(t)}} g(Y^{(t)})\right)$.

7. Pour un $t < t_0$, on considére $n$ variables aléatoires $(Y_1^{(t)}, \ldots, Y_n^{(t)})$ indépendantes suivant la loi $\mu_t$ sous une probabilité $\mathbf{P}$. On note $S_n^{Y^{(t)}} = Y_1^{(t)} + \cdots + Y_n^{(t)}$. Montrer que pour toute fonction $F$ de la forme $f_1(x_1) \times \cdots \times f_n(x_n)$ où les $f_i$ sont mesurables et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\left(F(X_1, \ldots, X_n)\right) = M_t^n \mathbf{E}\left(F(Y_1^{(t)}, \ldots, Y_n^{(t)}) e^{-tS_n^{Y^{(t)}}}\right).$$

On admettra que cette égalité se généralise à toute fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ mesurable bornée de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

8. En déduire que : $\theta = \mathbf{P}\left(S_n^X \geq a\right) = M_t^n \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{S_n^{Y^{(t)}} \geq a\right\}} e^{-tS_n^{Y^{(t)}}}\right)$.

   On note $Z_t$ la variable aléatoire $Z_t = \mathbf{1}_{\left\{S_n^{Y^{(t)}} \geq a\right\}} M^n(t) e^{-tS_n^{Y^{(t)}}}$. Comment utiliser $Z_t$ pour mettre en œuvre une méthode de Monte-Carlo, permettant de calculer $\theta$, possiblement plus efficace ? Quel critère doit-on utiliser pour choisir $t$ de façon optimale pour cette méthode ?

**On suppose dans la suite** que[2] $\mathbf{E}(X) < a/n$ et que[3] $a/n < \mathbf{E}(Y^{(t_0)})$.

9. Vérifier que $\text{Var}(Z_t) \leq (M_t^n e^{-ta})^2 - \theta^2$. En minimisant la partie de droite de l'inégalité précédente, montrer qu'un choix raisonnable pour $t$ est donné par la solution unique $t_c$ dans l'intervalle $]0, t_0[$ de l'équation

$$\mathbf{E}(Y^{(t)}) = \frac{\mathbf{E}(e^{tX} X)}{\mathbf{E}(e^{tX})} = \frac{a}{n}.$$

10. Montrer que, pour tout $t < t_0$, $\text{Var}(Z_t) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{S_n^X \geq a\right\}} M_t^n e^{-tS_n^X}\right) - \theta^2$, et que $\text{Var}(Z_t)$ admet une dérivée donnée par

$$\frac{d}{dt}\text{Var}(Z_t) = M_t^n \ \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\left\{S_n^X \geq a\right\}} e^{-tS_n^X} \left[n\mathbf{E}(Y^{(t)}) - S_n^X\right]\right\}.$$

11. En déduire que $\frac{d}{dt}\text{Var}(Z_t) \leq 0$ pour $0 \leq t \leq t_c$ où $t_c$ est la solution unique de $\mathbf{E}(Y^{(t_c)}) = a/n$. As t'on intérêt à utiliser des valeurs de $t < t_c$ pour mettre en œuvre la méthode de Monte-Carlo proposée?

12. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si l'on remplace $\mathbf{1}_{\left\{S_n^X \geq a\right\}}$ par $H(S_n^X)$ où $H$ est une fonction qui s'annule sur l'ensemble $\{x < a\}$ (exemple: $H(x) = (x-a)_+$).

13. En supposant que $\mathbf{E}(Y^{(t)})$ se calcule explicitement et sans chercher à en prouver la convergence, proposer un algorithme stochastique permettant de résoudre l'équation d'Euler pour la minimisation de la variance, c'est à dire:

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\left\{S_n^X \geq a\right\}} M_t^n e^{-tS_n^X} \left[n\mathbf{E}(Y^{(t)}) - S_n^X\right]\right\} = 0.$$

[2]Hypothèse naturelle lorsque $\theta$ est supposé petit.

[3]Ceci est vrai lorsque, $\mathbf{E}(Y^{(t_0)}) = +\infty$, hypothèse vérifiée pour les deux exemples précédents.

## Partie II : Comparaison des variances asymptotiques dans le théorème ergodique pour les chaînes de Markov

Sur l'espace d'état $E$ muni de la tribu $\mathcal{E}$, on se donne une mesure de probabilité $\pi$.

1. On suppose dans cette question que $P_0$ et $P_1$ sont deux noyaux markoviens sur $(E, \mathcal{E})$ qui laissent $\pi$ invariante et que
$$\forall A \in \mathcal{E},\ \forall x \notin A,\ P_0(x, A) \geq P_1(x, A). \tag{5}$$
Soit $g : E \to \mathbf{R}$ mesurable et telle que $\pi(g^2) < \infty$.

   (a) Pour $i \in \{0, 1\}$, montrer que $\pi(P_i|g|) \leq \sqrt{\pi(g^2)}$ et en déduire que $\pi(dx)$ p.p., $P_i g(x)$ est bien défini. Montrer que $\pi(dx)$ p.p., $(P_i g(x))^2 \leq P_i g^2(x)$ et en déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\pi(|g(P_i g)|) \leq \pi(g^2)$. Conclure que $\pi(|g(P_0 g - P_1 g)|) < \infty$.

   Soit $P(x, dy) = \delta_x(dy) + P_0(x, dy) - P_1(x, dy)$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $A \in \mathcal{E}$, $P(x, A) \geq 0$ et en déduire que $P$ est un noyau markovien sur $(E, \mathcal{E})$.

   (c) Vérifier que $\pi$ est invariante par $P$. En déduire que
$$\int_E g^2(x)\pi(dx) = \frac{1}{2}\int_{E\times E} (g^2(x) + g^2(y))\pi(dx)P(x, dy).$$

   (d) Remarquer que $\pi(g(P_1 g - P_0 g)) = \int_{E\times E} g(x)g(y)\pi(dx)(\delta_x(dy) - P(x, dy))$ et en déduire que
$$\pi(g(P_1 g - P_0 g)) = \frac{1}{2}\int_{E\times E} (g(x) - g(y))^2 \pi(dx)P(x, dy).$$
   Conclure que
$$\forall g : E \to \mathbf{R} \text{ mesurable et t.q. } \pi(g^2) < \infty,\ \pi(g(P_1 g - P_0 g)) \geq 0. \tag{6}$$

2. On suppose que $\pi(dx) = \frac{\eta(x)\lambda(dx)}{\int_E \eta(y)\lambda(dy)}$ où $\lambda$ est une mesure de référence sur $(E, \mathcal{E})$ et $\eta$ une fonction mesurable de $E$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\int_E \eta(x)\lambda(dx) \in ]0, \infty[$. Soit $q : E \times E \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\forall x \in E$, $\int_E q(x, y)\lambda(dy) = 1$ et on sait simuler suivant la probabilité $q(x, y)\lambda(dy)$. On pose
$$P_1(x, dy) = \alpha(x, y)q(x, y)\lambda(dy) + \left(\int_{E\setminus\{x\}} (1 - \alpha(x, z))q(x, z)\lambda(dz)\right)\delta_x(dy)$$
$$\text{où } \alpha(x, y) = \begin{cases} a\left(\frac{\eta(y)q(y,x)}{\eta(x)q(x,y)}\right) \text{ si } \eta(x)q(x, y) > 0 \\ 1 \text{ si } \eta(x)q(x, y) = 0 \end{cases},$$
pour une fonction $a : \mathbf{R}_+ \to [0, 1]$ mesurable vérifiant $a(0) = 0$ et $\forall u > 0,\ a(u) = ua(1/u)$.

   (a) Quel est le choix de Metropolis-Hastings pour la fonction $a$?

   On note $\alpha_0(x, y)$ et $P_0(x, dy)$ la probabilité d'acceptation de la proposition et le noyau markovien obtenus pour ce choix.

   (b) Verifier que pour $u > 0$, $a(u) \leq \min(1, u)$ et en déduire que pour tous $x, y \in E$, $\alpha(x, y) \leq \alpha_0(x, y)$. Conclure que (4) est vérifiée.

3. On suppose maintenant que $\pi$ est réversible pour les noyaux $P_0$ et $P_1$ qui vérifient (5). Pour $t \in [0,1]$, on note $P_t = tP_1 + (1-t)P_0$.

   (a) Montrer que $\pi$ est réversible pour le noyau $P_t$. En déduire que pour $g, h : E \to \mathbf{R}$ mesurables et telles que $\pi(g^2 + h^2) < \infty$, $\pi(g(P_t h)) = \pi(h(P_t g))$.

   Soit $f : E \to \mathbf{R}$ mesurable. On suppose qu'il existe une unique fonction $F_t : E \to \mathbf{R}$ telle que $\pi(F_t^2) < \infty$ et $\pi(F_t) = 0$ solution de l'équation de Poisson

   $$F_t - P_t F_t = f - \pi(f) \tag{7}$$

   et que la variance asymptotique de l'estimateur ergodique $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k^t)$ de $\pi(f)$ reposant sur la chaîne de Markov $(X_k^t)_{k\in\mathbf{N}}$ de noyau de transition $P_t$ est $\sigma_t^2(f) = \pi(F_t^2) - \pi((P_t F_t)^2)$. On suppose également que $F_t$ est dérivable par rapport à $t$ et que tous les échanges de dérivées avec des intégrales sont justifiés dans ce qui suit[4].

   (b) Vérifier que $F_t^2 - (P_t F_t)^2 = (f - \pi(f))(2F_t - f + \pi(f))$.
   En déduire que $\frac{d\sigma_t^2(f)}{dt} = 2\pi\left((f-\pi(f))\frac{dF_t}{dt}\right) = 2\pi\left(F_t\left(\frac{dF_t}{dt} - P_t\frac{dF_t}{dt}\right)\right)$.

   (c) En dérivant (6), vérifier que $\frac{dF_t}{dt} - P_t\frac{dF_t}{dt} = P_1 F_t - P_0 F_t$.

   (d) Conclure que $\frac{d\sigma_t^2(f)}{dt} \geq 0$ puis que $\sigma_1^2(f) \geq \sigma_0^2(f)$.

[4] Une condition suffisante est

$$\exists V : E \to \mathbf{R}_+ \text{ mesurable t.q. } \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < \infty \text{ et } \exists K \in \mathbf{R}_+,\ \exists \gamma \in ]0,1[,\ \forall x \in E,\ P_0V \vee P_1V(x) \leq \gamma V(x) + K,$$

$$\exists R > \frac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2},\ \exists \alpha \in ]0,1],\ \forall x, y \text{ t.q. } V(x)+V(y) \leq R,\ (P_0(x,.) \wedge P_0(y,.)(E)) \wedge (P_1(x,.) \wedge P_1(y,.)(E)) \geq \alpha.$$

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 24 janvier 2017 8h30-11h30

## Partie I : Annulation du biais d'une suite d'estimateur

On se donne une variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de carré intégrable.

1. On suppose, tout d'abord, que l'on sait simuler exactement la variable aléatoire $Y$. Pour un $\epsilon$ réel positif, montrer que le nombre $N(\epsilon)$ de tirages aléatoires de $Y$ indépendants permettant d'obtenir (avec une grande probabilité) une approximation de $\mathbf{E}(Y)$ avec une erreur d'environ $\epsilon$ croit comme Cte$/\epsilon^2$.

On suppose maintenant que l'on ne sait pas simuler exactement $Y$ mais seulement qu'il existe une suite de variables aléatoires de carré intégrable $(Y_n, n \geq 0)$ facilement simulables[5] telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left((Y_n - Y)^2\right) = 0. \tag{8}$$

2. Montrer que le biais $b_n = \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y_n)$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}((Y_n - Y)Y) = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n^2) = \mathbf{E}(Y^2)$ et en conclure que $\lim_{n\to+\infty} \text{Var}(Y_n) = \text{Var}(Y)$.

3. On se place dans un cas où l'on a une estimation a priori du biais du type $|b_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 0$. On choisit un $n > 0$ et le nombre de tirage $N$, $(Y_n^1, \ldots, Y_n^N)$, selon la loi de $Y_n$. On approxime $\mathbf{E}(Y)$ par $\bar{Y}^{n,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_n^i$. Montrer que, pour $N$ grand, avec une probabilité proche de 1, on a

$$|\bar{Y}^{n,N} - \mathbf{E}(Y)| \leq R(n,N) := \frac{C}{n^\alpha} + 2\frac{K}{\sqrt{N}}.$$

4. On prend comme mesure de l'erreur $R(n,N)$ et l'on suppose que le coût de $N$ tirages selon la loi de $Y_n$ est donné par Coût$(n,N) = C_1 nN$. On s'impose une contrainte sur le coût total du calcul $C_{\text{total}}$. On s'intéresse à l'erreur minimale $R(n,N)$ que l'on peut obtenir sous la contrainte de coût Coût$(n,N) = C_{\text{total}}$, définie par :

$$\text{Error}(C_{\text{total}}) = \min_{n,N,\text{Cost}(n,N)=C_{\text{total}}} R(n,N)$$

   Montrer que Error$(C_{\text{total}}) = \text{Cte} \times C_{\text{total}}^{-\frac{\alpha}{2\alpha+1}}$. En déduire que le coût minimal nécessaire pour obtenir une précision $\epsilon$ croît comme Cte $\times\, \epsilon^{-\frac{2\alpha+1}{\alpha}}$. En comparant avec le résultat de la question 1, expliquer en quoi la présence du biais dégrade la performance de l'algorithme de simulation.

**Comment se débarasser du biais ?** Nous allons voir que l'on peut construire, à partir de la suite $(Y_n, n \geq 0)$ une variable aléatoire simulable et sans biais $\tilde{Y}$ (c'est-à-dire telle que $\mathbf{E}() = \mathbf{E}(Y)$) au prix toutefois d'une augmentation de la variance.
On considère, pour cela, une variable aléatoire $\tau$ à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ *indépendant* de la suite $(Y_n, n \geq 0)$ dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}(\tau = n) = p_n, \text{ avec } p_n > 0 \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{9}$$

On note $\Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$, pour $n \geq 1$ (lorsque $n = 1$, on pose $Y_0 = 0$). On définit $\tilde{Y}$ par

$$\tilde{Y} = \frac{\Delta Y_\tau}{p_\tau} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Delta Y_n}{p_n} \mathbf{1}_{\{\tau = n\}}.$$

[5] C'est le cas lorsque l'on discrétise une équation différentielle stochastique.

5. Montrer que, sous l'hypothèse (8), $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{E}(|\Delta Y_n|)$. En déduire que lorsque $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) < +\infty$, on a $\mathbf{E}(\tilde{Y}|Y_n, n \geq 1) = Y$ et $\mathbf{E}(\tilde{Y}) = \mathbf{E}(Y)$.

6. Donner un exemple de suite *déterministe* $(\Delta Y_n, n \geq 1)$ où $Y = \sum_{n\geq 1} \Delta Y_n$ converge mais où $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) = +\infty$, pour tout choix de $p$ vérifiant l'hypothèse (8).

7. Montrer que l'on a
$$\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbf{E}\left((\Delta Y_n)^2\right)}{p_n},$$
et que lorsque $\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) < +\infty$, Var$(\tilde{Y}) \geq$ Var$(Y)$.

8. On cherche à approximer $\mathbf{E}(Y)$ où $Y = f(X_T)$ et $Y_n = f(X_T^{(n)})$ où $X$ une solution d'une EDS et $X^{(n)}$ son approximation par un schéma d'Euler de pas $h_n = 1/2^n$. Montrer (en supposant les coefficients de l'EDS et $f$ aussi réguliers que souhaité) que $\mathbf{E}\left(\left|f(X_T^{(n)}) - f(X_T)\right|^2\right) \leq C\rho^n$, $\rho$ étant un réel positif inférieur à $1$ que l'on précisera. En déduire que $\mathbf{E}((\Delta Y_n)^2) \leq 4C\rho^n$.

   Par ailleurs le coût d'une simulation de $Y_n$ est donné par Cte $\times\, 2^n$. Montrer que, si l'on néglige le temps de simulation de $\tau$, le coût moyen d'une simulation de $\tilde{Y}$ est proportionnel à $\sum_{n\geq 1} p_n 2^n$.

9. On suppose que, comme dans l'exemple précédent, $\mathbf{E}\left((\Delta Y_n)^2\right) \leq C\rho^n$, avec $\rho < 1$ et que le coût d'une simulation de $Y_n$ est donné par par $c\alpha^n$ avec $\alpha > 1$.

   On suppose enfin que la loi de $\tau$ est une loi géométrique[6] de paramètre $q$ avec $0 < q < 1$ (on note $q' = 1 - q$). Vérifier que, si $q' > \rho$, $\mathbf{E}((\tilde{Y})^2) < +\infty$ et que :
$$\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) \leq \frac{C\rho q'}{q(q' - \rho)}.$$

   Par ailleurs, montrer que le coût moyen d'une simulation de $\tilde{Y}$, $C_{\text{moy}} = \mathbf{E}(c\alpha^\tau)$, est fini lorsque $\alpha q' < 1$ et qu'il alors égal à $c\alpha q/(1 - \alpha q')$.

   En supposant[7] que la performance de la simulation est mesurée par le produit $\mathbf{E}(C_{\text{moy}}) \times \mathbf{E}((\tilde{Y})^2)$ montrer que l'on doit avoir $\rho\alpha < 1$ pour espérer obtenir une méthode efficace et que, dans ce cas, le meilleur choix de $q'$ est $q' = \sqrt{\rho/\alpha}$.

## Partie II : Théorème de Wong-Zakai

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ de dimension $d$. Pour un horizon $T \in ]0, +\infty[$ et un nombre $N \in \mathbf{N}^*$ de pas, on considère la grille uniforme $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$. Pour discrétiser la solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x_0 \tag{10}$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont supposées lipschitziennes, on peut être tenté d'approcher la trajectoire brownienne par interpolation linéaire sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ en posant $W_t^N = W_{t_k} + \frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k)$ puis de résoudre

$$dX_t^N = \sigma(X_t^N)dW_t^N + b(X_t^N)dt,\ X_0^N = x_0. \tag{11}$$

[6] i.e. pour tout $n \geq 1$, $p_n = q(1 - q)^n$.

[7] Voir, pour des élèments de justification, *Glynn P.W., Whit W., 1992, The asymptotic efficiency of simulation estimators, Oper. Res. 40(3):505-520.*

1. Vérifier que pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $(X_t^N)_{t\in[t_k,t_{k+1}]}$ satisfait une équation différentielle ordinaire et en déduire que (10) admet une unique solution.

On se place d'abord en dimension $n = d = 1$.

2. On suppose en outre que $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ est $C^1$ et $b \equiv 0$ et on pose $\varphi(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sigma(y)}$.
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi(X_{t_k}^N) = W_{t_k}$ et en déduire que $X_T^N$ ne dépend pas de $N$. On note $Y_T$ cette valeur.
   (b) Dans le cas $\sigma(x) \equiv x$, calculer $\varphi$ et vérifier que $Y_T \neq X_T$. En déduire que le procédé d'approximation ne converge pas vers la solution de (9).
   (c) Calculer $(\varphi^{-1})'$ et $(\varphi^{-1})''$. En déduire que $(Y_t = \varphi^{-1}(W_t))_{t\in[0,T]}$ est solution de l'EDS $dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0$.

3. On suppose que le processus d'Itô $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est solution de l'EDS au sens de Stratonovitch

$$dY_t = \sigma(Y_t) \circ dW_t + b(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0 \tag{12}$$

   où, pour un processus d'Itô $(H_s)_{s\in[0,T]}$ et $t \in [0, T]$, on définit l'intégrale de Stratonovitch $\int_0^t H_s \circ dW_s$ comme la limite en probabilité lorsque $n \to \infty$ de $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_{t_{k+1}}+H_{t_k}}{2}(W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k\wedge t})$. La fonction $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est supposée $C^2$ avec $\sigma\sigma'$ lipschitzienne.
   (a) Quelle est la limite en probabilité de $\sum_{k=0}^{N-1} H_{t_k}(W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k\wedge t})$? En déduire que $\int_0^t H_s \circ dW_s = \int_0^t H_s dW_s + \frac{1}{2}\langle H, W\rangle_t$.
   (b) En déduire la partie intégrale d'Itô par rapport à $dW_t$ de la décomposition de $\sigma(Y_t)$ comme processus d'Itô puis $d\langle\sigma(X), W\rangle_t$.
   (c) Conclure que $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est solution de l'EDS au sens d'Itô

$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + \left(b + \frac{\sigma\sigma'}{2}\right)(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0. \tag{13}$$

4. On suppose que $\sigma$ est $C^2$ avec $\sigma$, $\sigma'$ et $\sigma''$ bornées et que $b$ est $C^1$ avec $b$ et $b'$ bornées. L'objectif de cette question est de montrer que sous cette hypothèse

$$\exists C < \infty,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \max_{0\le k\le N} \mathbf{E}\left[|X_{t_k}^N - Y_{t_k}|^2\right] \le \frac{C}{N}. \tag{14}$$

   (a) Écrire le schéma d'Euler $(Y_{t_k}^N)_{0\le k\le N}$ appliqué à (12) et préciser son erreur forte.
   (b) Vérifier que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $dX_t^N = f_k(X_t^N)dt$ avec $f_k(x) = \sigma(x)\frac{W_{t_{k+1}}-W_{t_k}}{t_{k+1}-t_k} + b(x)$.
   (c) En déduire que pour $r \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\sigma\sigma'(X_r^N) = \sigma\sigma'(X_{t_k}^N) + \int_{t_k}^r f_k(\sigma\sigma')'(X_u^N)du$$

   et que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$X_t^N = X_{t_k}^N + f_k(X_{t_k}^N)(t - t_k) + \int_{t_k}^t \int_{t_k}^s f_k f_k'(X_r^N)drds.$$

(d) Conclure que pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$X^N_{t_{k+1}} = X^N_{t_k} + \sigma(X^N_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \left(b + \frac{\sigma\sigma'}{2}\right)(X^N_{t_k})\frac{T}{N} + R^{N,1}_{k+1} + R^{N,2}_{k+1},$$

avec $R^{N,1}_{k+1} = \frac{\sigma\sigma'}{2}(X^N_{t_k})((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k))$ et

$$R^{N,2}_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - r)\left(\frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}(b\sigma' + \sigma b')(X^N_r) + bb'(X^N_r)\right) dr$$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t_{k+1} - u)^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}{2(t_{k+1} - t_k)^2}\left(\frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}\sigma(\sigma\sigma')'(X^N_u) + b(\sigma\sigma')'(X^N_u)\right) du$$

(e) Que valent $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2\right]$, $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^4\right]$ et $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^6\right]$?

(f) Que vaut $\mathbf{E}[R^{N,1}_{j+1}R^{N,1}_{k+1}]$ pour $j < k$? En déduire que $\forall \ell \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell} R^{N,1}_{k+1}\right)^2\right] \leq \|\sigma\sigma'\|^2_\infty \frac{(\ell+1)T^2}{2N^2} \leq \frac{\|\sigma\sigma'\|^2_\infty T^2}{2N}.$$

(g) Vérifier que pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\mathbf{E}\left[(R^{N,2}_{k+1})^2\right]$ est majoré par

$$\|b\sigma' + \sigma b'\|^2_\infty \frac{T^3}{N^3} + \|bb'\|^2_\infty \frac{T^4}{N^4} + \|\sigma(\sigma\sigma')'\|^2_\infty \frac{5T^3}{3N^3} + \|b(\sigma\sigma')'\|^2_\infty \frac{T^4}{3N^4}.$$

(h) En déduire l'existence d'une constante $C_R < \infty$ telle que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall \ell \in \{0, \ldots, N-1\},\ \mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell}(R^{N,1}_{k+1} + R^{N,2}_{k+1})\right)^2\right] \leq \frac{C_R}{N}.$$

On pose $e(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{E}\left[(X^N_{t_\ell} - Y^N_{t_\ell})^2\right] 1_{[t_\ell, t_{\ell+1}[}(t) + \mathbf{E}\left[(X^N_T - Y^N_T)^2\right] 1_{\{t=T\}}$ et $\tilde{b} = b + \frac{\sigma\sigma'}{2}$.

(i) Montrer que pour $\ell \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\mathbf{E}\left[(X^N_{t_\ell} - Y^N_{t_\ell})^2\right] \leq \frac{3T}{N}\sum_{k=0}^{\ell-1}\mathbf{E}\left[(\sigma(X^N_{t_k}) - \sigma(Y^N_{t_k}))^2 + T(\tilde{b}(X^N_{t_k}) - \tilde{b}(Y^N_{t_k}))^2\right] + \frac{3C_R}{N}.$$

(j) En déduire que $\forall t \in [0, T],\ e(t) \leq \frac{3C_R}{N} + 3(\|\sigma'\|^2_\infty + T\|\tilde{b}'\|^2_\infty)\int_0^t e(s)ds$ puis que

$$\max_{0 \leq k \leq N} \mathbf{E}\left[|X^N_{t_k} - Y^N_{t_k}|^2\right] \leq \frac{3C_R}{N} e^{3(\|\sigma'\|^2_\infty + T\|\tilde{b}'\|^2_\infty)T}.$$

(k) Conclure que (13) est vraie.

On se place désormais en dimension quelconque et on suppose toujours $\sigma$ bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $C^1$ bornée ainsi que ses dérivées d'ordre 1. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $\sigma_j(x)$ la $j$-ème colonne de la matrice $\sigma(x)$ et $\partial\sigma_j(x)$ la matrice dont le terme d'indices $i, l \in \{1, \ldots, n\}$ vaut $(\partial\sigma_j(x))_{il} = \frac{\partial\sigma_{ij}(x)}{\partial x_l}$.

5. Donner la forme Itô de l'EDS (11).

6. Vérifier que pour $j, m \in \{1, \ldots, d\}$ avec $j \neq m$, et $(H_{t_k})_{0 \leq k \leq N-1}$ une suite de variables aléatoires bornées par une constante $C$ et adaptée à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell}(H_{t_k}(W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k})(W^m_{t_{k+1}} - W^m_{t_k})\right)^2\right] \leq \frac{(\ell+1)C^2T^2}{N^2}$.

7. En déduire comment montrer que (13) reste vraie.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 26 janvier 2016 8h30-11h30

**Partie 1 : Une méthode de Monte-Carlo adaptative**

On considère une fonction $f$, mesurable et bornée, de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ et $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{R}^p$.
On s'intéresse à un cas où l'on sait représenter $\mathbf{E}\left(f(X)\right)$ sous la forme

$$\mathbf{E}\left(f(X)\right) = \mathbf{E}\left(H(f;\lambda,U)\right), \tag{15}$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $U$ est une variable aléatoire à valeur dans $[0,1]^d$ suivant une loi uniforme et où, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $H(f;\lambda,U)$ est une variable aléatoire de carré intégrable qui prend des valeurs réelles. La question 2 montrer que cela est généralement possible.
Le but de ce problème est de montrer que l'on peut, dans ce cas, faire varier $\lambda$ au cours des tirages tout en conservant les propriétés de convergence d'un algorithme de type Monte-Carlo.

1. On note $\phi$ la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite et $\phi^{-1}$ son inverse. On suppose que $X$ est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne centrée réduite.

   Montrer que, si $\lambda \in \mathbf{R}$, $H$ définie par :

   $$H(f;\lambda,U) = e^{-\lambda G - \frac{\lambda^2}{2}} f\left(G+\lambda\right), \text{ où } G = \phi^{-1}(U)$$

   permet de satisfaire la condition $(14)$.

2. Soit $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{R}^p$, de loi arbitraire, que l'on peut obtenir par une méthode de simulation: cela signifie qu'il existe une fonction $\psi$ de $[0,1]^d$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que, si $U = (U_1, \ldots, U_d)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]^d$, la loi de $\psi(U)$ est identique à celle de $X$.

   On pose, pour $i = 1, \ldots, d$, $G_i = \phi^{-1}(U_i)$ et l'on considère $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$. Proposer à partir de $(G_1+\lambda_1, \ldots, G_d+\lambda_d)$ un choix de variable aléatoire $H(f;\lambda,U)$ qui permet de satisfaire l'égalité (14).

3. On considère une suite $(U^n, n \geq 1)$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]^d$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma\left(U^k, 1 \leq k \leq n\right)$.

   Soit $\lambda$ un vecteur fixé, comment peut on utiliser $H(f;\lambda,U)$ pour estimer $\mathbf{E}\left(f(X)\right)$ ? Comment peut-on estimer l'erreur commise sur cette estimation ?

   Quel est le critère pertinent pour choisir $\lambda$ ?

On suppose que $\lambda$ n'est plus constant mais évolue au fils du temps et est donné par une suite $(\lambda_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurable ($\lambda_0$ est supposée constante). On suppose que

$$\begin{aligned}&\text{pour tout } \lambda \in \mathbf{R}^p, s^2(\lambda) = \mathrm{Var}(H(f;\lambda,U)) < +\infty,\\ &\text{et } s^2(\lambda) \text{ est une fonction continue de } \mathbf{R}^d \text{ dans } \mathbf{R}.\end{aligned} \tag{16}$$

4. On pose

   $$M_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[H(f;\lambda_i,U_{i+1}) - \mathbf{E}(f(X))\right].$$

   Montrer que, si $H$ est *uniformément bornée*[8], $(M_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale dont le crochet $\langle M\rangle_n$ s'exprime sous la forme $\langle M\rangle_n = \sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)$.

[8] i.e., il existe $K$ réel positif tel que pour tout $\lambda$ et $u$, $|H(f;\lambda,u)| \leq K < +\infty$

5. Plus généralement montrer que, sous l'hypothèse (15), $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale localement dans $L^2$ de crochet toujours donné par $\langle M \rangle_n = \sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)$ (on pourra utiliser la famille de temps d'arrêt $\tau_A = \inf\{n \geq 0, |\lambda_n| > A\}$ et vérifier que $(M_{t\wedge\tau_A}, n \geq 0)$ est une martingale bornée dans $L^2$).

6. En utilisant la loi forte de grand nombre pour les martingales localement dans $L^2$, montrer que si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)}{n} = c, \tag{17}$$

où $c$ est une constante strictement positive, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} H(f;\lambda_i, U_{i+1}) = \mathbf{E}(f(X)).$$

Interpréter ce résultat en terme de méthode de Monte-Carlo. Vérifier que, si $\lambda_n$ converge presque sûrement vers $\lambda^*$ tel que $s^2(\lambda^*) > 0$, le résultat de cette question est vrai.

7. Quelle hypothèse faudrait-t'il ajouter à (16) pour obtenir un théorème central limite dans la méthode précédente (ne pas chercher à la vérifier) ? Enoncer le résultat que l'on obtiendrait alors.

**Partie 2 : Schéma d'Euler avec acceptation de Metropolis-Hastings**

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ de dimension $n$ et un vecteur aléatoire $X_0$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ indépendants. Ce problème est consacré à la simulation de l'Équation Différentielle Stochastique

$$X_t = X_0 + W_t - \int_0^t \nabla V(X_s)ds$$

où $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction régulière telle que $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2V(x)}dx = 1$. On suppose en particulier que $V$ est $C^2$ et que $\nabla V$ et $\nabla^2 V$ sont lipschitziennes et bornées.
Dans la seconde partie, on montrera que si $X_0$ possède la densité $e^{-2V(x)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, alors pour tout $t > 0$, $X_t$ possède également la densité $e^{-2V(x)}$. La première partie est consacrée à l'analyse de la convergence forte du schéma d'Euler où, à chaque pas, la nouvelle position est acceptée ou rejetée suivant la règle de Metropolis-Hastings, ce qui permet d'obtenir une dynamique qui préserve la densité invariante $e^{-2V(x)}$.

**Schéma d'Euler** On suppose que $X_0 = x_0$ où $x_0 \in \mathbf{R}^n$ est déterministe.

1. Écrire le schéma d'Euler $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ sur la grille $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ où $T \in ]0, +\infty[$ est l'horizon de simulation et $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pas de temps.

2. Quelle est la vitesse forte de ce schéma pour l'EDS considérée?

3. Quelle est la loi de $\bar{X}_{t_1}$? Donner sa densité que l'on notera $x_1 \to q(x_0, x_1)$.

4. Exprimer à l'aide de

$$\beta(x_0, x_1) = 2V(x_0) + \frac{1}{2t_1}|x_1 - x_0 + \nabla V(x_0)t_1|^2 - 2V(x_1) - \frac{1}{2t_1}|x_0 - x_1 + \nabla V(x_1)t_1|^2$$

le taux d'acceptation $\alpha(x_0, x_1)$ de l'algorithme de Metropolis-Hastings avec noyau de proposition de densité $q(x_0, x_1)$ et densité cible $e^{-2V(\cdot)}$.

5. Montrer que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \mathbf{E}(|\bar{X}_{t_1}-x_0|^5)\leq CN^{-5/2}.$$

6. Remarquer que $x\mapsto|\nabla V(x)|^2$ est Lipschitzienne, vérifier que

$$\begin{aligned}&2V(x_0)-2V(x_1)+(x_1-x_0)^t(\nabla V(x_0)+\nabla V(x_1))\\&\quad=\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)(x_1-x_0)^t\Big(\nabla^2V(x_1-\frac{u}{2}(x_1-x_0))\\&\qquad\qquad-\nabla^2V(x_0+\frac{u}{2}(x_1-x_0))\Big)(x_1-x_0)du,\end{aligned}$$

et en déduire que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbf{N}^*,\ \forall x_0,x_1\in\mathbf{R}^n,\ |\beta(x_0,x_1)|\leq C(|x_1-x_0|^3+|x_1-x_0|/N).$$

En remarquant que $\forall x\in\mathbf{R},\ (1-e^x)^+\leq\max(-x,0)\leq|x|$, conclure que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbf{N}^*,\ \forall x_0,x_1\in\mathbf{R}^n,\ 1-\alpha(x_0,x_1)\leq C(|x_1-x_0|^3+|x_1-x_0|/N).$$

7. Si $U$ est variable uniforme sur $[0,1]$ indépendante de $(W_t)_{t\geq0}$ et $\hat{X}_{t_1}=x_0 1_{\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}}+\bar{X}_{t_1}1_{\{U\leq\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}}$, montrer que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \mathbf{E}\left(|\bar{X}_{t_1}-\hat{X}_{t_1}|^2\right)\leq CN^{-5/2}.$$

8. Soit maintenant $\bar{Y}_{t_1}=y_0+W_{t_1}-\nabla V(y_0)t_1$ où $y_0\in\mathbf{R}^n$. On pose

$$f(x_0,y_0)=\mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2\right).$$

En décomposant sur les événements $\{U\leq\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}$ et $\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}$, montrer que

$$|\hat{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2\leq(1+1_{\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}})|\bar{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2+2|\hat{X}_{t_1}-\bar{X}_{t_1}|^2$$

et en déduire que

$$\exists\mathcal{C}<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0,y_0\in\mathbf{R}^n,\ f(x_0,y_0)\leq(1+\mathcal{C}/N)|x_0-y_0|^2+\mathcal{C}N^{-5/2}.$$

On introduit le schéma d'Euler avec acceptation de Metropolis-Hastings défini par $\hat{X}_0=x_0$ et la relation de récurrence

$$\forall k\in\{0,\ldots,N-1\},\ \begin{cases}\tilde{X}_{t_{k+1}}=\hat{X}_{t_k}+W_{t_{k+1}}-W_{t_k}-\nabla V(\hat{X}_{t_k})t_1\\ \hat{X}_{t_{k+1}}=\hat{X}_{t_k}1_{\{U_{k+1}>\alpha(\hat{X}_{t_k},\tilde{X}_{t_{k+1}})\}}+\tilde{X}_{t_{k+1}}1_{\{U_{k+1}\leq\alpha(\hat{X}_{t_k},\tilde{X}_{t_{k+1}})\}}\end{cases}$$

où $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ est une suite indépendante de $(W_t)_{t\geq0}$ de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. L'intérêt de l'acceptation de Metropolis-Hastings est d'assurer que la densité $e^{-2V(x)}$ est invariante.

9. Montrer que pour $k\in\{0,\ldots,N-1\}$, $\mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_{k+1}}-\bar{X}_{t_{k+1}}|^2\right)=\mathbf{E}\left(f(\hat{X}_{t_k},\bar{X}_{t_k})\right)$ et en déduire que

$$\forall k\in\{1,\ldots,N\},\ \mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_k}-\bar{X}_{t_k}|^2\right)\leq\mathcal{C}N^{-5/2}\sum_{j=0}^{k-1}(1+\mathcal{C}/N)^j.$$

Conclure que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sup_{k\in\{0,\ldots,N\}}\mathbf{E}(|\hat{X}_{t_k}-X_{t_k}|^2)\leq CN^{-3/2}.$$

**Densité invariante de l'EDS**

10. Que peut-on dire de $(Z_s = X_s - X_0)_{s\in[0,t]}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\mathcal{E}_t = e^{\int_0^t \nabla V(X_s).dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla V(X_s)|^2 ds}$ par rapport à $\mathbb{P}$?

11. Pour $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mesurable bornée, vérifier que

$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left(\varphi(X_0, X_0 + Z_t)e^{-\int_0^t \nabla V(X_0+Z_s).dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla V(X_0+Z_s)|^2 ds}\right)$$

et en déduire que

$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X_0, X_0 + W_t)e^{V(X_0) - V(X_0+W_t) + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta V - |\nabla V|^2)(X_0+W_s)ds}\right).$$

12. Soit $(B_s)_{s\in[0,t]}$ un mouvement brownien indépendant de $(W_s)_{s\geq 0}$ et de $X_0$. Pour $0 \leq r \leq s \leq t$, calculer $\mathrm{Cov}(B_r - \frac{r}{t}(B_t - W_t), B_s - \frac{s}{t}(B_t - W_t))$. En déduire que $(\beta_s = B_s - \frac{s}{t}(B_t - W_t))_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien indépendant de $X_0$ tel que $\beta_t = W_t$ puis que

$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X_0, X_0 + W_t)e^{V(X_0) - V(X_0+W_t)}\psi_t(X_0, X_0 + W_t)\right)$$

où $\psi_t(x, y) = \mathbf{E}\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^t (\Delta V - |\nabla V|^2)(\frac{t-s}{t}x + \frac{s}{t}y + B_s - \frac{s}{t}B_t)ds}\right)$.

On supose désormais que $X_0$ possède la densité $e^{-2V(x)}$.

13. Montrer que

$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = (2\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} \varphi(x, y)e^{-V(x) - V(y) - \frac{|x-y|^2}{2t}}\psi_t(x, y)dxdy.$$

14. En remarquant que $(B_s)_{s\in[0,t]}$ a même loi que $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$, vérifier que $(B_s - \frac{s}{t}B_t)_{s\in[0,t]}$ a même loi que $(B_{t-s} - \frac{t-s}{t}B_t)_{s\in[0,t]}$. Conclure que $\psi_t(x, y) = \psi_t(y, x)$.

15. En déduire que $\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}(\varphi(X_t, X_0))$ et conclure que $X_t$ possède la densité $e^{-2V(x)}$.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 3 février 2015 8h30-11h30

**Partie 1 : Méthode de biaisage d'un tirage uniforme par une loi $\beta$**

**Le cas de la dimension 1.** On note $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On considère la famille de loi $\beta(a,1)$ dont la densité est donnée, pour $a > 0$, par :

$$au^{a-1}\mathbf{1}_{\{u \in [0,1]\}}.$$

On note $V_a$ une variable aléatoire de de loi $\beta(a,1)$.

1. Proposer une méthode de simulation selon la loi $\beta(a,1)$. Pour $g$ une fonction bornée, comment peut-on estimer $\mathbf{E}\left(g(V_a)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Comment obtenir un ordre de grandeur de l'erreur dans cette méthode ?

2. Vérifier que, si $f$ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{E}(|f(U)|) < +\infty$, pour tout $a > 0$ :
$$\mathbf{E}\left(f(U)\right) = \mathbf{E}\left(\frac{f(V_a)}{aV_a^{a-1}}\right).$$
Comment utiliser cette relation pour calculer $\mathbf{E}\left(f(U)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Quelle fonction de $a$ doit on alors minimiser pour obtenir une méthode optimale ?

3. On suppose que $f$ est bornée. Montrer que, pour tout $0 < a < 2$ :
$$\sigma_a^2 = \text{Var}\left(\frac{f(V_a)}{aV_a^{a-1}}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{f^2(U)}{aU^{a-1}}\right) - \mathbf{E}\left(f(U)\right)^2.$$

4. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que, si $\mathbf{P}(f(U) \neq 0) > 0$, $\lim_{a\to 0^+} \sigma_a^2 = +\infty$. Puis que, si $f$ est continue en $0$ avec $f(0) \neq 0$, $\lim_{a\to 2^-} \sigma_a^2 = +\infty$.

   On supposera, dans la suite, que $f$ est bornée, continue en $0$ avec $f(0) \neq 0$ (ce qui implique que $\mathbf{P}(f(U) \neq 0) > 0$).

5. Montrez que, pour $0 < a < 2$, $\sigma_a^2$ admet des dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à $a$ qui s'écrivent sous la forme :
$$\frac{d\sigma_a^2}{da} = \mathbf{E}\left(f^2(U)g_1(a,U)\right) \text{ et } \frac{d^2\sigma_a^2}{da^2} = \mathbf{E}\left(f^2(U)g_2(a,U)\right),$$
$g_1$ et $g_2$ étant des fonctions de $\mathbf{R}^{+*} \times [0,1]$ dans $\mathbf{R}$ que l'on calculera.

6. En déduire que $\sigma_a^2$ est une fonction convexe sur l'intervalle $]0,2[$ qui atteint son minimum au point $\hat{a}$ solution unique de l'équation $\psi(a) = 0$ où
$$\psi(a) = \mathbf{E}\left(\frac{f^2(U)}{a^2U^{a-1}}\left(1 - a|\ln(U)|\right)\right).$$

7. Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On définit $\psi_n(a)$, pour $a > 0$, par
$$\psi_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f^2(U_i)}{a^2U_i^{a-1}}\left(1 - a|\ln(U_i)|\right)$$
Vérifier que, pour $a \in ]0,2[$, $\psi_n(a)$ converge presque sûrement vers $\psi(a)$ lorsque $n$ tends vers $+\infty$.

8. On pose $\tau = \inf\{k \geq 0, |f(U_k)| > 0\}$. Vérifier que $\mathbf{P}(\tau < +\infty) = 1$. Montrer que, pour $n \geq \tau$, $\psi_n(a)$ est une fonction continue et croissante de $a$ vérifiant $\psi_n(0^-) = -\infty$ et $\psi_n(+\infty) = +\infty$. En déduire qu'il existe une unique $\hat{a}_n > 0$ tel que $\psi_n(a_n) = 0$. Proposer un algorithme permettant de calculer $a_n$ et puis (sans preuve) une méthode d'approximation de $\hat{a}$.

**Partie 2 : Estimateur parametrix du prix d'une option vanille**

Ce problème est consacré à l'estimateur parametrix du prix $\mathbf{E}[f(X_S)]$ d'une option vanille de maturité $S$ déterministe, de fonction de payoff $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $C^\infty$ à dérivées à croissance polynomiale, portant sur le sous-jacent $(X_t)_{t \leq S}$ dont l'évolution temporelle est donnée par l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{18}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard de dimension 1, $\sigma, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions $C^\infty$ à dérivées bornées et $\inf_{x\in\mathbf{R}} \sigma(x) > 0$. On pose $\boxed{a(x) = \sigma^2(x)}$.

**Représentation Poissonnienne d'une somme d'intégrales multiples** Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda$, de temps de sauts $(T_k)_{k\geq 1}$, indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\psi_k : [0, S]^k \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable ($\psi_0 \in \mathbf{R}_+$ est une constante).

1. On pose $T_0 = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires $(\tau_k = T_k - T_{k-1})_{k\geq 1}$?

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer à l'aide du vecteur $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1})$ la variable aléatoire $1_{\{N_S=n\}}\psi_n(T_1, \ldots, T_n)$. En déduire que

$$\mathbf{E}\left[1_{\{N_S=n\}}\psi_n(T_1, \ldots, T_n)\right] = e^{-\lambda S} \int_{0\leq t_1\leq t_2\leq \ldots\leq t_n\leq S} \lambda^n \psi_n(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n.$$

3. En déduire, avec la convention $\psi_0(T_1, \ldots, T_0) = \psi_0$, que

$$\begin{aligned} &e^{\lambda S}\mathbf{E}\left[\psi_{N_S}(T_1, \ldots, T_{N_s})\right] \\ &\quad = \psi_0 + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \int_{0\leq u_n\leq u_{n-1}\leq \ldots\leq u_1\leq S} \lambda^n \psi_n(S - u_1, \ldots, S - u_n)du_n \ldots du_1. \end{aligned}$$

**Méthode parametrix** Pour $s \geq 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $X_s^x$ la solution à l'instant $s$ de l'EDS

$$X_s^x = x + \int_0^s \sigma(X_u^x)dW_u + \int_0^s b(X_u^x)du$$

et $\bar{X}_s^x = x + \sigma(x)W_s + b(x)s$. Pour $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ régulière, on note également, $\bar{P}_s\varphi(x) = \mathbf{E}[\varphi(\bar{X}_s^x)]$ et $P_s\varphi(x)$ la solution de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_s P_s\varphi(x) = L(P_s\varphi)(x), \ (s, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \\ P_0\varphi(x) = \varphi(x), \ x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{où } L\psi(x) = \frac{a(x)}{2}\psi''(x) + b(x)\psi'(x).$$

On admet que cette solution est $C^\infty$ avec des dérivées bornées.

4. Soit $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer $dP_{t-s}\varphi(X_s^x)$ par la formule d'Itô et en déduire que $P_t\varphi(x) = \mathbf{E}[\varphi(X_t^x)]$.

5. Vérifier que pour $s > 0$, $\bar{X}_s^x$ possède la densité $g_s(x,y) = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(y-x-b(x)s)^2}{2a(x)s}}$. Calculer $\partial_s \ln(g_s(x,y))$ et en déduire que $\partial_s \bar{P}_s\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(y)\bar{\theta}_s(x,y)g_s(x,y)dy$ où

$$\bar{\theta}_s(x,y) = -\frac{1}{2s} + \frac{(y-x-b(x)s)^2}{2a(x)s^2} + \frac{b(x)(y-x-b(x)s)}{a(x)s}.$$

6. Calculer $\partial_y \ln(g_s(x,y))$ et vérifier que

$$\partial^2_{yy} g_s(x,y) = \left(\frac{(y-x-b(x)s)^2}{a^2(x)s^2} - \frac{1}{a(x)s}\right) g_s(x,y).$$

   Expliquer, sans détailler les calculs, comment en déduire que $\bar{P}_s L\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} \psi(y)\tilde{\theta}_s(x,y)g_s(x,y)dy$ où

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_s(x,y) = \frac{1}{2}a''(y) - b'(y) &+ \frac{(y-x-b(x)s)(b-a')(y)}{a(x)s} \\ &+ \frac{a(y)}{2}\left(\frac{(y-x-b(x)s)^2}{a^2(x)s^2} - \frac{1}{a(x)s}\right).\end{aligned}$$

7. Remarquer que pour $t \geq u \geq 0$, $\partial_u(\bar{P}_{t-u}P_u\varphi(x)) = -(\partial_s \bar{P}_s|_{s=t-u})P_u\varphi(x) + \bar{P}_{t-u}LP_u\varphi(x)$ et en déduire que

$$P_t\varphi(x) - \bar{P}_t\varphi(x) = \int_0^t Q_{t-u}P_u\varphi(x)du$$

   où $Q_s\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} \psi(y)\theta_s(x,y)g_s(x,y)dy$ pour une fonction $\theta_s$ que l'on exprimera à l'aide de $\bar{\theta}_s$ et $\tilde{\theta}_s$.

8. Montrer que $(P_t - \bar{P}_t)\varphi(x) = \int_0^t Q_{t-u}\bar{P}_u\varphi(x)du + \int_0^t Q_{t-u}(P_u - \bar{P}_u)\varphi(x)du$.

9. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[f(X_S)] &= \bar{P}_S f(x_0) \\ &+ \sum_{n=1}^m \int_{0\leq u_n \leq u_{n-1}\leq \ldots \leq u_1 \leq S} Q_{S-u_1}Q_{u_1-u_2}\ldots Q_{u_{n-1}-u_n}\bar{P}_{u_n}f(x_0)du_1\ldots du_n + R_m\end{aligned}$$

   où

$$R_m = \int_{0\leq u_m \leq u_{m-1}\leq \ldots \leq u_1 \leq S} Q_{S-u_1}Q_{u_1-u_2}\ldots Q_{u_{m-1}-u_m}(P_{u_m} - \bar{P}_{u_m})f(x_0)du_1\ldots du_m.$$

10. En admettant que $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$, en déduire à l'aide de la question 3 que

$$\mathbf{E}[f(X_S)] = e^{\lambda S}\mathbf{E}\left[\lambda^{-N_S}Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\ldots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}}f(x_0)\right],$$

   où, par convention, $Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\ldots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}}f(x_0) = \bar{P}_{S-T_0}f(x_0) = \bar{P}_S f(x_0)$ si $N_S = 0$.

On définit par récurrence

$$\begin{cases}\bar{X}_0 = x_0 \\ \forall k \in \{0,\ldots,N_S-1\},\ \bar{X}_{T_{k+1}} = \bar{X}_{T_k} + \sigma(\bar{X}_{T_k})(W_{T_{k+1}} - W_{T_k}) + b(\bar{X}_{T_k})(T_{k+1} - T_k) \\ \bar{X}_S = \bar{X}_{T_{N_S}} + \sigma(\bar{X}_{T_{N_S}})(W_S - W_{T_{N_S}}) + b(\bar{X}_{T_{N_S}})(S - T_{N_S})\end{cases}$$

où la seconde étape n'a pas lieu lorsque $N_S = 0$.

11. Quelle est la loi conditionnelle de $W_S - W_{T_{N_S}}$ sachant $(N_t)_{t\leq S}$ et $(W_t)_{t\leq T_{N_S}}$? En déduire que

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)|(N_t)_{t\leq S},(W_t)_{t\leq T_{N_S}}\right] = \bar{P}_{S-T_{N_s}} f(\bar{X}_{T_{N_s}}),$$

et sur $\{N_S \geq 1\}$,

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)\theta_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}(\bar{X}_{T_{N_S-1}}\bar{X}_{T_{N_S}})|(N_t)_{t\leq S},(W_t)_{t\leq T_{N_S-1}}\right] = Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_s}} f(\bar{X}_{T_{N_s-1}}).$$

En déduire que sur $\{N_S \geq 1\}$,

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)\prod_{k=1}^{N_S}\theta_{T_k-T_{k-1}}(\bar{X}_{T_{k-1}},\bar{X}_{T_k})\middle|(N_t)_{t\leq S}\right] = Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\ldots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}} f(x_0).$$

12. Conclure que

$$\mathbf{E}[f(X_S)] = e^{\lambda S}\mathbf{E}\left[\lambda^{-N_S} f(\bar{X}_S)\prod_{k=1}^{N_S}\theta_{T_k-T_{k-1}}(\bar{X}_{T_{k-1}},\bar{X}_{T_k})\right]$$

avec la convention que le produit vaut $1$ lorsque $N_S = 0$.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 11 février 2014 8h30-11h30

On s'intéresse au calcul de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ où $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction $C^4$ **lipschitzienne** avec des dérivées à croissance polynomiale et $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont des fonctions $C^4$ à dérivées bornées et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On note $X_T^N$ l'approximation de $X_T$ obtenue par un schéma de discrétisation comportant $N$ pas de discrétisation et **dont le temps de calcul est proportionnel à** $N$. On suppose que les ordres de convergence forte et de convergence faible pour la fonction $f$ de ce schéma sont respectivement égaux à $\alpha/2$ et $\beta$ avec $\alpha, \beta \geq 1$ :

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{E}[|X_T - X_T^N|^2] \leq \frac{C}{N^\alpha} \text{ et } |\mathbf{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]| \leq \frac{C}{N^\beta}.$$

## Méthode de Monte Carlo multipas

1. Soit $Y$ un estimateur de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ de carré intégrable. Montrer la décomposition biais/variance

$$\mathbf{E}[(\mathbf{E}(f(X_T)) - Y)^2] = (\mathbf{E}[f(X_T) - Y])^2 + \text{Var}(Y)$$

de l'erreur quadratique.

2. On suppose que $Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M f(X_T^{i,N})$ est la moyenne empirique de $M$ copies indépendantes de $f(X_T^N)$.

   (a) Combien de pas $N$ faut-il choisir pour que $(\mathbf{E}[f(X_T) - Y])^2$ soit égal à $\varepsilon^2$ où $\varepsilon$ est un niveau de précision donné petit?

   (b) Vérifier que $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}[(f(X_T) - f(X_T^N))^2] = 0$.
   En déduire que $\lim_{N\to\infty} \text{Var}(f(X_T^N)) = \text{Var}(f(X_T))$. Combien de copies $M$ faut-il choisir pour que $\text{Var}(Y)$ soit égale à $\varepsilon^2$?

   (c) Conclure que le temps de calcul nécessaire pour atteindre la précision $\varepsilon$ (i.e. une erreur quadratique égale à $2\varepsilon^2$) est proportionnel à $\varepsilon^{-(2+1/\beta)}$?

3. On s'intéresse maintenant à l'estimateur multipas proposé par Giles [9] $Y = \sum_{l=0}^L Y_{l,M_l}$ où les variables $Y_{l,M_l}$ sont indépendantes et

   - $Y_{0,M_0}$ est la moyenne empirique de $M_0$ copies indépendantes de $f(X_T^1)$,
   - pour $l \in \{1,\dots,L\}$, $Y_{l,M_l}$ est la moyenne empirique de $M_l$ copies indépendantes de $f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}})$.

   (a) Vérifier que $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[f(X_T^{2^L})]$ et en déduire que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon \in ]0,1[,\ L \geq -\frac{\log_2(\varepsilon/C)}{\beta} \Rightarrow |\mathbf{E}[f(X_T) - Y]| \leq \varepsilon.$$

[9] M.B. Giles, Multi-level Monte Carlo path simulation, *Operations Research*, 56(3):607-617, 2008

(b) En remarquant que pour $l \in \mathbf{N}^*$,

$$(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2 \leq 2\left((f(X_T^{2^l}) - f(X_T))^2 + (f(X_T) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2\right),$$

vérifier que $\sup_{l \in \mathbf{N}^*} 2^{l\alpha}\mathbf{E}[(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2] < +\infty$. En déduire

$$\exists \tilde{C} < +\infty \text{ t.q. } \forall L \in \mathbf{N}^*,\ \forall (M_0, \ldots, M_L) \in {\mathbf{N}^*}^L,\ \text{Var}(Y) \leq \tilde{C} \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{M_l 2^{l\alpha}}.$$

On pose $p_l = \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2 M_l 2^{l\alpha}}$ pour $l \in \{0, \ldots, L\}$.

(c) Vérifier que $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1 \Rightarrow \text{Var}(Y) \leq \varepsilon^2$.
Justifier que le temps de calcul de $Y$ est proportionnel à $\tau = \sum_{l=0}^{L} M_l 2^l$.

Pour approcher la minimisation du temps de calcul sous la contrainte $\text{Var}(Y) \leq \varepsilon^2$, nous allons minimiser $\tau$ sous la contrainte $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1$.

(d) Vérifier que $\tau = \frac{\varepsilon^2}{\tilde{C}}\left(\sum_{l=0}^{L}(M_l 2^{l(1+\alpha)/2})^2 p_l\right)$ et en déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\tau \geq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2}\left(\sum_{l=0}^{L} 2^{l(1-\alpha)/2}\right)^2.$$

Vérifier que $\left(M_l = \frac{\tilde{C}\sum_{k=0}^{L} 2^{k(1-\alpha)/2}}{\varepsilon^2 2^{l(1+\alpha)/2}}\right)_{0 \leq l \leq L}$ atteint ce minorant et satisfait la contrainte.

(e) En déduire que le temps de calcul pour atteindre la précision $\varepsilon$ est d'ordre $\frac{(\log_2(\varepsilon))^2}{\varepsilon^2}$ si $\alpha = 1$ et $\frac{1}{\varepsilon^2}$ si $\alpha > 1$.

4. Comparer les temps de calcul de l'estimateur monopas et de l'estimateur multipas pour le schéma d'Euler.

Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on note $\sigma_j(x) \in \mathbf{R}^n$ la $j$-ème colonne de la matrice $\sigma(x)$ et $\partial\sigma_j \in \mathbf{R}^{n \times n}$ la matrice $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(x)\right)_{il}$.

5. Comparer les temps de calcul des deux estimateurs pour le schéma de Milstein (pour lequel $\beta = 1$). Sous quelle condition peut-on effectivement implémenter le schéma de Milstein?

# Schéma de Giles et Szpruch et transpositions d'accroissements browniens

Pour $j, m \in \{1, \ldots, d\}$, on définit $\theta_{jm}, \eta_{jm} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ par $\theta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m + \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$ et $\eta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m - \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$. On suppose que les fonctions $\theta_{jm}$ sont **lipschitziennes**. On pose

$$\hat{X}_t = x_0 + \sigma(x_0)W_t + b(x_0)t + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(x_0)W_t^j W_t^m$$

$$\tilde{X}_t = \hat{X}_{\frac{t}{2}} + \sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t - W_{\frac{t}{2}}) + b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)$$

6. Vérifier que

$$\exists C<+\infty,\ \forall t\in[0,T],\ \mathbf{E}[|\hat{X}_t-x_0-\sigma(x_0)W_t|^2]\leq Ct^2 \text{ et } \mathbf{E}[|\hat{X}_t-x_0|^2]\leq Ct.$$

7. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\left|(\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\theta_{jm}(x_0))(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right|^2\right]=\frac{t^2(1+2\times 1_{\{j=m\}})}{4}\times\mathbf{E}\left[\left|\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\theta_{jm}(x_0)\right|^2\right].$$

   En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2}+\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}}) - b(x_0)\frac{t}{2}-\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right|^2\right]\leq Ct^3.$$

8. Pour $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ fonction $C^1$ telle que $\varphi$ et $\nabla\varphi$ sont Lipschitziennes, en remarquant l'existence d'une variable aléatoire $\alpha_t$ à valeurs dans $[0,1]$ t.q.

$$\varphi(x_0+\sigma(x_0)W_t)-\varphi(x_0)-\nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t=\left(\nabla\varphi(x_0+\sigma(x_0)\alpha_tW_t)-\nabla\varphi(x_0)\right).\sigma(x_0)W_t,$$

   montrer

$$\exists C<+\infty,\ \forall t\in[0,T],\ \mathbf{E}[(\varphi(\hat{X}_t)-\varphi(x_0)-\nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t)^2]\leq Ct^2.$$

   En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|(\sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\sigma(x_0))(W_t-W_{\frac{t}{2}})-\sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})\right|^2\right]\leq Ct^3.$$

9. En utilisant les propriétés de symétrie de $\theta$ et $\eta$, vérifier que

$$\sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})=\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})+W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right]+\sum_{j,m=1}^{d}\eta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})-W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right]$$

10. Que vaut $W^j_{\frac{t}{2}}W^m_{\frac{t}{2}}+W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})+W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})+(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})$?

11. En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que $\forall t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|\tilde{X}_t-\hat{X}_t-\sum_{j,m=1}^{d}\eta_{jm}(x_0)[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})-W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})]\right|^2\right]\leq Ct^3.$$

On pose

$$\bar{X}_{\frac{t}{2}} = x_0 + \sigma(x_0)(W_t - W_{\frac{t}{2}}) + b(x_0)\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(x_0)(W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)$$

$$\bar{X}_t = \bar{X}_{\frac{t}{2}} + \sigma(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W_{\frac{t}{2}} + b(\bar{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W_{\frac{t}{2}}^j W_{\frac{t}{2}}^m$$

12. Vérifier que $\bar{X}_t$ a même loi que $\tilde{X}_t$ et montrer sans calcul l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que $\forall t \in [0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|\bar{X}_t - \hat{X}_t - \sum_{j,m=1}^{d} \eta_{jm}(x_0)[(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)W_{\frac{t}{2}}^j - (W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)W_{\frac{t}{2}}^m]\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

13. Conclure que

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}\left[\left|\hat{X}_t - \frac{\tilde{X}_t + \bar{X}_t}{2}\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

On note maintenant $(\hat{X}^N)$ le schéma défini par $\hat{X}_0^N = x_0$ et la relation de récurrence : $\forall k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$\hat{X}_{t_{k+1}}^N = \hat{X}_{t_k}^N + \sigma(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(\hat{X}_{t_{k+1}}^N)\frac{T}{N} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}}^m - W_{t_k}^m)(W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j).$$

Soit $(\bar{X}^{2N})$ le schéma défini comme $(\hat{X}^{2N})$ mais en transposant chaque paire d'accroissements browniens successifs i.e. en remplaçant

$$(W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, \ldots, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}}, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}})$$

par $(W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, \ldots, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}}, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}})$.

14. Pourquoi peut-on anticiper le résultat prouvé par Giles et Szpruch[10]

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{E}\left[\left|\hat{X}_T^N - \frac{\hat{X}_T^{2N} + \bar{X}_T^{2N}}{2}\right|^2\right] \leq \frac{C}{N^2}?$$

15. On admet que $\beta = 1$ pour le schéma $\hat{X}^N$. Pourquoi l'estimateur multipas $Y = \sum_{l=0}^{L} Y_{l,M_l}$ de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ où les variables $Y_{l,M_l}$ sont indépendantes et

    - $Y_{0,M_0}$ est la moyenne empirique de $M_0$ copies indépendantes de $f(\hat{X}_T^1)$,
    - pour $l \in \{1, \ldots, L\}$, $Y_{l,M_l}$ est la moyenne empirique de $M_l$ copies indépendantes de $\frac{f(\hat{X}_T^{2^l}) + f(\bar{X}_T^{2^l})}{2} - f(\hat{X}_T^{2^{l-1}})$.

    atteint-il la précision $\varepsilon$ avec un temps de calcul de l'ordre de $\varepsilon^{-2}$?

[10]M.B. Giles et L. Szpruch, Antithetic multilevel Monte Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation, to appear in *Ann. Appl. Probab.*

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 12 février 2013 9h00-12h00

## Partie I : Méthode de variable antithétique

Dans ce qui suit on sera amené à considérer des fonctions de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$. On dira qu'une telle fonction $F$ est une fonction *croissante* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^p$ tel que, pour tout $i$, $1 \leq i \leq p$, $x_i \leq y_i$, alors

$$\text{pour tout } j, 1 \leq j \leq n, F_j(x) \leq F_j(y) :$$

Autrement dit, $F$ est croissante pour les ordres partiels de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$. Cette propriété est équivalente à dire que chacune des coordonnées de $F$, $F_j$ est croissante en chacune des coordonnées de son argument (les autres coordonnées restant fixes).

1. On cherche à calculer $\mathbf{E}\left(\phi(\xi)\right)$ où $\phi$ est une fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ bornée et $\xi$ un vecteur de $d$ gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

   On considère une suite $(\xi_n, n \geq 1)$ de vecteurs aléatoires indépendants, les $\xi_n$ suivant la loi de $\xi$. On construit les deux estimateurs

   $$I_n = \frac{1}{2n}\left(\phi(\xi_1) + \cdots + \phi(\xi_{2n})\right)$$

   $$\hat{I}_n = 12n\left(\phi(\xi_1) + \phi(-\xi_1) + \cdots + \phi(\xi_n) + \phi(-\xi_n)\right)$$

   Montrer que $I_n$ et $\hat{I}_n$ convergent presque sûrement lorsque $n$ tends vers $+\infty$ vers $\mathbf{E}(\phi(\xi))$. A quelle condition sur Cov $(\phi(\xi), \phi(-\xi))$, doit on préférer l'estimateur $\hat{I}_n$ à $I_n$ pour mettre en œuvre une méthode de Monte-Carlo ? Comment peut on vérifier sur un échantillon que l'estimateur $\hat{I}_n$ réduit bien la variance.

2. Soit $\xi$ un vecteur de $d$ gaussiennes centrées réduites et indépendantes, $F$ et $G$ deux fonctions *croissantes* de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ montrer que Cov $(F(\xi), G(\xi)) \geq 0$. Donner une condition (suffisante) sur $\phi$ qui permet d'affirmer que $\hat{I}_n$ est préférable à $I_n$ ?

3. On considère une suite $(\xi_n, n \geq 1)$ de vecteurs aléatoires indépendants de même loi, les coordonnées des vecteurs aléatoires $\xi_n$ étant des gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

   On considère, par ailleurs, une fonction $F(x, u)$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^n$ *croissante* et l'on construit par récurrence une chaîne de Markov en posant, $X_0 = x_0 \in \mathbf{R}^n$ et pour $n \geq 0$

   $$X_{n+1} = F(X_n, \xi_{n+1}).$$

   On note $\hat{X}_n$ la chaîne de Markov ("antithétique") construite en posant $\hat{X}_0 = x_0$ et $\hat{X}_{n+1} = F(\hat{X}_n, -\xi_{n+1})$.

   Montrer que les vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n)$ ont même loi.

4. Montrer que pour tout $k$ il existe une fonction $\psi_k$ de $\mathbf{R}^{k\times d}$ dans $\mathbf{R}$, croissante en chacune de ses coordonnées telle que

   $$X_k = \psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

   En déduire que si $\psi$ est une fonction *croissante* de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, alors

   $$\text{Cov }(\phi(X_k), \phi(\hat{X}_k) \leq 0.$$

   As t'on intérêt à utiliser un estimateur antithétique dans ce cas ?

5. Plus généralement montrer que si $\psi$ est une fonction de $\mathbf{R}^{k\times n}$ dans $\mathbf{R}$ *croissante*, on a :

$$\mathrm{Cov}\ \left(\psi(X_1,\ldots,X_k),\psi(\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_k)\right)\leq 0.$$

On cherche à calculer certaines options sur moyenne dans le modèle de Black et Scholes. On suppose alors que le prix d'un actif est donné par

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right),$$

où $r$ et $\sigma$ sont des réels positifs et $(W_t, t\geq 0)$ un mouvement brownien standard. On s'intéresse à une option dont le payoff est donné par, si $I_T=\int_0^T S_s ds$,

$$H = f(I_T),$$

où $f$ est une fonction continue, croissante et bornée. On note par ailleurs

$$\hat{S}_t = x_0 \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\sigma W_t\right),$$

et $\hat{I}_T=\int_0^T \hat{S}_s ds$.

6. Montrer que $I_T$ et $\hat{I}_T$ ont même loi. Comment utiliser cette remarque pour mettre en oeuvre une technique de variable antithétique pour le calcul de $\mathbf{E}(H)$ ? A quelle condition (suffisante) sur $\mathrm{Cov}\ (f(I_T), f(\hat{I}_T))$, la méthode proposée réduira effectivement la variance.

7. On se donne $N$ un entier et l'on pose

$$S_n^{(N)} = S_{nT/N} \text{ et } I_0^{(N)}=0, I_n^{(N)} = I_{n-1}^{(N)}+\frac{T}{N}S_{nT/N}.$$

Montrez que le couple $(S_n^{(N)}, I_n^{(N)}, n\geq 0)$ est une chaîne de Markov qui vérifie les conditions de croissance de la question 3.

8. Montrer que si l'on note $\hat{S}_n^{(N)} = \hat{S}_{nT/N}$ et que l'on définit $\hat{I}_n^{(N)}$ par $\hat{I}_0^{(N)} = (T/N)S_0$ et $\hat{I}_n^{(N)} = \hat{I}_{n-1}^{(N)}+\frac{T}{N}\hat{S}_{nT/N}$, on a :

$$\mathrm{Cov}\ \left(f(I_N^{(N)}), f(\hat{I}_N^{(N)})\right)\leq 0.$$

9. Montrer que $I_N^{(N)}$ converge presque sûrement vers $I_T$ et déduire que

$$\mathrm{Cov}\ \left(f(I_T), f(\hat{I}_T)\right)\leq 0.$$

## Partie II : vitesse forte du schéma de Milstein

On s'intéresse à la discrétisation de l'EDS uni-dimensionnelle

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = y \end{cases} \tag{20}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\sigma, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions $C^2$ avec des dérivées premières et secondes bornées et $y \in \mathbf{R}$. On se donne un horizon $T$ et un nombre $N \in \mathbf{N}^*$ de pas de discrétisation. Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $t_k = \frac{kT}{N}$. Pour $t \in [0, T]$, on note respectivement $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ et $\bar{\tau}_t = \lceil \frac{Nt}{T} \rceil \frac{T}{N}$ l'instant de discrétisation juste avant $t$ et l'instant de discrétisation juste après $t$.

1. Que peut-on dire de $\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}(X_t^4)$? Et de $\sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{\mathbf{E}[(X_t - X_s)^2]}{t-s}$?

2. Écrire le schéma de Milstein $(\tilde{X}_{t_k}^N)_{k\in\{0,\ldots,N\}}$ associé à cette équation. Donner également son extension en temps continu $(\tilde{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$.

3. Vérifier que

$$\forall u \in [0, T],\ \tilde{X}_u^N = y + \int_0^u \left(\sigma(\tilde{X}_{\tau_s}^N) + \sigma\sigma'(\tilde{X}_{\tau_s}^N)(W_s - W_{\tau_s})\right) dW_s + \int_0^u b(\tilde{X}_{\tau_s}^N)ds.$$

4. En déduire que pour $t \in [0, T]$,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,t]} (X_u - \tilde{X}_u^N)^2\right] \leq 3\Bigg(4\int_0^t \mathbf{E}\left[\left(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_{\tau_s}^N) - \sigma\sigma'(\tilde{X}_{\tau_s}^N)(W_s - W_{\tau_s})\right)^2\right] ds$$
$$+ \mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^u (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] + t\int_0^t \mathbf{E}[(b(X_{\tau_s}) - b(\tilde{X}_{\tau_s}^N))^2]ds\Bigg). \tag{21}$$

Dans toute la suite $C \in ]0, +\infty[$ désigne une constante qui ne dépend pas de $N$ et peut changer d'une ligne à l'autre.

5. Majoration du second terme du second membre de (20) :

   (a) Calculer $db(X_r)$ et en déduire que pour $u \in [0, T]$

   $$\int_0^{\tau_u} (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds = \int_0^{\tau_u} (\bar{\tau}_r - r)\left(\sigma b'(X_r)dW_r + [bb' + \frac{\sigma^2 b''}{2}](X_r)dr\right)$$

   puis que $\mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^{\tau_u} (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

   (b) Vérifier que

   $$\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_{\tau_u}^u |b(X_s) - b(X_{\tau_s})|ds\right)^2 \leq \frac{T}{N} \max_{0\leq k\leq N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))^2 ds$$
   $$\leq \frac{T}{N} \int_0^T (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))^2 ds,$$

   et conclure que $\mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^u (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

6. Majoration du premier terme du second membre de (20) **en supposant** $\sigma\sigma'$ **lipschitzienne** :

   (a) Calculer $d\sigma(X_r)$ par la formule d'Itô.

   (b) En déduire que pour $s \in [0,T]$,

$$\sigma(X_s) - \sigma(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s}) = \int_{\tau_s}^{s} (\sigma\sigma'(X_r) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s}))dW_r + \int_{\tau_s}^{s} [b\sigma' + \frac{\sigma^2\sigma''}{2}](X_r)dr,$$

   puis que $\forall s \in [0,T],\ \mathbf{E}\left[(\sigma(X_s) - \sigma(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s}))^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

   (c) Conclure que pour tout $s \in [0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}^N_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s})\right)^2\right] \leq C\left(\mathbf{E}[(X_{\tau_s} - \tilde{X}^N_{\tau_s})^2] + \frac{1}{N^2}\right).$$

7. En supposant $\sigma\sigma'$ lipschitzienne, vérifier que

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,t]} (X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right] \leq C\left(\int_0^t \mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,s]} (X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right]ds + \frac{1}{N^2}\right)$$

   et conclure que $\mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} (X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right] \leq \dfrac{C}{N^2}$ si $\int_0^T \mathbf{E}\left[\sup_{u\in[0,t]}(X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right]dt < +\infty$. Comment se passer de cette hypothèse d'intégrabilité?

8. On ne suppose plus que la fonction $\sigma\sigma'$ est lipschitzienne.

   (a) Vérifier que pour $r \in [0,T]$, $\mathbf{E}[(\sigma\sigma'(X_r) - \sigma\sigma'(X_{\tau_r}))^2]$ est majoré par

$$2\left(\|\sigma'\|^2_\infty \mathbf{E}[(\sigma(X_r) - \sigma(X_{\tau_r}))^2] + \|\sigma''\|^2_\infty \mathbf{E}[\sigma^2(X_{\tau_r})\mathbf{E}[(X_r - X_{\tau_r})^2|\mathcal{F}_{\tau_r}]]\right),$$

   puis par $\frac{C}{N}$.

   (b) Pour $s \in [0,T]$, majorer $\mathbf{E}[(\sigma\sigma'(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2(W_s - W_{\tau_s})^2]$ par

$$\frac{2T}{N}\left(\|\sigma'\|^2_\infty \mathbf{E}[(\sigma(X_{\tau_s}) - \sigma(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2] + 2\|\sigma'\|_\infty \mathbf{E}^{1/2}[\sigma^4(X_{\tau_s})]\mathbf{E}^{1/2}[(\sigma'(X_{\tau_s}) - \sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2]\right)$$

   puis par $C\left(\mathbf{E}[(X_{\tau_s} - \tilde{X}^N_{\tau_s})^2] + \frac{1}{N^2}\right)$ (*on pourra utiliser que* $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$).

   (c) Conclure que le contrôle de la vitesse forte quadratique obtenu à la question 7 reste vrai.

9. Expliquer comment généraliser à toute constante $p \geq 1$ l'analyse de l'erreur forte $\mathbf{E}[\sup_{u\in[0,T]} |X_u - \tilde{X}^N_u|^{2p}]$ effectuée ci-dessus dans le cas particulier $p = 1$.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 9 février 2012 8h30-11h30

## Partie I : Biaisage gaussien “prévisible”

Soit $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur de gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

1. Soit $\phi$ une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ bornée. Décrire une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $\mathbf{E}\left(\phi(G_1, \cdots, G_n)\right)$. Comment peut on estimer l'erreur de la méthode proposée ?

On considère $n$ fonctions $\lambda_i(g)$, $i = 1, \ldots, n$, telles que : $\lambda_i(g) = f_i(g_1, \ldots, g_{i-1})$, où les $f_i$ sont des fonctions de $\mathbf{R}^{i-1}$ dans $\mathbf{R}$, supposées régulières et bornées ($f_1$ et donc $\lambda_1$ sont supposées constantes).
On note $R_\lambda$ la transformation de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui associe à $g$, $g' = R_\lambda(g)$ dont les coordonnées sont calculées par, $i$ croissant de 1 à $n$,

$$g'_i = g_i + f_i(g'_1, \ldots, g'_{i-1}) = g_i + \lambda_i(g').$$

2. Montrer que $R_\lambda$ est une transformation bijective de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On vérifiera que $R_\lambda^{-1}$ son inverse est donné par $R_\lambda^{-1}(g')_i = g'_i - \lambda_i(g')$.

   Montrer que le déterminant de la matrice jacobienne de $R_\lambda^{-1}$ est identiquement égal à 1.

On définit la variable aléatoire $M_n^\lambda(G)$ par

$$M_n^\lambda(G) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(G)\right)$$

3. Soit $\mathcal{F}_i = \sigma(G_1, \ldots, G_i)$ montrer que, pour $i \leq n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda_i(G)G_i - \frac{1}{2}\lambda_i^2(G)\right)|\mathcal{F}_{i-1}\right) = 1.$$

   En déduire que $\mathbf{E}(M_n^\lambda(G)) = 1$.

4. Vérifier que l'on définit une nouvelle probabilité $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ en posant

$$\mathbf{P}^{(\lambda)}(A) = \mathbf{E}\left(M_n^\lambda(G)\mathbf{1}_{\{A\}}\right).$$

   et que l'on a ($\mathbf{E}^{(\lambda)}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbf{P}^{(\lambda)}$)

$$\mathbf{E}^{(\lambda)}(X) = \mathbf{E}\left(M_n^\lambda(G)X\right)$$

   pour toute variable aléatoire $\mathbf{P}^{(\lambda)}$-intégrable $X$.

5. En utilisant le changement de variable $g = R_\lambda^{-1}(g')$, montrer que la loi de $G$ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ est identique à celle de $R_\lambda(G)$ sous $\mathbf{P}$. En déduire une méthode de simulation de la loi de $G$ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$.

6. On note $X^\lambda = \phi(G)/M_n^\lambda(G)$. Vérifier que $\mathbf{E}^{(\lambda)}(X^\lambda) = \mathbf{E}\left(\phi(G)\right)$ et montrer que la variance de $X^\lambda$ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ est donnée par

$$\mathrm{Var}^{(\lambda)}(X^\lambda) = \mathbf{E}\left(e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(G)}\phi(G)^2\right) - \mathbf{E}\left(\phi(G)\right)^2$$

7. Comment peut on simuler une variable aléatoire dont la loi est celle de $X^\lambda = \phi(G)/M_n^\lambda(G)$ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ ? Quel est l'intérêt de pouvoir représenter $\mathbf{E}\left(\phi(G)\right)$ sous la forme $\mathbf{E}^{(\lambda)}(X^\lambda)$ ?

8. Pour $\alpha$ un réel donné, on pose $u(\alpha) = \text{Var}^{(\alpha\lambda)}(X^{\alpha\lambda})$. Montrer que $u$ est une fonction différentiable et que :

$$u'(\alpha) = \mathbf{E}\left( \left(\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i(G)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i\right) e^{-\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2\lambda_i(G)^2} \phi(G)^2 \right).$$

On notera, en particulier, que $u'(0)$ vaut $-\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i\right)\phi(G)^2\right)$.

9. Montrer que $u$ est deux fois différentiable et que $u''$ peut s'exprimer sous la forme

$$u''(\alpha) = \mathbf{E}\left( \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i(G)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i\right)^2 \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\, e^{-\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2\lambda_i(G)^2} \phi(G)^2 \right)$$

10. On suppose dans la fin de ce problème que la fonction $\phi|\lambda|$ est non nulle sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle. Montrer que $u$ est strictement convexe et que $\lim_{\alpha\to\pm\infty} u(\alpha) = +\infty$.

11. Montrer que si $u'(0) \neq 0$, il existe un $\alpha$ tel que $u(\alpha) < u(0)$, puis que, pour ce $\alpha$, $\alpha\lambda$ est un choix qui permet de réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo.

12. Montrer, en utilisant la stricte convexité de $u$, que si $u'(0) = 0$, $0$ réalise le minimum $u$. Interpréter ce résultat.

13. On suppose, pour cette question, que $\lambda$ est un vecteur de fonctions paires (c'est à dire qui vérifie, pour tout $g$, $\lambda(-g) = \lambda(g)$ non nul et que la fonction $\phi^2$ est paire. Montrer que, sous ces hypothèses, $\lambda$ ne permet pas de réduire la variance.

## Partie II : Convergence en loi de l'erreur renormalisée du schéma d'Euler

On s'intéresse à la discrétisation du modèle de Black-Scholes $X_t = e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$ où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien réel. On se donne un horizon $T$ et un nombre $N \in \mathbf{N}^*$ de pas de discrétisation. Pour $k \in \{0,\dots,N\}$, on pose également $t_k = \frac{kT}{N}$. Pour une suite réelle $(x_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $x_N = \mathcal{O}(N^\alpha)$ lorsque la suite $(N^{-\alpha}x_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ est bornée.

1. Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $(X_t)_{t\geq 0}$.

2. Écrire le schéma d'Euler $(X^N_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ associé à cette équation. Donner également le schéma de Milstein $(\tilde{X}^N_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$.

3. Calculer $\mathbf{E}(X^N_T)$ et vérifier que $\mathbf{E}(X^N_T) = \mathbf{E}(X_T) + \mathcal{O}(\frac{1}{N})$. Commenter ce résultat.

4. On pose
$$A^N_k = \frac{X^N_{t_k}}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right).$$
Exprimer $A^N_k$ à l'aide de $(\frac{X^N_{t_k}}{X_{t_k}}, \frac{X^N_{t_{k+1}}}{X_{t_{k+1}}})$ et en déduire que $X_T - X^N_T = X_T\sum_{k=0}^{N-1} A^N_k$.

5. On pose
$$\begin{aligned}
R^N_k &= e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1 - \frac{\sigma^2}{2}(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 \\
V^N_k &= \left(\frac{X_{t_k}}{X_{t_{k+1}}} - 1\right)\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right) \\
Z^N_k &= \frac{X_T}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right)(X^N_{t_k} - X_{t_k}).
\end{aligned}$$
Vérifier que $R^N_k + V^N_k + \dfrac{Z^N_k}{X_T} = A^N_k - \dfrac{\sigma^2}{2}((W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 - t_1)$. En déduire que
$$\sqrt{N}(X_T - X^N_T) = X_T\left(\frac{\sigma^2}{2}S_N + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(R^N_k + V^N_k)\right) + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z^N_k$$
où $S_N = \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}[(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 - t_1]$.

On se donne $(G_k)_{k\geq 0}$ suite de variables gaussiennes centrées de variance $T$ indépendantes de $(W_t)_{t\geq 0}$.

6. (a) Montrer que $(W_T, S_N)$ et $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(G_k, G_k^2 - T)$ ont même loi.
   (b) Montrer que lorsque $N \to \infty$, $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N)$ converge en loi vers un couple $(\mathcal{W}, \Sigma)$ dont on précisera la loi.
   (c) Conclure que $\frac{\sigma^2}{2}X_T S_N$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

D'après les questions 9 à 11, $\mathbf{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R^N_k + X_T V^N_k + Z^N_k)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

7. En admettant provisoirement ce résultat, montrer que $\sqrt{N}(X_T - X^N_T)$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

Sous des hypothèses de régularité sur $\eta, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Kurtz et Protter[11] ont montré que si $X_t$ est solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \eta(X_t)dW_t + b(X_t)dt$ et $X_t^N$ désigne son schéma d'Euler en temps continu, alors le processus $(\sqrt{N}(X_t - X_t^N))_{t\geq 0}$ converge en loi vers $(Y_t)_{t\geq 0}$ solution de

$$Y_t = \int_0^t Y_s(\eta'(X_s)dW_s + b'(X_s)ds) + \sqrt{\frac{T}{2}}\int_0^t \eta\eta'(X_s)dB_s$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$.

8. Dans le cas particulier du modèle de Black-Scholes, calculer $d\frac{1}{X_t}$ puis $d\frac{Y_t}{X_t}$. En déduire $Y_T$ et vérifier que la convergence établie à la question 7 est bien une conséquence du résultat général de Kurtz et Protter.

9. (a) Calculer $\mathbf{E}(R_0^N)$ et en déduire que $\mathbf{E}(R_k^N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.
   Montrer que $R_0^N = \sigma\int_0^{t_1}(X_s - 1 - \sigma W_s)dW_s + \mu\int_0^{t_1}(X_s - 1)ds$. Calculer $\mathbf{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2)$, vérifier que $\mathbf{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2) = \mathcal{O}(s^2)$ pour $s \to 0^+$ et en déduire que $\mathbf{E}((R_0^N)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$.
   (b) Montrer que $\mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right)^2\right) = N(N-1)\mathbf{E}((R_0^N))^2 + N\mathbf{E}((R_0^N)^2)$.
   (c) Conclure que $\mathbf{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

On pose $D_k^N = e^{\sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1$.

10. (a) Calculer $\mathbf{E}(V_0^N)$ et vérifier que $\mathbf{E}(V_0^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
   (b) Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $\frac{1}{X_t}$ et vérifier que $\mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{X_{t_1}} - 1\right)^4\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
   En remarquant que $D_0^N = \int_0^{t_1}(X_s - 1)(\sigma dW_s + \mu ds)$, vérifier que $\mathbf{E}((D_0^N)^4) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$. En déduire que $\mathbf{E}((V_0^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.
   (c) Conclure que $\mathbf{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} V_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

11. (a) Vérifier que $\mathbf{E}((D_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
   (b) À l'aide de la vitesse forte, en déduire $\mathbf{E}((Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.
   (c) Pour $0 \leq l < k \leq N-1$, vérifier que

$$\mathbf{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathbf{E}(X_{T-t_{k+1}}^2)\mathbf{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}}D_k^N\right)\mathbf{E}\left((X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}}D_l^N(X_{t_l}^N - X_{t_l})\right).$$

   Vérifier que $\mathbf{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}}D_k^N\right) = e^{\mu t_1}\left(e^{(\mu+\sigma^2)t_1} - 1 - (\mu + \sigma^2)t_1\right)$. Remarquer que

$$\mathbf{E}\left|(X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}}D_l^N(X_{t_l}^N - X_{t_l})\right| \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(\sup_{t\leq T}(X_t^N - X_t)^4\right)\mathbf{E}(X_{t_k - t_{l+1}}^2)\mathbf{E}((D_l^N)^2)}$$

   et en déduire que $\mathbf{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$.
   (d) Conclure que $\mathbf{E}((\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ et que

$$\mathbf{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R_k^N + X_T V_k^N + Z_k^N)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

[11] Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. Stochastic analysis, 331–346, Academic Press, Boston, MA, 1991.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 10 février 2011 8h30-11h30

## Partie I : Simulation directionnelle et stratification

Soit $G = (G_1, \ldots, G_d)$ un vecteur constitué de $d$ gaussiennes centrées réduites indépendantes et $H$ un fonction continue de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ et on cherche à calculer la probabilité :

$$p = \mathbf{P}\left(H(G) \geq \lambda\right),$$

pour une valeur $\lambda$ positive donnée.

1. Décrire la méthode de Monte-Carlo habituelle permettant d'estimer $p$ et expliquer comment l'on peut évaluer l'erreur de la méthode.

2. On suppose que l'on cherche à approche une valeur de $p$ de l'ordre de $10^{-10}$. Donner une évaluation (grossière) du nombre minimal de tirages $n$ permettant d'évaluer $p$ à $20\%$ près. Lorsque le calcul de $H$ demande un temps de l'ordre d'une seconde, qu'en concluez vous ? (1 an $\approx 3 \times 10^7$ secondes)

3. On écrit le vecteur $G$ sous la forme $G = RA$ où $R = |G|$ et $A = G/|G|$ prend ses valeurs dans la sphère unité de $\mathbf{R}^d$, $S_d = \{x \in \mathbf{R}^d, |x| = 1\}$. Montrer que $R^2$ suit une loi du $\chi^2$ à $d$ degrés de liberté et que $A$ suit une loi invariante par rotation dont le support est inclu dans $S_d$ (On admettra que cela implique que la loi de $A$ est la loi uniforme sur la sphère).

4. A l'aide du changement de variable polaire généralisé $(g_1, \ldots, g_d) \to (r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$

$$\begin{cases} g_1 & = r\cos\theta_1 \\ g_2 & = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & \ldots \\ g_{d-1} & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1} \\ g_d & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \end{cases}$$

   montrer que $R$ et $A$ sont des variables aléatoires indépendantes.

5. On suppose, à partir de maintenant, que pour tout $a \in S_d$ la fonction $r \to H(ra)$ est strictement croissante, que $H(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} H(ra) = +\infty$.

   Soit $a \in S_d$, on pose $\phi(a) = \mathbf{P}(H(Ra) \geq \lambda)$. Calculer explicitement $\phi(a)$ en fonction de la fonction de répartition de la loi du $\chi^2$ à $d$ degrés de liberté et de la solution de $H(r^*a) = \lambda$.

6. Soit $(A_i, i \geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur la sphère unité. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \phi(A_i) = p$, au sens de la convergence presque sûre.

7. Montrer que $\mathrm{Var}(\phi(A_1)) \leq \mathrm{Var}\left(\mathbf{1}_{H(G)\geq\lambda}\right)$ et comparer la vitesse de convergence de l'estimateur de la question 1 et celui de la question précédente.

8. Nous allons maintenant réduire la variance de l'estimateur précédent par une technique de stratification.

   On considère les $2^d$ quadrants définit, pour $\epsilon \in \{-1, +1\}^d$, par :

$$C_\epsilon = \{x \in S_d, \epsilon_1 x_1 \geq 0, \ldots, \epsilon_d x_d \geq 0\}.$$

   Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \in C_\epsilon \cap C_{\epsilon'}) = 0$, pour $\epsilon \neq \epsilon'$. En déduire la valeur de $\rho_\epsilon = \mathbf{P}(A_1 \in C_\epsilon)$ ?

9. On considère l'estimateur $I_n$ stratifié dans les strates $(C_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ :

$$I_n = \sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d} \frac{\rho_\epsilon}{n_\epsilon} \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \phi(A_k^{(\epsilon)}),$$

où $n_\epsilon = n w_\epsilon(n)$ avec $w_\epsilon(n) \geq 0$ et $\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d} w_\epsilon(n) = 1$ et où les $(A_k^{(\epsilon)}, k \geq 0)$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $C_\epsilon$, ces suites étant indépendantes entre elles.

Calculer $\mathrm{Var}(I_n)$ en fonction de $n$ et des $(w_\epsilon(n), \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$, des $(\rho_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ et des $(\sigma_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ où $\sigma_\epsilon^2 = \mathrm{Var}(A_1^{(\epsilon)})$.

10. Montrer l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i^2,$$

pour $(\alpha_i, a_i, 1 \leq i \leq N)$ des réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

En déduire que $\mathrm{Var}(I_n) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d)} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon\right)^2$.

Comment peut on choisir les $(w_\epsilon(n), \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ pour réaliser la borne inférieure précédente ?

11. Proposer une méthode de simulation selon la loi uniforme sur $C_\epsilon$ ?

12. On fixe une fois pour toute les $w_\epsilon$ (indépendement de $n$) par :

$$w_\epsilon = \frac{\rho_\epsilon \sigma_\epsilon}{\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^p} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon}.$$

On pose $n_\epsilon = [n w_\epsilon]$. Montrer que, au sens de la convergence presque sûre :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = p.$$

13. Montrer que la limite en loi des variables aléatoires : $\sqrt{n}(I_n - p)$ est une gaussienne centrée de variance $\left(\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d)} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon\right)^2$.

Comment peut on utiliser ce résultat pour estimer l'erreur commise lorsque l'on estime $p$ à l'aide de $I_n$ ?

## Partie II : Discrétisation d'une équation différentielle stochastique à coefficients localement lipschitziens

Pour $(W_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$ et $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, on s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt, \ t \leq T, \ X_0 = y. \tag{22}$$

On suppose que les fonctions $\sigma$ et $b$ sont localement lipschitziennes au sens où pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ il existe une constante $C_m < +\infty$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } |x| \leq m \text{ et } |y| \leq m, \ |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C_m |x - y|.$$

On note

$$\sigma_m(x) = \sigma(P_m x) \ \text{ et } \ b_m(x) = b(P_m x) \ \text{ où } \ P_m x = \tfrac{|x| \wedge m}{|x|} x \tag{23}$$

désigne la projection orthogonale de $x$ sur la boule fermée de rayon $m$ centrée à l'origine. On pose également $t_k = k \Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbf{N}^*$ est un nombre de pas de temps.

**Absence de convergence faible et dans $L^p$ dans un cas particulier** On s'intéresse à l'EDS en dimension $n = d = 1$

$$X_t = W_t - \int_0^t X_s^3 ds. \tag{24}$$

On admet pour l'instant qu'elle possède une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et que cette solution vérifie $\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^4\right) < +\infty$.
On note $(\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler en temps continu associé et on pose $A_N = \{|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T},\ \sup_{1\leq k\leq N-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \leq 1\}$.

1. Vérifier que $\mathbf{P}(A_N) \geq \mathbf{P}(|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T})\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2})$. En remarquant que pour $x > 0$, $\frac{e^{-x^2/2}}{x} = \int_x^\infty (1 + \frac{1}{y^2})e^{-y^2/2}dy$, vérifier que $\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy \geq \frac{xe^{-x^2/2}}{1+x^2}$.
   Conclure que $\mathbf{P}(A_N) \geq \mathbf{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2}) \times \frac{6(NT)^{\frac{3}{2}}}{T^3+9N^3} \times \frac{e^{-\frac{9N^3}{2T^3}}}{\sqrt{2\pi}}$.

2. Vérifier que sur l'événement $A_N$, si pour $k \geq 1$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq 1$, alors $|\bar{X}_{t_{k+1}}^N| \geq |\bar{X}_{t_k}^N|^2 \left(\frac{T}{N}|\bar{X}_{t_k}^N| - 2\right)$. En déduire que pour $N \geq \frac{T}{3}$, sur l'événement $A_N$, $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq \left(\frac{3N}{T}\right)^{2^{k-1}}$.

3. Conclure que $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(|\bar{X}_T^N|) = +\infty$. En déduire $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(|\bar{X}_T^N - X_T|)$ puis $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t^N - X_t|^p)$ pour $p \geq 1$.

4. En remarquant que la loi de $\bar{X}_T^N$ est symétrique, montrer que pour $K > 0$, $\mathbf{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right) \geq \frac{1}{2}\mathbf{E}(|\bar{X}_T^N|) - K$ et en déduire que $\mathbf{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right)$ ne converge pas vers $\mathbf{E}\left((X_T - K)^+\right)$ lorsque $N \to \infty$.

**Convergence presque sûre du schéma d'Euler** On suppose maintenant qu'il existe une solution à l'EDS (21) (voir le paragraphe  pour une condition suffisante). On pose $\nu_0 = 0$ et pour $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\nu_m = \inf\{t \in [0, T] : |X_t| > m\}$ avec la convention $\inf \emptyset = T$.

5. Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$ associé à (21).

6. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $x, y \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que $(x - P_m x, P_m y - P_m x) \leq 0$ (*dans le cas où* $|x| > m$, *on pourra vérifier que* $(x - P_m x, P_m x) = m|x - P_m x|$).
   En déduire que $|P_m y - P_m x|^2 \leq (y - x, P_m y - P_m x)$ et conclure que les fonctions $\sigma_m$ et $b_m$ sont globalement lipschitziennes de constante de Lipschitz $C_m$.

7. En déduire l'existence d'une unique solution $(X_t^m)_{t\in[0,T]}$ à l'EDS

$$dX_t^m = \sigma_m(X_t^m)dW_t + b_m(X_t^m)dt,\ X_0^m = y. \tag{25}$$

   Décrire l'événement $\{\nu_m = T\}$ à l'aide de la variable aléatoire $\sup_{t\in[0,T]} |X_t|$ et vérifier que sur cet événement $(X_t^m)_{t\in[0,T]}$, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(X_t^{m+1})_{t\in[0,T]}$ coincident. Que vaut $\mathbf{P}(\bigcup_{m\in\mathbf{N}^*}\{\nu_m = T\})$? Y-a-t-il unicité pour (21)?

On note $(\bar{X}_t^{m,N})_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler correspondant à (24) et $\nu_m^N = \min\{t_k : |\bar{X}_{t_k}^{N,m}| > m\}$.

8. Pour quelles valeurs de $\gamma$, la suite $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t^m - \bar{X}_t^{m,N}|$ converge-t-elle presque sûrement lorsque $N \to \infty$ à $m$ fixé?
   En déduire que si $\nu_m(\omega) = T$, alors il existe $\mathcal{N}(\omega) < +\infty$ tel que pour $N \geq \mathcal{N}(\omega)$, $\nu_{m+1}^N(\omega) = T$ et $\sup_{t\leq T} |X_t(\omega) - \bar{X}_t^N(\omega)| = \sup_{t\leq T} |X_t^{m+1}(\omega) - \bar{X}_t^{m+1,N}(\omega)|$.

9. Conclure que pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|$ converge p.s. vers 0 lorsque $N \to \infty$.

**Existence pour l'EDS** (21) **lorsque la dérive est rentrante** On suppose maintenant que $\sigma$ est **globalement lipschitzienne** et que la fonction de dérive $b$ est localement lipschitzienne et rentrante au sens où il existe $\beta \in [0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ (x, b(x)) \leq \beta(|x| + |x|^2). \tag{26}$$

avec $(x, y)$ qui désigne le produit scalaire de $x$ et $y$ dans $\mathbf{R}^n$. On note $(Y_t^m)_{t\in[0,T]}$ l'unique solution de l'EDS

$$dY_t^m = \sigma(Y_t^m)dW_t + b_m(Y_t^m)dt,\ Y_0^m = y.$$

10. Vérifier que toute fonction de dérive globalement lipschitzienne est rentrante. Donner un exemple de fonction de dérive $b$ localement lipschitzienne rentrante mais pas globalement lipschitzienne.

11. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, vérifier que la fonction $b_m$ définie dans (22) satisfait (25).

12. Calculer $|Y_u^m|^2$ à l'aide de la formule d'Itô et en déduire que

$$\mathbf{E}\left(\sup_{u\leq t}|Y_u^m|^4\right) \leq 4\Bigg\{|y|^4 + 4\beta^2\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t |Y_s^m| + |Y_s^m|^2 ds\right)^2\right) + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^t |\sigma(Y_s^m)|^2 ds\right)^2\right) + 16\mathbf{E}\left(\int_0^t |\sigma^*(Y_s^m)Y_s^m|^2 ds\right)\Bigg\}$$

    où $|\sigma(x)|^2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq d}} |\sigma_{ij}(x)|^2$.

13. En déduire que $\sup_m \mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m|^4\right) < +\infty$ puis $\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\in\mathbf{N}^*}\{\tau_m = T\}\right) = 1$ où $\tau_m = \inf\{t \in [0, T] : |Y_t^m| > m\}$ (convention $\inf \emptyset = T$)
    Conclure à l'existence d'une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ pour (21) et que cette solution vérifie $\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^4\right) < +\infty$[12].

C'est l'absence de contrôle des moments du schéma d'Euler qui peut empêcher sa convergence dans $L^p$ et sa convergence faible alors que l'on a convergence presque sûre à la vitesse $N^{-\gamma}$ pour tout $\gamma < 1/2$. Dans un preprint récent, Hutzenthaler, Jentzen et Kloeden ont proposé le schéma explicite suivant :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^N = \tilde{X}_{t_k}^N + \sigma(\tilde{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{b(\tilde{X}_{t_k}^N)\Delta t}{1 + |b(\tilde{X}_{t_k}^N)|\Delta t}.$$

Lorsque la fonction $\sigma$ est globalement lipschitzienne, la matrice jacobienne de $b$ est à croissance polynomiale et $b$ vérifie la condition

$$\exists \alpha \in (0, +\infty),\ \forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ (x - y, b(x) - b(y)) \leq \alpha|x - y|^2$$

qui implique (25) pour le choix $y = 0$, alors ils montrent que ce schéma converge à la vitesse forte $\frac{1}{\sqrt{N}}$ dans tous les espaces $L^p$. Ce résultat de convergence forte reste valable pour le schéma d'Euler semi-implicite

$$\hat{X}_{t_{k+1}}^N - b(\hat{X}_{t_{k+1}}^N)\Delta t = \hat{X}_{t_k}^N + \sigma(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

sous les mêmes hypothèses.

[12] Ce résultat s'applique en particulier à l'EDS (23).

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 11 février 2010 8h30-11h30

## Partie I : Méthode du “carré latin”

**Le cas de la dimension** 1 On considére un suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, $U=(U_i, i\geq 1)$ et une permutation $\sigma$ tirée uniformement sur l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,N\}$ et indépendante de la suite $U$. Pour $N$ entier fixé et pour $1\leq i\leq N$, on pose :

$$Y_i^N = \frac{i-U_i}{N} \text{ et } X_i^N = Y_{\sigma(i)}^N.$$

On considére une fonction mesurable bornée $f$ et l'on cherche à comparer l'estimateur classique :

$$I_0(N) = \frac{1}{N}\left(f(U_1)+\cdots+f(U_N)\right),$$

avec :

$$I_1(N) = \frac{1}{N}\left(f(X_1^N)+\cdots+f(X_N^N)\right)$$

1. Quel est la limite de $I_0(N)$ lorsque $N$ tends vers $+\infty$ ? Comment peut on estimer l'erreur commise lorsque l'on approxime cette limite par $I_0(N)$ ?
2. Pour un $i$ fixé,$1\leq i\leq N$, identifier la loi de $X_i^N$. En déduire que $\mathbf{E}\left(I_1(N)\right)=\mathbf{E}(f(U_1))$
3. Montrer que $I_1(N)=\frac{1}{N}\left(f(Y_1^N)+\cdots+f(Y_N^N)\right)$, et en déduire que
$$N\text{Var}\left(I_1(N)\right) = \int_0^1 f^2(s)ds - N\sum_{k=1}^N\left(\int_{(k-1)/N}^{k/N} f(s)ds\right)^2,$$
4. Vérifier que $N\text{Var}(I_1(N)) = \frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)/N}^{i/N}\int_{(i-1)/N}^{i/N}(f(s)-f(s'))^2 ds ds'$. Lorsque $f$ est une fonction continue, montrer que $N\text{Var}\left(I_1(N)\right)$ tend vers 0 lorsque $N$ tends vers $+\infty$. Que vaut $N\text{Var}\left(I_0(N)\right)$ ?
5. Pour $f$ continue, en quel sens $I_1(N)$ convergente t'il vers $\mathbf{E}(f(U))$ ?
6. Quel estimateur vous parait préférable, $I_0(N)$ ou $I_1(N)$, du point de vue de sa vitesse de convergence en moyenne quadratique ?

   D'un point de vue pratique quels vous paraissent les inconvénients de $I_1(N)$ par rapport à $I_1(N)$ ?
7. Comment peut-on interpréter l'estimateur $I_0(N)$ en terme de méthode de stratification ?

**Le cas de la dimension** 2 On considère maintenant le cas bidimensionnel. $U$ désigne un suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]^2$, $U=((U_i^1,U_i^2), i\geq 1)$ et deux permutations indépendantes $\sigma_1$ et $\sigma_2$ tirée uniformement sur l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,N\}$ et indépendantes de la suite $U$. Pour $N$ entier fixé et pour $1\leq i,j\leq N$, on pose :

$$Y_{i,j}^N = \left(\frac{i-U_i^1}{N},\frac{j-U_j^2}{N}\right) \text{ et } X_i^N = Y_{\sigma_1(i),\sigma_2(i)}^N.$$

On pose, comme dans la première partie, pour $f$ une fonction bornée de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$ :

$$I_0(N) = \frac{1}{N}\left(f(U_1)+\cdots+f(U_N)\right) \text{ et } I_1(N) = \frac{1}{N}\left(f(X_1^N)+\cdots+f(X_N^N)\right)$$

1. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(f(X_i^N)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1\le k\le N\\1\le l\le N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l})\right) = \mathbf{E}\left(f(U_1)\right)$$

2. Montrer que, pour $i \neq j$ :

$$\mathbf{E}\left(f(X_i^N)f(X_j^N)\right) = \frac{1}{N^2(N-1)^2}\sum_{\substack{1\le k_1\neq k_2\le N\\1\le l_1\neq l_2\le N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k_1,l_1})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k_2,l_2})\right),$$

puis que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(f(X_i^N)f(X_j^N)\right) = \frac{1}{N^2(N-1)^2}\Big\{ & N^4\mathbf{E}(f(U_1))^2 - \sum_{\substack{1\le k\le N\\1\le l_1,l_2\le N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l_1})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k,l_2})\right)\\ & - \sum_{\substack{1\le k_1,k_2\le N\\1\le l\le N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k_1,l})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k_2,l})\right) + \sum_{\substack{1\le k\le N\\1\le l\le N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l})\right)^2\Big\}.\end{aligned}$$

3. En déduire que, pour $f$ continue :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}(N-1)\text{Cov}\left(f(X_1^N), f(X_2^N)\right) = 2\mathbf{E}(f(U))^2 & - \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x,y')dxdydy'\\ & - \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x',y)dxdx'dy.\end{aligned}$$

4. Montrer que :

$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right) = \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x,y')dxdydy' - \mathbf{E}\left(f(U)\right)^2,$$

$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right) = \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x',y)dxdx'dy - \mathbf{E}\left(f(U)\right)^2.$$

5. En déduire que :

$$\lim_{N\to+\infty} N\text{Var}(I_1(N)) = \text{Var}(f(U)) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right).$$

6. Quel est l'intérêt d'utiliser $I_1(N)$ plutôt que $I_0(N)$ ? Quels en sont les inconvénients ?

7. Vérifier que :

$$\begin{aligned}\text{Var}\left\{f(U) - \mathbf{E}(f(U)|U_1) - \mathbf{E}(f(U)|U_2)\right\} = & \text{Var}(f(U)) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right)\\ & -\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right).\end{aligned}$$

## Partie II : discrétisation d'un modèle à volatilité stochastique

On considère le modèle à volatilité stochastique

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + f(Y_t)S_t(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t); \quad S_0 = s_0 > 0 \\ dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t; \quad Y_0 = y_0 \end{cases}, \tag{27}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants, $r \in \mathbf{R}$, $\rho \in [-1,1]$ et $f, b, \sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions régulières (c'est-à-dire bornées et dérivables autant de fois qu'on le souhaite avec des dérivées bornées) avec $\sigma$ qui ne s'annule pas.
On pose $X_t = \ln(S_t)$, $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbf{N}^*$ est un nombre de pas de temps et $T > 0$ une maturité.

1. Que représente le coefficient $\rho$?
2. Écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par le couple $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$.
3. Comment s'écrit le schéma de Milstein $(\bar{Y}^N_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ de pas $\Delta t$ pour le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$? Rappeler sans preuve le résultat de convergence forte du cours pour ce schéma.
4. Déterminer la condition de commutativité qui permet d'implémenter le schéma de Milstein pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$. Que peut-on dire de la volatilité de $(S_t)_{t\geq 0}$ lorsque la fonction $\sigma$ est nulle? Et lorsque $f'$ est nulle? Écrire le schéma de Milstein de pas $\Delta t$ pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$ lorsque $|\rho| = 1$.
5. On note $\boxed{F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{f}{\sigma}(z)dz}$. Vérifier que
$$dX_t = \rho dF(Y_t) + \sqrt{1-\rho^2} f(Y_t)dB_t + h(Y_t)dt,$$
pour une fonction $h$ que l'on précisera.

On définit par récurrence $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ en posant $\bar{X}_0 = \ln(s_0)$ et $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \rho(F(Y_{t_{k+1}}) - F(Y_{t_k})) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(Y_s)ds + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

6. Vérifier que les vecteurs aléatoires $(\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))_{1\leq k\leq N}$ et $(\int_0^{t_k} f(Y_s)dB_s)_{1\leq k\leq N}$ ont même loi conditionnelle sachant $(W_t)_{t\in[0,T]}$. En déduire que les vecteurs $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ et $(X_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ ont même loi.

On définit par récurrence le schéma suivant : $\bar{X}^N_0 = \ln(s_0)$ et pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\bar{X}^N_{t_{k+1}} = \bar{X}^N_{t_k} + \rho\left(F(\bar{Y}^N_{t_{k+1}}) - F(\bar{Y}^N_{t_k})\right) + h(\bar{Y}^N_{t_k})\Delta t + \sqrt{1-\rho^2}\eta^N_k \times (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

$$\text{où } \eta^N_k = \sqrt{\left(\psi(\bar{Y}^N_{t_k}) + \frac{\sigma\psi'(\bar{Y}^N_{t_k})}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})ds\right) \vee \underline{\psi}}$$

avec $\psi(y) = f^2(y)$ et $\underline{\psi} = \inf_{y\in\mathbf{R}} \psi(y) = \inf_{y\in\mathbf{R}} f^2(y) \geq 0$. L'objectif final de cet énoncé est de montrer que si $\underline{\psi} > 0$ alors

$$\exists C > 0,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{E}\left(\max_{0\leq k\leq N} |\bar{X}_{t_k} - \bar{X}^N_{t_k}|^2\right) \leq \frac{C}{N^2} \tag{28}$$

**Dans le reste de l'énoncé on notera $C$ des constantes indépendantes de $N$ qui peuvent varier de ligne en ligne.**

7. Comment peut-on simuler le vecteur $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}, \int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})ds)_{0\le k\le N-1}$? En quoi, pour le pricing d'options exotiques, le schéma $(\bar{X}^N_{t_k})_{0\le k\le N}$ est-il aussi performant que le schéma de Milstein?

8. Vérifier que

$$\max_{0\le k\le N}|\bar{X}_{t_k} - \bar{X}^N_{t_k}|^2 \le C\left(T^N_1 + \max_{1\le k\le N}(T^N_{2,k})^2 + \max_{1\le k\le N}(T^N_{3,k})^2\right)$$

$$\text{où } T^N_1 = \max_{0\le k\le N}(F(Y_{t_k}) - F(\bar{Y}^N_{t_k}))^2 + \max_{1\le k\le N}\left(\Delta t\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j}) - h(\bar{Y}^N_{t_j}))\right)^2,$$

$$T^N_{2,k} = \int_0^{t_k} h(Y_s)ds - \Delta t\sum_{j=0}^{k-1}h(Y_{t_j}),$$

$$T^N_{3,k} = \sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta^N_j - \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds}\right)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

9. Vérifier que $\max_{1\le k\le N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j}) - h(\bar{Y}^N_{t_j}))\right)^2 \le \max_{1\le k\le N-1}(h(Y_{t_k}) - h(\bar{Y}^N_{t_k}))^2$ et en déduire que $\mathbf{E}(T^N_1) \le \frac{C}{N^2}$?

10. Vérifier que $T^N_{2,k} = \int_0^{t_k}(\bar{\tau}_s - s)\left((bh' + \frac{\sigma^2 h''}{2})(Y_s)ds + \sigma h'(Y_s)dW_s\right)$ où, pour $s \in [0,T]$, $\bar{\tau}_s = \lceil \frac{s}{\Delta t}\rceil\Delta t$ désigne l'instant de discrétisation juste après $s$. En déduire que $\mathbf{E}(\max_{1\le k\le N}(T^N_{2,k})^2) \le \frac{C}{N^2}$.

11. (a) Que peut-on dire du processus $(T^N_{3,k})_{1\le k\le N}$? En utilisant l'inégalité de Doob et le caractère lipschitzien de la racine carrée sur $[\underline{\psi}, +\infty[$, en déduire que

$$\mathbf{E}\left(\max_{1\le k\le N}(T^N_{3,k})^2\right) \le \frac{C}{N}\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{N-1}((\bar{T}^j_3)^2 + (\tilde{T}^j_3)^2)\right)$$

$$\text{où } \bar{T}^j_3 = \psi(\bar{Y}^N_{t_j}) - \psi(Y_{t_j}) + \frac{\sigma\psi'(\bar{Y}^N_{t_j}) - \sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s - W_{t_j})ds$$

$$\text{et } \tilde{T}^j_3 = \psi(Y_{t_j}) + \frac{\sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s - W_{t_j})ds - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds.$$

   (b) Calculer $\mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s - W_{t_j})ds\right)^2 \middle| (W_u)_{u\le t_j}\right)$ et en déduire que $\mathbf{E}((\bar{T}^j_3)^2) \le \frac{C}{N^2}$.

   (c) Vérifier que $\tilde{T}^j_3 = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s - \bar{\tau}_s)\left((b\psi' + \frac{\sigma^2\psi''}{2})(Y_s)ds + (\sigma\psi'(Y_s) - \sigma\psi'(Y_{t_j}))dW_s\right)$ et en déduire que $\mathbf{E}((\tilde{T}^j_3)^2) \le \frac{C}{N^2}$.

12. Conclure que (27) est vraie.

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 5 février 2009 8h30-11h30

## Partie I : Réduction de variance et invariance de loi

Soit $(U_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
On considère une application de $T$ de l'intervalle $[0,1]$ dans l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $T$ est telle que loi$(T(U)) =$ loi$(U)$, si $U$ est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
On s'intéresse pour un $p \geq 1$ fixé à l'estimateur $I_{n,p}$ donné par

$$I_{n,p} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(T^k(U_i)\right)$$

1. Montrer que, si $f$ est une fonction mesurable bornée de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ :

$$\lim_{n \to +\infty} I_{n,p} = \mathbf{E}\left(f(U)\right) \ p.s.$$

2. Montrer que $\text{Var}(I_{n,p}) = \frac{1}{np} v_p(f)$, avec

$$v_p(f) = \frac{1}{p} \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{p-1} f\left(T^k(U_1)\right)\right)$$

3. Montrer que $\sqrt{np}\frac{I_{n,p} - \mathbf{E}(f(U_1))}{\sqrt{v_p(f)}}$ converge en loi lorsque $n$ tend $+\infty$ vers une loi gaussienne centrée réduite.

4. Supposons que l'on ait effectué $n$ tirages $(U_i, i = 1, \ldots, n)$. Comment peut on estimer $v_p(f)$ ? Comment en déduire une procédure effective d'estimation de l'erreur commise lorsque l'on approxime $\mathbf{E}\left(f(U)\right)$ par $I_{n,p}$ ?

5. Quelle méthode reconnaît on lorsque $T(u) = 1 - u$ et $p = 2$ ? A t'on intérêt à utiliser des valeurs de $p > 2$ ?

6. On prend pour $T$ la transformation de Kakutani définie par, pour $l \geq 1$ :

$$T(x) = (x - x_{l-1}) + \frac{1}{2^l}, \text{pour } x_{l-1} \leq x < x_l.$$

   où $x_0 = 0$ et $x_l = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^l$. Vérifier que $T$ laisse la loi de $U_1$ invariante.

7. Vérifier que si $T$ est la transformation de Kakutani la suite $(T^k(0), k \geq 0)$ coïncide avec la suite de Van Der Corput en base 2. Donner la définition de la discrépance d'une suite $D_n^*(x_k, k \geq 1)$. Quelle estimation de la discrépance de la suite de Van Der Corput connaissez vous ?

   *On supposera que, lorsque $T$ est la transformation de Kakutani, la discrépance de la famille de suite $(T^k(x), k \geq 0)$ est majorée, uniformément en $x \in [0,1]$, par :*

$$C\frac{\log(n)}{n}$$

8. Lorsque $T$ est la transformation de Kakutani, montrer que, si $f$ est une fonction à variation finie de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, de variation $V(f)$, alors

$$v_p(f) \leq C^2 V(f)^2 \frac{\log^2(p)}{p},$$

En déduire que, pour $p$ assez grand, on a intérêt à utiliser l'estimateur $I_{n,p}$ de préférence à l'estimateur (classique) $I_{np,1}$ utilisant le même nombre d'appel à la fonction $f$.

9. On considère $\mathcal{I}$ la sous tribu de la tribu $\mathcal{A}$ des boréliens de $[0,1]$ définie par :

$$\mathcal{I} = \left\{ A \in \mathcal{A}, T^{-1}(A) = A \right\}.$$

On rappelle que si $f$ est $\mathcal{I}$-mesurable alors $f(T(x)) = f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$.

On considère une fonction mesurable et bornée $f$, on note $\hat{f} = \mu(f|\mathcal{I})$ (l'espérance conditionnelle de $f$ sachant la tribu $\mathcal{I}$ sous la probabilité uniforme sur $[0,1]$, notée $\mu$) et $\tilde{f}(x) = f(x) - \hat{f}(x)$. Montrer que :

$$I_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(U_i) + \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{f}\left(T^{k-1}(U_i)\right)$$

10. Montrer, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle dans $L^2$ que :

$$\mu\left(\hat{f}\tilde{f}\right) = \int_0^1 \hat{f}(x)\tilde{f}(x)dx = 0.$$

En déduire que $\mathrm{Var}(I_{n,p}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(\hat{f}(U_1)\right) + \frac{1}{np} v_p(\tilde{f})$.

11. Si $\hat{f}$ est non constante, a t'on intérêt à utiliser une méthode avec $p > 1$ ?

# Partie II :Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

On considère l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t + b(X_t)\, dt, \tag{29}$$

où $b$ et $\sigma$ sont des fonctions lipschitziennes. Le processus $(W_t)$ est un mouvement brownien standard unidimensionnel.

On se donne une condition initiale $X_0 = x$ déterministe. Enfin, on se fixe un horizon en temps $T$ et un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de pas de temps. Pour $k \in \{0, \dots, N\}$ on note $t_k = \frac{kT}{N}$ le $k$-ème instant de discrétisation et $\bar{X}^N_{t_k}$ la valeur en $t_k$ du schéma d'Euler de pas $\frac{T}{N}$.

Le but de ce problème est de montrer l'estimation suivante (issue de la thèse de P. Seumen Tonou) : pour tout $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left(\left|\max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k}\right|^{2p}\right) \leq C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^p. \tag{30}$$

**Dans l'inégalité précédente et dans tout le reste de l'énoncé on notera $C$ des constantes indépendantes de $N$ qui peuvent varier de ligne en ligne.** On pose

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k},\\
\varepsilon_1 &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k},\\
\varepsilon_2 &= \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k} - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k}.
\end{aligned}$$

1. Montrer

   $$\varepsilon_2 \leq \max_{0\leq k\leq N}(X_{t_k} - \bar{X}^N_{t_k}),$$

   puis

   $$\varepsilon_2 \geq -\max_{0\leq k\leq N}(\bar{X}^N_{t_k} - X_{t_k}).$$

   Appliquer un résultat du cours pour en déduire

   $$\mathbb{E}\left(|\varepsilon_2|^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^p}.$$

2. Montrer que

   $$\varepsilon_1 \leq \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}(X_t - X_{t_k})\right).$$

   En déduire que

   $$\begin{aligned}
   |\varepsilon_1|^{2p} \;\leq\; & C\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t b(X_s)\, ds\right)^{2p}\\
   & + C\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t \sigma(X_s)\, dW_s\right)^{2p}.
   \end{aligned}$$

3. En utilisant l'inégalité

   $$\max_{0\leq k\leq N-1}|x_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1}|x_k| \tag{31}$$

   montrer que

   $$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t b(X_s)\, ds\right)^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^{2p-1}}.$$

4. (a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}[\sigma(X_s)\ -\sigma(X_{t_k})]dW_s\right)^{2p}\right)\leq\frac{C}{N^{2p-1}}.$$

   (b) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\sigma(X_{t_k})dW_s\right)^{2p}\right)$$
$$\leq C\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}|W_t-W_{t_k}|\right)^{4p}\right)}.$$

   (c) Rappeler la densité de la loi de $(W_{t_1},\max_{0\leq t\leq t_1}W_t)$. En déduire celle de $\max_{0\leq t\leq t_1}W_t$ puis que $\max_{0\leq k\leq N-1}\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}(W_t-W_{t_k})$ a même loi que

$$\sqrt{t_1}\max_{0\leq k\leq N-1}|G_k|$$

   où les variables aléatoires $(G_k)_{0\leq k\leq N-1}$ sont i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0,1)$.

   (d) Soit $q$ le plus petit entier impair qui majore $4p$. Montrer que pour $x>0$, $\mathbf{E}(|G_0|^q 1_{\{|G_0|\geq x\}})=P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $P(.)$ est un polynôme de degré $q-1$. En déduire à l'aide de (30) que pour $\alpha>2$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(|G_k|^{4p}1_{\{|G_k|\geq\sqrt{\alpha\ln(N)}\}}\right)\right)=0,$$

   puis que pour $N\geq 2$, $\mathbf{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}|G_k|^{4p}\right)\leq C(\ln(N))^{2p}$.

   (e) Conclure que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\sigma(X_s)\,dW_s\right)^{2p}\right)\leq C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^{p}.$$

5. Vérifier l'estimation (29).

6. Comment peut-on améliorer l'approximation de $\max_{0\leq t\leq T}X_t$?

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 21 février 2008 8h30-11h30

## Fonction d'importance et normalisation

Pour calculer $\mathbf{E}(f(X))$ où $X$ désigne une variable aléatoire de densité $p$ sur $\mathbf{R}^d$ et $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $\mathrm{Var}(f(X)) < +\infty$, on se donne $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une densité $q$ sur $\mathbf{R}^d$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(q(Y_1) = 0) = 0$. En déduire que $\mathbf{P}(\exists i \geq 1 \text{ t.q. } q(Y_i) = 0) = 0$.

2. On suppose que $dx$ p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow fp(x) = 0$ et on utilise la convention $\frac{fp}{q}(x) = 0$ si $q(x) = 0$.

   (a) Que vaut $\int |f|p(x)\mathbf{1}_{\{q(x)=0\}}dx$ ? En déduire que la variable aléatoire $\frac{fp}{q}(Y_1)$ est intégrable d'espérance égale à $\mathbf{E}(f(X))$.

   (b) Montrer que

   $$\int \left(\frac{fp}{q}\right)^2 q(x)dx \geq \left(\int |f|p(x)dx\right)^2$$

   avec le minorant atteint pour $q_*(x) = \frac{|f|p(x)}{\int |f|p(y)dy}$.

   (c) En déduire un choix de $q$ qui permet de minimiser la variance de l'estimateur

   $$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{fp}{q}(Y_i)$$

   pour tout $n$. Que représente $v_* = \left(\int |f|p(x)dx\right)^2 - \mathbf{E}^2(f(X))$ ?

   (d) Pour une densité $q$ quelconque, expliquer comment construire un intervalle de confiance asymptotique pour l'estimation de $\mathbf{E}(f(X))$ par $Z_n$ à partir de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ?

On note $R_n$ l'estimateur :

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{fp}{q}(Y_i)\mathbf{1}_{q(Y_i)>0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)\mathbf{1}_{q(Y_i)>0}}.$$

3. Lorsque $\mathbf{P}(q(X) > 0) > 0$, calculer la limite de $R_n$ lorque $n$ tends vers $+\infty$. En déduire que si p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$, alors $R_n$ converge vers $\mathbf{E}(f(X))$.

4. Montrer que si $\mathbf{P}(f(X) = \mathbf{E}[f(X)]) > 0$, les variances de $R_n$ et de $Z_n$ sont nulles pour le choix $q(x) = \frac{\mathbf{1}_{\{f(x)=\mathbf{E}(f(X))\}}p(x)}{\mathbf{P}(f(X)=\mathbf{E}[f(X)])}$. Quelle sont alors les valeurs de $R_n$ et $Z_n$ ?

5. On suppose désormais que $\mathbf{P}(f(X) = \mathbf{E}[f(X)]) = 0$ et que $dx$ p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$. On utilise la convention $\frac{p}{q}(x) = 0$ si $q(x) = 0$.

   (a) On pose $\bar{f}(x) = f(x) - \mathbf{E}[f(X)]$. Montrer que si $v(q) = \int \left(\frac{\bar{f}p}{q}\right)^2 q(x)dx < +\infty$, alors $\sqrt{n}(R_n - \mathbf{E}(f(X)))$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0, v(q))$.
   *Indication* : on pourra remarquer que $\sqrt{n}(R_n - \mathbf{E}(f(X))) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{\bar{f}p}{q}(Y_i)$ et appliquer le théorème de Slutsky : si $(Z_n)_n$ (resp. $(W_n)_n$) désigne une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbf{R}^{d_2}$) qui converge en loi vers une constante $z \in \mathbf{R}^{d_1}$ (resp. vers une variable aléatoire $W$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_2}$), alors $(Z_n, W_n)_n$ converge en loi vers $(z, W)$.

(b) Expliquer comment construire un intervalle de confiance asymptotique pour l'estimation de $\mathbf{E}(f(X))$ par $R_n$ à partir de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$?

(c) Montrer que $v(q) \geq \left(\int |\bar{f}| p(x)dx\right)^2$ où le minorant est atteint pour $\bar{q}(x) = \frac{|\bar{f}|p(x)}{\int |\bar{f}|p(y)dy}$.

6. (a) Pour $y \in \mathbf{R}$, on note $y^+ = \max(y, 0)$ et $y^- = \max(-y, 0)$. Montrer que

$$v_* = 4 \int f^+(x)p(x)dx \int f^-(x)p(x)dx \text{ et } v(\bar{q}) = 4 \left(\int \bar{f}^+(x)p(x)dx\right)^2.$$

(b) Vérifier que si $f$ est de signe constant alors $v_* \leq v(\bar{q})$.

(c) On se place dans le cas particulier où $f(x) = x$ et $p(x) = (1-\alpha)e^x 1_{\{x<0\}} + \alpha\lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$ avec $\lambda > 0$, $\alpha \in ]0, 1[$ tels que $\frac{\alpha}{\lambda} > 1 - \alpha$. Vérifier que

$$v_* > v(\bar{q}) \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{-2\lambda(1-\alpha)} > \frac{\alpha}{\lambda} e^{-2\lambda\frac{\alpha}{\lambda}}$$

En étudiant la monotonie de la fonction $g(x) = xe^{-2\lambda x}$, conclure que l'on peut trouver $(\alpha, \lambda)$ tel que $v_* > v(\bar{q})$.

# Simulation d'équations différentielles stochastiques

Le résultat de la question préliminaire qui suit sera utilisé à la fin du problème dans les questions 8a et 8c.

1. Soit $(X,Y)$ un couple qui suit la loi gaussienne $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\right)$. On suppose $a>0$ et on pose $Z=Y-\frac{c}{a}X$.

   (a) Quelle est la loi de $(X,Z)$?

   (b) Vérifier que $\mathbf{E}(X^4)=3a^2$, $\mathbf{E}(X^2Y^2)=ab+2c^2$, $\mathbf{E}(X^3Y)=3ac$ et $\mathbf{E}(XY^3)=3bc$.

   (c) Montrer que pour $l,m\in\mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^lY^m)=0$ dès lors que $l+m$ est impair.

Dans toute la suite, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées et $\varphi$ désigne une fonction régulière de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.
Soit $T>0$, $y\in\mathbb{R}^n$, $\sigma:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times d}$ et $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ deux fonctions régulières. Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, on se donne également $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0=y,\\ dX_t=\sigma(X_t)dW_t+b(X_t)dt. \end{cases} \tag{32}$$

On note $L$ l'opérateur différentiel du second ordre défini par

$$L\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n}a_{il}(x)\partial^2_{x_ix_l}\varphi(x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\text{ où }a_{il}(x)=\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x).$$

Pour $j\in\{1,\dots,d\}$, on note également $\sigma_j(x)=(\sigma_{ij}(x))_{1\le i\le n}\in\mathbf{R}^n$ la $j$-ème colonne de la matrice $\sigma$ et $\partial\sigma_j(x)=(\partial_{x_i}\sigma_{lj}(x))_{1\le l,i\le n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

2. Écrire le schéma de Milshtein pour cette EDS. À quelle condition peut-on l'implémenter?

3. Pour $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution $u$, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+Lu(t,x)=0,\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\\ u(T,x)=f(x),\ x\in\mathbf{R}^n \end{cases}. \tag{33}$$

   On note également $(\bar{X}_{t_k})_{0\le k\le N}$ le vecteur obtenu sur la grille temporelle $t_k=\frac{kT}{N}$ par discrétisation de l'EDS (31) par un schéma approprié tel que $\bar{X}_0=y$.

   (a) Vérifier que

$$\mathbf{E}(f(\bar{X}_T))-\mathbf{E}(f(X_T))=\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{E}_k\ \text{ où }\ \mathcal{E}_k=\mathbf{E}\left(u(t_{k+1},\bar{X}_{t_{k+1}})-u(t_k,\bar{X}_{t_k})\right).$$

   (b) Vérifier que $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}(t,x)=L^2u(t,x)$ où $L^2u=L(Lu)$. En déduire que

$$u(t_{k+1},\bar{X}_{t_k})+\frac{T}{N}Lu(t_{k+1},\bar{X}_{t_k})+\frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1},\bar{X}_{t_k})=u(t_k,\bar{X}_{t_k})+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

(c) Conclure que si pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\mathbf{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k}) = u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N} Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T^2}{2N^2} L^2 u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right) \tag{34}$$

alors $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

L'objectif du problème est de démontrer que (33) est vérifiée pour deux schémas proposés récemment par Ninomiya et Victoir et par Kusuoka, Ninomiya et Ninomiya.

4. Pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on note $V_j$ l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V_j\varphi(x) = \sigma_j(x).\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)$. Pour $V$ et $W$ deux opérateurs différentiels, $VW$ désigne l'opérateur différentiel (en général différent de $WV$) défini par $VW\varphi(x) = V(W\varphi)(x)$. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, $V^m$ désigne l'opérateur $\underbrace{V \dots V}_{m \text{ fois}}$.
   Enfin, on pose $V_0 = L - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d V_j^2$.
   (a) Exprimer $L^2$ à l'aide des $V_i$, $i \in \{0, \dots, d\}$.
   (b) Montrer que pour $j \in \{1, \dots, d\}$,
   $$V_j^2\varphi(x) = \sum_{i,l=1}^n \sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x)\partial^2_{x_i x_l}\varphi(x) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\sigma_{lj}(x)\sigma_{ij}(x)\right)\partial_{x_l}\varphi(x)$$
   et en déduire que $V_0\varphi(x) = \sigma_0(x).\nabla\varphi(x)$ où $\sigma_0(x) = b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial\sigma_j\sigma_j(x)$.

5. Pour $\eta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction régulière on note $V$ l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V\varphi(x) = \eta(x).\nabla\varphi(x)$ et $(e^{tV}(x))_{t\in\mathbf{R}}$ l'unique solution de l'Équation Différentielle ordinaire
   $$\frac{d}{dt}y(t) = \eta(y(t)), \quad y(0) = x.$$
   (a) Calculer $\frac{d\varphi(e^{tV}(x))}{dt}$ et en déduire que $\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi(e^{tV}(x)) = \varphi(x) + \int_0^t V\varphi(e^{sV}(x))ds$.
   (b) En déduire que pour tout $l \in \mathbf{N}$,
   $$\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^m V^m\varphi(x)}{m!} + \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_l} V^{l+1}\varphi(e^{s_{l+1}V}(x))ds_{l+1}\dots ds_1.$$
   *<u>Indication :</u> écrire l'égalité de la question précédente en remplaçant $\varphi$ par $V^m\varphi$ où $m \geq 1$.*
   Justifier la notation $e^{tV}(x)$ et vérifier que $\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^m V^m\varphi(x)}{m!} + \mathcal{O}(|t|^{l+1})$.
   (c) Soit $W$ un autre opérateur différentiel du premier ordre associé à une fonction régulière de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour $s, t \in \mathbf{R}$,
   $$\varphi(e^{sW}e^{tV}(x)) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ m_1+m_2 \leq l}} \frac{s^{m_1}t^{m_2}V^{m_2}W^{m_1}\varphi(x)}{m_1!m_2!} + \mathcal{O}((|s| \vee |t|)^{l+1}).$$
   *<u>Indication :</u> écrire le développement à l'ordre $l$ de $\varphi(e^{sW}(y))$ en une valeur bien choisie de $y \in \mathbf{R}^n$.*

6. Soit $t > 0$, $G_1, \dots, G_d$ des gaussiennes centrées réduites indépendantes et pour $j \in \{1, \dots, d\}$, $Z_j = \sqrt{t} G_j$.

   (a) Pour $m = (m_0, \dots, m_{d+1}) \in \mathbf{N}^{d+2}$ on note $\|m\| = 2(m_0 + m_{d+1}) + \sum_{j=1}^{d} m_j$. Expliquer comment obtenir l'égalité

$$\mathbf{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \sum_{m:\|m\|\leq 5} \frac{t^{\frac{\|m\|}{2}}}{2^{m_0+m_{d+1}}} \frac{V_0^{m_{d+1}}V_d^{m_d}\dots V_1^{m_1}V_0^{m_0}\varphi(x)}{m_0!m_1!\dots m_d!m_{d+1}!}\mathbf{E}[G_1^{m_1}\times\dots\times G_d^{m_d}] + \mathcal{O}(t^3).$$

   (b) Remarquer que s'il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $m_j$ est impair, alors $\mathbf{E}[G_1^{m_1}\times\dots\times G_d^{m_d}] = 0$ et en déduire que la somme précédente est restreinte aux $(d+2)$-uplets $m$ tels que $\|m\| \in \{0, 2, 4\}$. Vérifier qu'en dehors du cas $m = (0, \dots, 0)$, les seuls termes non nuls de cette somme correspondent aux cas suivants où on ne précise que les $m_i$ non nuls :

   **(1)** $m_0 + m_{d+1} = 1$,

   **(2)** $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

   **(3)** $m_i = 4$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

   **(4)** $m_i = m_j = 2$ pour un couple d'indices $i < j \in \{1, \dots, d\}$,

   **(5)** $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$ et $m_0 + m_{d+1} = 1$,

   **(6)** $m_0 + m_{d+1} = 2$.

   (c) Conclure que

$$\mathbf{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right] = \varphi(x) + tL\varphi(x)$$
$$+ \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{d} V_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq d} V_j^2V_i^2 + \frac{1}{2}\left\{V_0\sum_{i=1}^{d} V_i^2 + \sum_{i=1}^{d} V_i^2V_0\right\} + V_0^2\right)\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

   (d) En déduire que

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x)) + \frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_dV_d}\dots e^{Z_1V_1}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

7. Le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \dots, W^d)$. Pour passer de $\bar{X}_{t_k}$ à $\bar{X}_{t_{k+1}}$, il consiste à

   **(i)** Intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_0(y(t))$,

   **(ii)** Si $U_{k+1} \leq \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour $j$ croissant de $1$ à $d$ l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_j(y(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour $j$ décroissant de $d$ à 1.

   **(iii)** Reprendre l'étape **(i)**.

   Vérifier que pour ce schéma,

$$\mathbf{E}(\varphi(\bar{X}_{t_1})) = \varphi(y) + \frac{T}{N}L\varphi(y) + \frac{T^2}{2N^2}L^2\varphi(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

   propriété qui se généralise facilement en (33).

8. L'inconvenient du schéma de Ninomiya et Victoir est qu'il faut intégrer $(d+2)$ EDOs à chaque pas de temps, ce qui peut s'avérer très coûteux. Ninomiya et Ninomiya ont proposé un schéma qui préserve l'ordre de convergence faible en $1/N^2$ mais dans lequel il suffit d'intégrer deux EDOs à chaque pas de temps.

   (a) Soit $(G_{1,j}, G_{2,j})_{1\leq j\leq d}$ des couples i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right)$. À l'aide de la question 1, montrer que $\mathbf{E}(\prod_{j=1}^d G_{1,j}^{l_j} G_{2,j}^{m_j}) = 0$ dès que la somme des deux coordonnées de l'un des couples $(l_j, m_j) \in \mathbf{N}^2$ est impaire.

   (b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Expliquer comment obtenir l'égalité

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{1,j}V_j}(x))\right) \\
&= \varphi(x) + tV_0\varphi(x)(\alpha+\beta) + t\sum_{j=1}^d V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{2} + \mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{2}\right) \\
&+ t^2V_0^2\varphi(x)\left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\right) \\
&+ t^2\sum_{j=1}^d \left\{V_jV_0V_j\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + (\alpha+\beta)\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\right. \\
&\qquad + V_0V_j^2\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right) \\
&\qquad + V_j^2V_0\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2) + \mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right) \\
&\qquad \left. + V_j^4\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^4)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^3G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2G_{2,j}^2)}{4} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}^3)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^4)}{24}\right)\right\} \\
&+ t^2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^d \left\{V_i^2V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{2,j}^2)}{4}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right) \\
&\qquad + V_iV_jV_iV_j\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{1,j}G_{2,i}G_{2,j})}{4}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right)\right\} + \mathcal{O}(t^3)
\end{aligned}
$$

   (c) Soit $u \geq 1/2$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Vérifier que pour le choix $a = u$, $b = 1 + u - \varepsilon\sqrt{2(2u-1)}$ et $c = -u + \varepsilon\frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$, $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ est bien une matrice de covariance. En posant également

$\alpha = \varepsilon \frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$ et $\beta = 1 - \alpha$, vérifier que

$$\begin{cases} a+b+2c = 1 = a^2 + 4ac + 2ab + 4c^2 + 4bc + b^2 \\ \alpha a + \beta b + 3(\alpha+\beta)c = 0 \\ \alpha a + \beta b + 3\alpha(c+b) = 3/2 \\ \alpha a + \beta b + 3\beta(c+a) = 3/2 \\ a^2 + 4ac + 6ab + 4bc + b^2 = 3 \\ a^2 + 4ac + 6c^2 + 4bc + b^2 = 0 \end{cases} .$$

En déduire que pour ce choix

$$\mathbf{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0 + \sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0 + \sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{1,j}V_j}(x))\right) = \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) Quel est le schéma de Ninomiya et Ninomiya?

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du 15 février 2007 8h30-11h30

## Partie 1

**Exercice 1** On considère $X$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1. Pour $f$ une fonction bornée, on note $I = \mathbf{E}(f(X))$ et $I_n^1$ et $I_n^2$ les estimateurs :
$$I_n^1 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_{2n-1}) + f(X_{2n})\right).$$
$$I_n^2 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(-X_1) + \ldots + f(X_n) + f(-X_n)\right).$$
où $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes tirées selon la loi de $X$.

   Identifier la limite en loi des variables aléatoires $\sqrt{n}(I_n^1 - I)$. Même question pour la famille de variables aléatoires $\sqrt{n}(I_n^2 - I)$.

   On calculera la variance des lois limites.

2. Comment peut on estimer la variance de lois limites précédentes à l'aide de l'échantillon $(X_n, 1 \leq i \leq 2n)$ pour $I_n^1$ et $(X_n, 1 \leq i \leq n)$ pour $I_n^2$?

   Comment évaluer l'erreur dans une méthode de Monte-Carlo utilisant $I_n^1$ ou $I_n^2$ ?

3. Montrer que si $f$ est une fonction croissante $\mathrm{Cov}\ (f(X), f(-X)) \leq 0$. Quel est dans ce cas, l'estimateur qui vous parait préférable $I_n^1$ ou $I_n^2$ ? Même question si $f$ est décroissante.

**Exercice 2** Soit $G$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1. On pose $L^m = \exp\left(-mG - \frac{m^2}{2}\right)$, montrer que $\mathbf{E}(L^m f(G + m)) = \mathbf{E}(f(G))$ pour toute fonction $f$ bornée.

   Soit $X^m$ une autre variable aléatoire, intégrable telle que $\mathbf{E}(X^m f(G + m)) = \mathbf{E}(f(G))$ pour toute fonction $f$ bornée. Montrer que $\mathbf{E}\left(X^m | G\right) = L^m$.

   Dans une méthode de simulation quelle représentation de $\mathbf{E}(f(G))$ vaut il mieux utiliser $\mathbf{E}(X^m f(G+m))$ ou $\mathbf{E}(L^m f(G + m))$ ?

2. Montrer que la variance de $L^m f(G + m)$ se met sous la forme
$$\mathbf{E}\left(e^{-mG+\frac{m^2}{2}} f^2(G)\right) - \mathbf{E}(f(G))^2,$$
et que la valeur de $m$ qui minimise cette variance est solution d'un équation que l'on explicitera. Que vaut ce $m$ optimum lorsque $f(x) = x$ ? Commentaire.

3. Soit $p_1$ et $p_2$ deux nombres positifs de somme $1$ et $m_1$ et $m_2$ 2 réels, on pose :
$$l(g) = p_1 e^{m_1 g - \frac{m_1^2}{2}} + p_2 e^{m_2 g - \frac{m_2^2}{2}}.$$
On pose pour $f$ mesurable bornée $\mu(f) = \mathbf{E}(l(G)f(G))$. Montrer que
$$\mu(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)p(x)dx,$$
$p$ étant une densité que l'on précisera.

4. Proposer une technique de simulation selon la loi de densité $p$.

5. On suppose que $\tilde{G}$ est une variable aléatoire suivant la loi précédente. Montrer que :

$$\mathbf{E}(l^{-1}(\tilde{G})f(\tilde{G})) = \mathbf{E}(f(G)),$$

$$\text{Var}(l^{-1}(\tilde{G})f(\tilde{G})) = \mathbf{E}\left(l^{-1}(G)f^2(G)\right) - \mathbf{E}(f(G))^2.$$

6. On s'intéresse au cas $p_1 = p_2 = 1/2$, $m_1 = -m_2 = m$ et $f(x) = x$. Montrer que :

$$\text{Var}(l^{-1}(\tilde{G})\tilde{G}) = \mathbf{E}\left(\frac{e^{m^2/2}G^2}{\cosh(mG)}\right).$$

   On note $v(m)$ cette variance comme fonction de $m$. Vérifier que $v'(0) = 0$ et $v''(0) < 0$.

   Comment choisir $m$ pour réduire la variance lors d'un calcul de $\mathbf{E}(G)$ ?

**Exercice 3** Soit $X$ une variable aléatoire réelle et $Y$ une variable de contrôle réelle. On supposera que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ et que $\mathbf{E}(Y^2) < +\infty$, $\mathbf{E}(Y) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

1. Soit $\lambda$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$, calculer $\text{Var}(X - \lambda Y)$ et la valeur $\lambda^*$ qui minimise cette variance. As t'on intérêt à supposer $X$ et $Y$ indépendantes ?

2. On suppose que $((X_n, Y_n), n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes tirées selon la loi du couple $(X, Y)$. On définit $\lambda_n^*$ par

$$\lambda_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n X_i)^n}.$$

   Montrer que $\lambda_n^*$ tends presque surement vers $\lambda^*$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

3. Montrez que $\sqrt{n}\left(\lambda_n^* - \bar{\lambda}_n\right)\bar{Y}_n$, où $\bar{Y}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ tend vers $0$ presque sûrement.

4. En utilisant le théorème de Slutsky (voir question suivante) montrer que :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1 - \lambda_n^* Y_1 + \cdots + X_n - \lambda_n^* Y_n) - \mathbf{E}(X)\right)$$

   tends vers un loi gaussienne de variance $\text{Var}(X - \lambda_n^* Y)$.

   Comment interpreter le résultat pour une méthode de Monte-Carlo utilisant $\lambda X$ comme variable de contrôle ?

5. Montrez le théorème de Slutsky, c'est à dire que si $X_n$ converge en loi vers $X$ et $Y_n$ converge en loi vers une constante $a$ alors le couple $(X_n, Y_n)$ converge en loi vers $(X, a)$ (on pourra considérer la fonction caractéristique du couple $(X_n, Y_n)$.

## Partie 2 : Méthode de Monte-Carlo exacte pour les options asiatiques

*Les questions 4. et 5. peuvent être traitées indépendamment.*

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On se place dans le modèle de Black-Scholes avec taux d'intérêt $r$ sous la probabilité risque-neutre où le cours à l'instant $t$ de l'actif risqué est $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$.
Ce problème est consacré à une technique récemment proposée par Jourdain et Sbai[13] pour calculer le prix

$$\mathcal{P} = \mathbf{E}\left(e^{-rT}\varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right)$$

de l'option asiatique de payoff $\varphi$ sans recourir à un schéma de discrétisation en temps.

1. On pose $\gamma = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $X_t = \frac{S_t}{t}\int_0^t e^{-\sigma W_u - \gamma u} du$ pour $t > 0$.

   (a) Vérifier que $X_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\sigma(W_T - W_{T-t}) + \gamma t} dt$.

   (b) Que peut-on dire du processus $(W_T - W_{T-t})_{t\in[0,T]}$?

   (c) En déduire que $\mathcal{P} = \mathbf{E}(e^{-rT}\varphi(X_T))$.

   (d) Donner $\lim_{t\to 0^+} X_t$ et calculer $dX_t$.

   (e) En déduire que le processus $Y_t = \ln(X_t/S_0)$ est solution de l'EDS

   $$dY_t = \sigma dW_t + \gamma dt + \frac{e^{-Y_t} - 1}{t} dt,\ Y_0 = 0. \tag{35}$$

   (f) Pour $\tilde{Y}$ une autre solution de cette équation, vérifier que $d(Y_t - \tilde{Y}_t)^2 \leq 0$ et en déduire l'unicité trajectorielle pour (34).

2. Pour $t > 0$ soit $Z_t = \frac{\sigma}{t}\int_0^t s dW_s + \frac{\gamma}{2} t$.

   (a) Pour $u, t \geq 0$, calculer $\mathbf{E}(Z_t)$ et $\mathrm{Cov}\ (Z_u, Z_t)$.

   (b) Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$, que peut-on dire du vecteur $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$? Comment peut-on le simuler?

   (c) Vérifier que $\frac{1}{t}\int_0^t s dW_s = W_t - \frac{1}{t}\int_0^t W_s ds$ et en déduire $\lim_{t\to 0^+} Z_t$.

   (d) Montrer que $Z_t$ est solution de l'EDS

   $$dZ_t = \sigma dW_t + \gamma dt - \frac{Z_t}{t} dt,\ Z_0 = 0.$$

   Pourquoi est-ce l'unique solution de cette équation?

3. Dans cette question, on admettra que les intégrales que l'on est amené à considérer sont bien définies.

   (a) Pour un processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ adapté à la filtration de $W$ et suffisamment intégrable, donner $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbf{P}}$ tel que sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $(B_t = W_t - \int_0^t H_s ds)_{t\leq T}$ est un mouvement Brownien.

   (b) Préciser $H_t$ pour que $Z_t$ soit solution de l'EDS

   $$dZ_t = \sigma dB_t + \gamma dt + \frac{e^{-Z_t} - 1}{t} dt,\ Z_0 = 0.$$

[13] voir Preprint CERMICS 2007-

(c) On pose

$$A(t,z)=\frac{1-z+\frac{z^2}{2}-e^{-z}}{\sigma^2 t} \text{ et } f(t,z)=\left[\frac{A}{t}+\left(\frac{z}{t}-\gamma-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right](t,z).$$

En admettant que d'après la loi du logarithme itéré, pour tout $\varepsilon>0$, $Z_t=o(t^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ en $0^+$, donner $\lim_{t\to 0^+} A(t,Z_t)$.

(d) Calculer $dA(t,Z_t)$ et en déduire que

$$\mathcal{P}=\mathbf{E}\left(\psi(Z_T)e^{\int_0^T f(t,Z_t)dt}\right) \text{ où } \psi(z)=e^{-rT}\varphi(S_0e^z)e^{A(T,z)}.$$

4. Afin d'obtenir une espérance calculable par la méthode de Monte Carlo, on se donne indépendamment du Brownien $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et donc de $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ une variable aléatoire entière $N$ telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\mathbf{P}(N=n)=p(n)>0$ ainsi qu'une suite $(\tau_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une densité $q$ strictement positive sur $[0,T]$ (et nulle en dehors) indépendante de $N$.

   (a) Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{p(n)n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{f(\tau_i,Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\middle|(Z_t)_{t\leq T}\right)$ puis $\mathbf{E}\left(\frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{f(\tau_i,Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\middle|(Z_t)_{t\leq T}\right)$ où par convention le produit vaut 1 lorsque $N=0$.

   (b) Avec la question 3d, en déduire que $\mathcal{P}=\mathbf{E}\left(\psi(Z_T)\frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{f(\tau_i,Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\right)$.

   C'est cette espérance que l'on approche par la méthode de Monte Carlo en remarquant que si $\varphi$ a une expression analytique, alors il en va de même pour $\psi$ et $f$ et en utilisant la question 2b.

5. Pour avoir une intuition sur le choix de $p$ et $q$, on va s'intéresser à la minimisation de la variance de $\xi_{p,q}=\frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{g(\tau_i)}{q(\tau_i)}$ lorsque $g$ est une fonction positive bornée sur $[0,T]$.

   (a) Vérifier que $\mathbf{E}(\xi_{p,q}^2)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{a_{q,n}^2}{p(n)}$ pour une suite $(a_{q,n})_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs ne dépendant pas de $p$ à préciser.

   (b) Déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\mathbf{E}(\xi_{p,q}^2)\geq\left(\sum_{n\in\mathbf{N}}a_{q,n}\right)^2$ et vérifier que ce minorant est atteint en choisissant pour $(p(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(a_{q,n})_{n\in\mathbf{N}}$ renormalisée.

   (c) Pour ce choix de $p$, comment faut-il ensuite choisir $q$ pour minimiser la variance de $\xi_{p,q}$?

# Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du 2 mars 2006 8h30-11h30

### Partie I : Calcul par une méthode de Monte-Carlo du prix d'un CDS

On considère une suite de temps déterministes $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ et un taux d'intérêt $r \geq 0$. On note par $\tau$ un temps (de défaut) aléatoire et l'on cherche à évaluer par une méthode de Monte-Carlo le prix d'un CDS donné par :

$$P = \mathbf{E}\left(H(\tau)\right)$$

où :

$$H(\tau) = R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - e^{-r\tau}\mathbf{1}_{\{\tau \leq T_n\}}$$

**Intensité déterministe** On suppose que $(\lambda_s, s \geq 0)$ est une fonction continue non aléatoire de $s$, telle que, pour tout $s \geq 0$, $\lambda_s > 0$. On suppose que $\tau$ suit la loi

$$\mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} e^{-\int_0^t \lambda_s ds}\lambda_t dt.$$

1. Reconnaître la loi de $\tau$ lorsque $\lambda_s$ ne dépend pas de $s$. Comment peut on, alors, simuler un variable aléatoire suivant la loi de $\tau$ ? Montrer que l'on peut calculer $P$ à l'aide d'une formule simple.

2. Soit $\xi$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1$. On note $\Lambda$ la fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ définie par :
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds,$$
et $\Lambda^{-1}$ son inverse. Montrer que $\Lambda^{-1}(\xi)$ suit la même loi que $\tau$ et, en déduire une méthode de simulation selon la loi de $\tau$.

3. En supposant $\Lambda$ et $\Lambda^{-1}$ calculable explicitement, proposer une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $P$. Expliquer comment l'on peut estimer, alors, l'erreur commise.

4. On suppose que $\Lambda(T_n) \leq K$. Montrer que :
$$P = \left(R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\right)\mathbf{P}\left(\xi > K\right) + \mathbf{E}\left(H(\tau)|\xi \leq K\right)\mathbf{P}\left(\xi \leq K\right).$$
Expliquer comment simuler efficacement une variable aléatoire selon la loi de $\xi$ conditionnellement à l'événement $\{\xi \leq K\}$.

   En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de $P$.

**Intensité aléatoire** On suppose dans ce paragraphe on suppose que $\lambda_t$ est un processus aléatoire donné par $\lambda_t = \exp(X_t)$ où $(X_t, t \geq 0)$ est solution de :

$$dX_t = -c\left(X_t - \alpha\right)dt + \sigma dW_t, X_0 = x.$$

avec $c, \sigma, \alpha$ des réels donnés et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien.
On pose $\tau = \Lambda^{-1}(\xi)$, $\xi$ étant un variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1$ indépendante de $W$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\lambda_t)$. Proposer une variable de contrôle pour le calcul de $P$. Comment peut on vérifier numériquement que cette variable de contrôle réduit effectivement la variance ?

2. Calculer :
$$\mathbf{E}\left(R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - e^{-r\tau}\mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}}\Big|\lambda_t, t\geq 0\right).$$
En déduire un méthode de simulation évitant de simuler la variable aléatoire $\xi$ dont on montrera qu'elle réduit la variance.

**Une méthode de fonction d'importance**

1. Soit $\beta > 0$, on pose $\xi_\beta = \xi/\beta$. Montrer que, pour toute fonction $f$ mesurable positive et pour tout $\beta > 0$ on a :
$$\mathbf{E}\left(f(\xi)\right) = \mathbf{E}\left(f(\xi_\beta)g_\beta(\xi_\beta)\right).$$
$g_\beta$ étant une fonction que l'on explicitera en fonction de $\beta$.
2. En déduire que pour tout $\beta > 0$ :
$$P = \mathbf{E}\left(g_\beta(\xi/\beta)H(\Lambda^{-1}(\xi/\beta))\right)$$
avec $H(t) = R\sum_{i=1}^{n} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{t > T_i\}} - e^{-rt}\mathbf{1}_{\{t < T_n\}}$.
3. On pose $X_\beta = g_\beta(\xi/\beta)H(\Lambda^{-1}(\xi/\beta))$, montrer que pour tout $\beta > 0$ :
$$\text{Var}(X_\beta) = \mathbf{E}\left(g_\beta(\xi)H^2(\Lambda^{-1}(\xi))\right) - P^2.$$
4. Montrer que $\text{Var}(X_\beta) < +\infty$ si $\beta < 2$ et que :
$$\text{Var}(X_2) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\int_0^{+\infty} H^2(\Lambda^{-1}(t))dt\right) - P^2.$$
5. Montrer que $\beta \to \text{Var}(X_\beta)$ est une fonction strictement convexe sur l'intervalle $]0,2[$ et que
$$\lim_{\beta\to 0+}\text{Var}(X_\beta) = +\infty.$$
En admettant que $\lim_{t\to+\infty}\Lambda^{-1}(t) = +\infty$ presque sûrement, montrer que $\lim_{\beta\to 2-}\text{Var}(X_\beta) = +\infty$.
6. Quel $\beta$ est il souhaitable de choisir dans une méthode de Monte-Carlo ? Proposer un méthode permettant d'approcher cette valeur.

## Partie II : Simulation d'équations différentielles stochastiques

Dans cette partie, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées.
Soit $T > 0$, $y \in \mathbf{R}$, $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière et sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique
$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{36}$$
Pour $(t,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, on introduit $x(t,z)$ la solution à l'instant $t$ de l'Equation Différentielle Ordinaire issue de $z$ à l'instant initial et obtenue en enlevant le terme brownien de l'EDS :
$$\begin{cases} x(0,z) = z, \\ \frac{d}{dt}x(t,z) = b(x(t,z)). \end{cases} \tag{37}$$

On se donne $N \in \mathbf{N}^*$ et pour $0 \leq k \leq N$, on pose $t_k = kT/N$. On s'intéresse à un schéma de discrétisation proposé récemment par Ninomiya et Victoir. Dans l'exemple simple qui nous intéresse, pour passer du temps $t_k$ au temps $t_{k+1}$, ce schéma consiste à intégrer[14] l'EDO (36) sur l'intervalle $[t_k, \frac{(2k+1)T}{2N}]$ puis à ajouter l'accroissement brownien et enfin à intégrer l'EDO (36) sur l'intervalle de temps $[\frac{(2k+1)T}{2N}, t_{k+1}]$ :

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = y, \\ \forall k \in \{0, \dots, N-1\},\ \bar{X}_{t_{k+1}} = x(\frac{T}{2N}, Z_{k+\frac{1}{2}}) \text{ où } Z_{k+\frac{1}{2}} = x(\frac{T}{2N}, \bar{X}_{t_k}) + W_{t_{k+1}} - W_{t_k}. \end{cases} \tag{38}$$

L'objectif de ce sujet est de vérifier que l'ordre faible de ce schéma est en $\frac{1}{N^2}$. Pour cela, on s'intéressera au cas d'un coefficient de dérive linéaire avant de traiter le cas général.
*Les 2 questions peuvent être traitées de façon indépendante.*

1. **Cas d'un coefficient de dérive linéaire :** $\forall y \in \mathbf{R}$, $b(y) = cy$ où $c \in \mathbf{R}^*$.

   (a) Quelle est la solution $x(t, z)$ de l'EDO (36)? Préciser le schéma (37) dans ce cas particulier. Vérifier que

   $$\forall k \in \{0, \dots, N\},\ \bar{X}_{t_k} = ye^{ct_k} + e^{\frac{cT}{2N}} \sum_{l=1}^{k} e^{c(t_k - t_l)}(W_{t_l} - W_{t_{l-1}}).$$

   En déduire que $\mathrm{Var}(\bar{X}_T) = \frac{e^{2cT}-1}{2c} \times \frac{\frac{cT}{N}}{\sinh(\frac{cT}{N})}$.

   (b) Quelle est la loi de $X_T$? En déduire que $X_T$ a même loi que $\bar{X}_T + \sqrt{\gamma_N}\, G$ où $G$ est une gaussienne centrée réduite indépendante de $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et $\gamma_N$ une constante que l'on précisera.

   (c) En remarquant que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction $C^2$, alors

   $$\forall x, z \in \mathbf{R},\ f(x+z) = f(x) + zf'(x) + z^2 \int_0^1 (1-\alpha) f''(x + \alpha z) d\alpha,$$

   en déduire que si $f$ est bornée ainsi que ses dérivées,

   $$\left|\mathbf{E}(f(X_T)) - \mathbf{E}(f(\bar{X}_T))\right| \leq \frac{\sup_{z\in\mathbf{R}} |f''(z)|}{2} \gamma_N.$$

   Conclure que l'ordre faible du schéma est en $1/N^2$.

   (d) On note $\hat{X}_{t_k}$ la valeur obtenue en $t_k$ par le schéma d'Euler avec pas de temps $\frac{T}{N}$. Calculer $\mathbf{E}(\hat{X}_T)$ et $\mathrm{Var}(\hat{X}_T)$.

   (e) On suppose $c > 0$. Vérifier que $X_T$ a même loi que $\hat{X}_T + \hat{\eta}_N + \sqrt{\hat{\gamma}_N}\, G$ pour des constantes $\hat{\eta}_N$ et $\hat{\gamma}_N$ à préciser. Retrouver que l'ordre faible du schéma d'Euler est en $1/N$. Comment peut-on améliorer la convergence de ce schéma?

2. **Cas général :** Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution $u$, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + Lu(t, x) = 0,\ (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R} \\ u(T, x) = f(x),\ x \in \mathbf{R} \end{cases}, \tag{39}$$

   où $L$ est le générateur infinitésimal de l'EDS (35) : $Lg(x) = \frac{1}{2}g''(x) + b(x)g'(x)$.

[14] Si la solution de l'EDO (36) n'a pas d'expression analytique, on peut recourir à un schéma de discrétisation pour cette étape. Il faut choisir ce schéma avec soin pour préserver l'ordre faible du schéma qui en découle pour l'EDS (35).

(a) Vérifier que

$$\mathbf{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbf{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}_k \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_k = \mathbf{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

(b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = L(Lu)(t,x)$. En admettant provisoirement que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k})) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T}{N} \\ &+ \frac{1}{2}L(Lu)(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),\end{aligned} \tag{40}$$

en déduire que $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et conclure que l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

(c) L'objectif de cette question est de vérifier que pour $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ régulière

$$\mathbf{E}(g(\bar{X}_{t_1})) = g(y) + Lg(y)t_1 + L(Lg)(y)\frac{t_1^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{41}$$

propriété qui se généralise facilement en (39).

i. Vérifier que

$$g(x(t,z)) = g(z) + (bg')(z)t + \int_0^t \int_0^s b(bg')'(x(r,z))drds$$

et en déduire que pour $t$ au voisinage de $0$,

$$g(x(t,z)) = g(z) + (bg')(z)t + b(bg')'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right)$$
$$\text{et } x(t,z) = z + b(z)t + bb'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right).$$

ii. En déduire que

$$\begin{aligned}g(\bar{X}_{t_1}) =& g\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) \\ &+ (bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1}{2} \\ &+ b(bg')'\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1^2}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).\end{aligned}$$

iii. Vérifier que $\mathbf{E}\left((bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à

$$bg'(y) + (bg')'(y)b(y)\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}(bg')''(y)t_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

iv. Vérifier que $\mathbf{E}\left(g\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à un terme en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ près à la fonction

$$g + g' \times \left(b\frac{t_1}{2} + bb'\frac{t_1^2}{8}\right) + \frac{1}{2}g'' \times \left(b^2\frac{t_1^2}{4} + t_1\right) + \frac{1}{6}g^{(3)} \times \left(3b\frac{t_1^2}{2}\right) + \frac{3t_1^2}{24}g^{(4)}$$

prise au point $y$ ($g^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre $k$ de la fonction $g$).

v. En remarquant que

$$L(Lg) = \frac{1}{4}b(b'g' + bg'') + \frac{1}{2}b(bg')' + \frac{1}{4}b(bg')' + \frac{1}{2}(bg')'' + \frac{1}{2}bg^{(3)} + \frac{1}{4}g^{(4)},$$

conclure que (40) est vérifiée.

Dans le cas de l'EDS générale posée en dimension $n$ avec $(W^1, \ldots, W^d)$ un mouvement brownien standard de dimension $d$ :

$$dX_t = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(X_t)dW_t^j + b(X_t)dt$$

où $b$ et les $\sigma_j = (\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{nj})^*$, $1 \leq j \leq d$ sont des fonctions régulières de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \ldots, W^d)$. Pour passer de l'instant $t_k$ à l'instant $t_{k+1}$, il consiste à

1. intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = \left[b - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_j\right](x(t))$ où $\partial\sigma_j = \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_{x_l}}\right)_{1\leq i,l\leq n}$.

2. Si $U_{k+1} \leq \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour $j$ croissant de $1$ à $d$ l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = \sigma_j(x(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour $j$ décroissant de $d$ à $1$.

3. Reprendre la première étape.

# Examen du cours de Méthodes de Monte-Carlo du Vendredi 17 Décembre 2004

**Exercice 4** Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = (\Gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$. On se donne $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ $d$ nombres réels positifs, $\epsilon$ un réel. On note $Z_\epsilon$ la variable aléatoire

$$Z_\epsilon = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e^{\epsilon X_i}.$$

On cherche à calculer par une méthode de Monte-Carlo $P_\epsilon = \mathbf{P}(Z_\epsilon > K)$, $K$ étant un réel donné.

1. Comment peut on simuler le vecteur aléatoire $X$ ? Proposer une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $P_\epsilon$. Comment peut on estimer l'erreur commise dans cette méthode ?

2. Proposer une variable aléatoire de loi lognormale (i.e. dont le logarithme suit une loi gaussienne) proche de $Z_\epsilon$ lorsque $\epsilon$ est petit. En déduire une technique de variable de contrôle pour le calcul de $P_\epsilon$.

3. On supose que $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i < K$. Montrer que $P_\epsilon$ tend vers $0$ lorsque $\epsilon$ tend vers $0$. Quel problème numérique peut on s'attendre à rencontrer dans le calcul de $P_\epsilon$ avec $\epsilon$ petit ?

4. Soit $f$ une fonction bornée de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ et $m$ un vecteur de $\mathbf{R}^d$. On suppose que la matrice $\Gamma$ est inversible. Expliciter une variable aléatoire $L(m)$ positive d'espérance $1$ telle que

$$\mathbf{E}\left(f(X)\right) = \mathbf{E}\left(L(m) f(X + m)\right).$$

   En déduire une technique de fonction d'importance permettant de calculer $P$. Comment proposez vous de choisir $m$ dans le cas où $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i < K$ et $\epsilon$ est petit ?

**Exercice 5** Soit $\mu$ et $\lambda$ deux nombres réels strictement positifs. Soit $N_\lambda$ et $N_\mu$ deux variables aléatoires qui suivent des lois de Poisson de paramètre respectif $\lambda$ et $\mu$.

1. Soit $f$ une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, non identiquement nulle. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(f(N_\lambda)\right) = \mathbf{E}\left(L_{\lambda \to \mu} f(N_\mu)\right),$$

   avec

$$L_{\lambda \to \mu} = e^{\mu - \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N_\mu}.$$

2. On note $X_\mu = L_{\lambda \to \mu} f(N_\mu)$ et $V(\mu) = \text{Var}\left(X_\mu\right)$. Montrer que :

$$V(\mu) = \mathbf{E}\left(e^{\mu - \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N_\lambda} f^2(N_\lambda)\right) - \mathbf{E}(f(N_\lambda))^2.$$

   En déduire que $\lim_{\mu \to 0^+} V(\mu) = +\infty$ et $\lim_{\mu \to +\infty} V(\mu) = +\infty$.

3. Montrer que $V$ est deux fois continuement différentiable. Exprimer cette dérivée seconde sous forme d'une espérance et montrer qu'elle est strictement positive pour tout $\mu$.

4. Montrer que $\inf_{\mu>0} V(\mu)$ est réalisé par un unique $\mu^*$ qui est solution de l'équation

$$\mathbf{E}\left(e^{\mu-\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N_\lambda} f^2(N_\lambda)\left(1-\frac{N_\lambda}{\mu}\right)\right)=0.$$

Comment utiliser $\mu^*$ lorsque l'on cherche à calculer $\mathbf{E}(f(N_\lambda))$.

5. Proposer un algorithme itératif permettant d'approcher $\mu^*$ (on ne demande pas de prouver la convergence de l'algorithme).

## Algorithmes stochastiques

On considère une suite da variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $\gamma_{n+1}=c/(n+1)$, avec $0<c\leq 1$ et on s'intéresse à la suite aléatoire définie par $X_0=x$ avec $x\in[0,1[$ :

$$X_{n+1}=X_n+\gamma_{n+1}\left(\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\,\leq\, X_n\}}-X_n\right)$$

On note $\mathcal{F}_n=\sigma\left(U_1,\dots,U_n\right)$ pour $n\geq 1$.
Le but de ce problème est de montrer que $X_n$ tend presque sûrement vers une variable aléatoire non nulle lorsque $n$ tends vers $+\infty$.

1. Verifier que $X_n$ est compris entre 0 et 1 et que $(X_n, n\geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n\geq 0)$. En déduire que $X_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée $X_\infty\in[0,1]$.

2. On pose $S_0=1$ et
$$S_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\gamma_k},\quad \Delta_n=\gamma_{n+1}S_{n+1}=S_{n+1}-S_n.$$
Verifiez que $\Delta_n$ reste borné et que
$$S_{n+1}X_{n+1}=S_nX_n+\Delta_n\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\,\leq\, X_n\}}.$$

3. On pose
$$\delta M_k=\mathbf{1}_{\{U_k\,\leq\, X_{k-1}\}}-\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{U_k\,\leq\, X_{k-1}\}}|\mathcal{F}_{k-1}\right)$$
Montrer que $N_n=x+\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\delta M_k$ est une martingale de carrée intégrable dont on calculera le crochet $<N>_n$.

4. Montrez que $X_k\geq x(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_k)$. En déduire que $\sum_{k\geq 1}\Delta_kX_k=+\infty$.

5. Montrer que
$$S_nX_n=N_n+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_kX_k.$$
Puis en raisonnant sur les événements $\{<N>_\infty<+\infty\}$ et $\{<N>_\infty=+\infty\}$, montrer que que $S_nX_n$ tends vers $+\infty$ presque surement.

6. Montrer que
$$\mathbf{P}\left(X_\infty=0|\mathcal{F}_p\right)\leq\frac{1}{X_p^2}\mathbf{E}\left((X_\infty-X_p)^2|\mathcal{F}_p\right)$$

7. Calculer le crochet $< X >$ de la martingale $X$ et montrer que

$$\mathbf{E}\left((X_\infty - X_p)^2|\mathcal{F}_p\right) \leq X_p \sum_{k\geq p} \gamma_{k+1}^2$$

8. Vérifier que $\sum_{k\geq p} \frac{\Delta_k}{S_{k+1}^2} \leq \frac{1}{S_p}$ et en déduire que

$$\mathbf{P}\left(X_\infty = 0|\mathcal{F}_p\right) \leq \frac{1}{X_p S_p}$$

9. Prouver que $\mathbf{P}(X_\infty = 0) = 0$.

# Examen du cours de Méthodes de Monte-Carlo du lundi 5 janvier 2004

**Exercice 6** Soit $X$ un vecteur aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et $f$ une fonction mesurable et bornée de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$. On cherche à calculer par un méthode de Monte-Carlo $\mathbf{E}(f(X))$. On suppose par ailleurs explicitement connu $\mathbf{E}(g(X))$, $g$ étant une fonction mesurable et bornée, et l'on va mettre en œuvre une technique de variable de contrôle.

1. Calculer la valeur $\lambda^*$ qui réalise le minimum $\min_{\lambda\in\mathbf{R}} \text{Var}(f(X) - \lambda g(X))$.

2. Proposer une technique d'estimation de la valeur de $\lambda^*$ à l'aide d'un échantillon $(X_n, n \geq 1)$ tiré selon la loi de $X$ en supposant que $\mathbf{E}(g(X))$ et $\text{Var}(g(X))$ sont connus. On donnera une estimation de l'erreur commise dans l'estimation de $\lambda^*$.

3. En supposant $\lambda^*$ connu (ou estimé par la technique précédente) proposer une variable de contrôle. Calculer le quotient théorique entre la largeur de l'intervalle de confiance pour la méthode sans réduction de variance et la méthode avec réduction de variance.

4. On suppose que $X = (G_1, G_2)$ où $G_1$ et $G_2$ sont deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et que
$$f(X) = \left(\lambda_1 e^{\sigma_1 G_1} + \lambda_2 e^{\sigma_2 G_2} - K\right)_+,$$
où $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ et $K$ sont des nombres réels donnés. Proposer une fonction $g(X)$ permettant de mettre en œuvre la technique proposée.

## Problème

**Partie 1** On considère un vecteur aléatoires $X$ et $\phi$ une fonction bornée de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$. On cherche à calculer
$$m = \mathbf{E}\left(\phi(X)\right).$$
On suppose qu'il existe une famille de fonctions $g(\theta, X)$ paramétrée par $\theta$ telle que, pour tout $\theta$ :
$$m = \mathbf{E}\left(g(\theta, X)\right), \tag{42}$$
et que :
$$\mathbf{E}\left(|g(\theta, X)|^2\right) < +\infty. \tag{43}$$
On notera, dans la suite, $s_2(\theta) = \text{Var}(g(\theta, X))$.

1. On suppose, dans cette question, que $X$ est constitué de $d$ variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et que $f$ est une fonction bornée montrer que les propriétés (41) et (42) sont vérifiées si l'on pose, pour $\theta$ et $x$ dans $\mathbf{R}^d$ :
$$g(\theta, x) = \exp\left(-\theta.x - \frac{1}{2}|\theta|^2\right) f(x + \theta).$$

2. On suppose que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$ et l'on note $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_k, 1 \leq k \leq n\right)$.

   Soit $(\Theta_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires adaptées à $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ telle que $\mathbf{E}\left(s_2(\Theta_n)\right) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

On pose $M_0 = 0$ et :

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \left[ g(\Theta_{k-1}, X_k) - m \right].$$

Montrer que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale de carrée intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.

3. Calculer le crochet $< M >_n$ de la martingale $M$ à l'aide de la fonction $s_2$ et de $m$.

4. On suppose à partir de maintenant que, avec probabilité 1, $\lim_{n\to+\infty} \Theta_n = \theta^*$, $\theta^*$ étant un nombre réel donné et que $s_2(\theta)$ est une fonction continue en $\theta$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{< M >_n}{n} = s_2(\theta^*),$$

et en déduire que, si $s_2(\theta^*) > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\Theta_{k-1}, X_k) = m.$$

5. On suppose que $\theta^*$ réalise $min_{\theta \in \mathbf{R}^n} \mathbf{E}\left(g^2(\theta, X)\right)$. Proposer une méthode de simulation permettant de calculer $m$.

6. On définit $\epsilon_n$, l'erreur de la méthode, par :

$$\epsilon_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\Theta_{k-1}, X_k) - m.$$

Montrer que pour tout $\alpha < 1/2$ on a, avec probabilité 1, $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\epsilon_n = 0$. Pourquoi ne peut on espérer que $\lim_{n\to+\infty} n^{1/2}\epsilon_n = 0$ ?

7. Dans cette question, on suppose que $|g(\theta, x)| \leq K < +\infty$. Montrer que, avec probabilité $1$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[ g^2(\Theta_{k-1}, X_k) - m^2 \right] = s_2(\theta^*).$$

**Partie 2** On se place dans la cas où, pour $\theta$ et $x$ dans $\mathbf{R}^d$ :

$$g(\theta, x) = e^{-\theta.x - \frac{1}{2}|\theta|^2} f(X + \theta),$$

avec $X$ un vecteur de $\mathbf{R}^d$ formé de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et $f$ une fonction bornée telle que $\mathbf{P}(f(X) \neq 0) > 0$.

1. Montrer que :

$$\mathbf{E}\left(g^2(\theta, X)\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\theta.X + \frac{1}{2}|\theta|^2} f^2(X)\right).$$

Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de $s_2(\theta)$ sous forme d'une espérance.

2. Montrer que $s_2(\theta)$ est une fonction de $\theta$ strictement convexe telle que $\lim_{|\theta|\to+\infty} s_2(\theta) = +\infty$. En déduire que $s_2(\theta)$ atteint son minimum en un point $\theta^*$ tel que

$$\mathbf{E}\left((\theta^* - X)e^{-\theta^*.X + \frac{1}{2}|\theta^*|^2} f^2(X)\right) = 0. \tag{44}$$

3. Proposer un algorithme de type Robbins et Monro permettant de résoudre l'équation (43) (on ne cherchera pas à justifier rigoureusement la convergence). Comment utiliser cette suite avec l'algorithme proposé dans la première partie ?

# Méthodes de Monte-Carlo

# Méthodes de Monte-Carlo et Applications en Finance

**Le 27 Mars 2003 — 3 heures**

**Exercice 7** Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ un vecteur constitué de gaussienne centrées réduites indépendantes. Soit $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^d$, tel que $|u| = 1$. On cherche à construire une méthode de stratification à l'aide de la variable aléatoire $u.\xi = \sum_{i=1}^d u_i \xi_i$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $u.\xi$ ? Pour quelle valeur du vecteur $v$ de $\mathbf{R}^d$ le vecteur $\xi - (u.\xi)v$ et la variable aléatoire $(u.\xi)$ sont elles indépendantes ?
2. En déduire une méthode permettant de simuler le couple $(\xi - (u.\xi)u, u.\xi)$ sans utiliser la matrice de variance covariance du vecteur $\xi - (u.\xi)u$.
3. On se donne deux réels $a$ et $b$ tel que $a < b$. Décrire une méthode de simulation (autre que la méthode du rejet) permettant simuler le vecteur $\xi$ conditionnellement à l'événement $a \leq u.\xi < b$.

**Exercice 8** On considère une suite de variables aléatoires $(\xi_n, n \geq 1)$ indépendantes suivant toute une loi gaussienne centrée réduite. On s'intéresse au processus de Markov $(X_n, n \geq 0)$ défini par :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ X_{n+1} = \phi(X_n, \xi_{n+1}). \end{cases}$$

où $x \in \mathbf{R}$ et $\phi$ est une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On se donne un fonction $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l'on cherche à évaluer par simulation la quantité $\mathbf{E}(f(X_N))$, $N$ étant une échéance donnée.

1. Expliquer comment l'on peut calculer par simulation la quantité $\mathbf{E}(f(X_N))$ et estimer l'erreur commise par cette méthode.
2. Comment mettre en œuvre une technique de suites à discrépance faible dans ce cas ? On précisera le nombre de suites à discrépance faibles utilisées et on justifiera empiriquement la méthode utilisée pour la simulation de gaussiennes.

En vue de mettre en œuvre une technique de fonction d'importance on considère le processus $(X_n^\lambda, n \geq 0)$ défini, pour un nombre réel $\lambda$ donné, par $X_0^\lambda = x$ et

$$X_{n+1}^\lambda = \phi(X_n, \xi_{n+1} + \lambda).$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $L_N^\lambda$ de la forme $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ telle que
$$\mathbf{E}(F(\xi_1, \ldots, \xi_N)) = \mathbf{E}\left(L_N^\lambda F(\xi_1 + \lambda, \ldots, \xi_N + \lambda)\right).$$
2. En déduire que
$$\mathbf{E}\left(L_N^\lambda F(X_1^\lambda, \ldots, X_N^\lambda)\right) = \mathbf{E}(F(X_1, \ldots, X_N)),$$
et que, en notant $V(\lambda) = \mathrm{Var}\left(L_N^\lambda F(X_1^\lambda, \ldots, X_N^\lambda)\right)$ :
$$V(\lambda) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda(\xi_1 + \cdots + \xi_N) + \frac{N\lambda^2}{2}} F^2(X_1, \ldots, X_N)\right) - \mathbf{E}(F(X_1, \ldots, X_N))^2.$$
3. Montrer que $\lim_{\lambda \to \pm\infty} V(\lambda) = +\infty$, si l'on suppose que la variable aléatoire $F(X_1, \ldots, X_N)$ est non nulle.

4. Montrer que, lorsque $F$ est bornée, on a :

$$V'(\lambda) = \mathbf{E}\left( (N\lambda - (\xi_1 + \cdots + \xi_N)) \, e^{-\lambda(\xi_1+\cdots+\xi_N)+\frac{N\lambda^2}{2}} F^2(X_1, \ldots, X_N) \right),$$

   puis que $V$ est deux fois différentiable avec $V''(\lambda) \geq 0$.

5. Montrer que, si la variable aléatoire $F(X_1, \ldots, X_N)$ est non nulle, $V''(\lambda) > 0$ et en déduire que $V$ atteint son minimum en un unique $\lambda_0$.

6. On s'intéresse au cas où $F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_n) = \mathbf{1}_{\{x_n \geq K\}}$. Montrer que

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(f(X_n))}}{\mathbf{E}(f(X_n))} = +\infty.$$

   A quel phénomène doit-on s'attendre lorsque l'on met en œuvre une méthode de de Monte-Carlo et que $K$ est grand ?

7. On suppose dans cette question que $\phi(x, \xi) = x + \xi$. Identifier la loi de $X_N^\lambda$ et montrer que l'on a :

$$\mathbf{E}\left(f(X_N)\right) = \mathbf{E}\left(f^\lambda(X_N^\lambda)\right),$$

   $f^\lambda$ étant une fonction que l'on précisera. Comment peut on tirer parti de cette constatation pour rendre plus efficace une méthode de Monte-Carlo et de suite à discrépance faible.

**Exercice 9 Recyclage dans la méthode du rejet**
On veut évaluer par une méthode de Monte Carlo :

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)p(x)dx,$$

en simulant un $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes selon la loi de densité $p$, supposée continue, par la méthode du rejet. On considère donc une loi auxiliaire de densité $q$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$p(x) \leq Mq(x),$$

$M$ étant un nombre réel positif donné.
On a donc simulé un nombre aléatoire $N$ de variable aléatoire de densité $q$ : $(Y_1, \ldots, Y_N)$ et $N$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ : $(U_1, \ldots, U_N)$. Parmi celle ci on note $Z_1, \ldots, Z_{N-n}$ les v.a. $Y$ qui ont été rejetées, c'est à dire telles que :

$$p(Y_i) \leq MU_i q(Y_i).$$

1. Quelle est la loi de $N$ ?

2. Quelle est la loi de $Z_1, \ldots, Z_{N-n}$ ? Montrer que $N$ et les $Z_1, \ldots, Z_{N-n}$ sont des v.a. indépendantes.

3. Montrez que :

$$\frac{1}{N}\left( \sum_{i=1}^{n} f(X_i) + \sum_{i=1}^{N-n} \frac{(M-1)p(Z_i)}{(Mq-p)(Z_i)} f(Z_i) \right)$$

   est un estimateur sans biais de $\mathbf{E}\left(f(X_1)\right)$.

# Méthodes de Monte-Carlo, Applications en Finance

**Le 28 Mars 2002 — 3 heures**

**Exercice 10** Soit $U = (U_1, \ldots, U_d)$ une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]^d$ et $f : [0,1]^d \to \mathbf{R}$ une fonction à variation bornée au sens de la mesure. On note $V(f)$ sa variation. Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ dans $[0,1]^d$, on note $\{x+y\}$ le vecteur de $[0,1]^d$

$$\{x+y\} = (\{x_1+y_1\}, \ldots, \{x_d+y_d\}),$$

où $\{x\}$ est la partie décimale d'un réel $x$. On souhaite évaluer $\mathbf{E}(f(U))$.

1. Soit $y \in [0,1]^d$. Quelle est la loi de $\{y_1 + U_1\}$? En déduire que

$$\mathbf{E}(f(\{y+U\})) = \mathbf{E}(f(U)).$$

2. Soit $(y^k)_{1\le k\le p}$ une suite de $[0,1]^d$. On pose $X = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(\{U+y^k\})$ et

$$\epsilon(u) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(\{u+y_k\}) - \mathbf{E}(f(U)).$$

   Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(\epsilon^2(U))$.

3. En déduire la majoration suivante $\mathrm{Var}(X) \le V(f)^2 \mathbf{E}((D_p^*(U,y))^2)$, où pour $u \in [0,1]^d$, $D_p^*(u,y)$ désigne la discrépance de la suite $(\{u+y^k\})_{1\le k\le p}$.

On admet (voir l'exercice 13 pour une preuve) que $\forall u \in [0,1]^d,\ D_p^*(u,y) \le 3^d D_p^*(y)$ où $D_p^*(y)$ désigne la discrépance de la suite $(y^k)_{1\le k\le p}$.

4. Quel choix proposez-vous pour la suite $(y^k)_{1\le k\le p}$?

5. Soit $(U^n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]^d$. Pourquoi, pour un même nombre d'évaluations de la fonction $f$, peut-on espérer une meilleure précision en approchant $\mathbf{E}(f(U))$ par $\frac{1}{Np}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} f(\{U^n+y^k\})$ (méthode mixte) que par $\frac{1}{Np}\sum_{n=1}^{Np} f(U^n)$ (méthode de Monte-Carlo)?

6. Quel avantage la méthode mixte présente-t-elle par rapport à l'utilisation d'une suite à discrépance faible sans tirages aléatoires?

**Exercice 11** On considère un modèle en finance du type :

$$dS_t = S_t\left(rdt + h(\sigma_t)dW_t^1\right), S_0 = x,$$

où $h$ est une fonction régulière et bornée et $\sigma_t$ est solution de :

$$d\sigma_t = -c\left(\sigma_t - \sigma\right)dt + \alpha dW_t^2, \sigma_0 = \sigma.$$

et $W^1$ et $W^2$ sont deux mouvements browniens par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$ et tels que $d < W^1, W^2 >_t = \rho dt$, $\rho$ étant une constante strictement positive. On cherche à calculer :

$$\mathbf{E}\left(f(S_T)\right).$$

1. Montrer que le couple $(S_t, \sigma_t)$ est une diffusion et identifier l'opérateur $A$, tel que si $f(x,y)$ est une fonction de classe $C^2$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ admettant des dérivées premières bornées alors :

$$f(S_t, \sigma_t) - \int_0^t (Af)(S_s, \sigma_s) ds,$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

2. Écrire une équation aux dérivées partielles telle que, si $u(t,x,y)$ en est une solution, admettant des dérivées premières en $x$ et $y$ uniformément bornées alors :

$$\mathbf{E}\left(f(S_T)\right) = u(0, x, \sigma),$$

et plus généralement $\mathbf{E}\left(f(S_T)|\mathcal{F}_t\right) = u(t, S_t, \sigma_t)$.

3. On suppose que $u$ est une solution, admettant des dérivées premières en $x$ et $y$ bornées, de l'équation aux dérivées partielles identifiée de la question 7. On pose

$$X = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(s, S_s, \sigma_s) S_s h(\sigma_s) dW_s^1 + \int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}(s, S_s, \sigma_s) \alpha dW_s^2.$$

Montrer que $X = f(S_T) - \mathbf{E}\left(f(S_T)\right)$. En déduire que une technique variable de contrôle utilisant $X$ annulant la variance de la méthode de Monte-Carlo.

4. La variable de contrôle $X$ n'est pas réellement utile puisqu'elle fait intervenir la fonction $u$ que l'on cherche précisément à évaluer. On suppose donc, que $\tilde{u}$ est une approximation réaliste de $u$ et l'on pose :

$$\tilde{X} = \int_0^T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(s, S_s, \sigma_s) S_s h(\sigma_s) dW_s^1 + \int_0^T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(s, S_s, \sigma_s) \alpha dW_s^2.$$

Calculer la variance de $f(S_T) - \tilde{X}$ sous la forme d'une espérance faisant intervenir $u$ et $\tilde{u}$. Dans quelle condition peut on espérer utiliser $\tilde{X}$ pour réduire la variance ?

**Exercice 12** On considère un mouvement brownien unidimensionnel $(W_t, t \geq 0)$. Soit $b$ et $\sigma$ deux fonctions lispchitziennes bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $(X_t, t \geq 0)$ la solution unique de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, X_0 = x.$$

On cherche à mettre en oeuvre une technique de fonction d'importance pour le calcul de $\mathbf{E}(f(X_T))$ pour une fonction $f$ continue et bornée. On supposera dans la suite que $f(x) \geq \epsilon$, $\epsilon$ étant un réel strictement positif.

1. On se donne une fonction $h(t,x)$ bornée et l'on pose

$$L_t^h = \exp\left(-\int_0^t h(s, X_s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s, X_s) ds\right).$$

Montrer que $(L_t^h, 0 \leq t \leq T)$ est une martingale. Sous quelle probabilité $\mathbf{P}^h$ le processus $W_t^h = W_t + \int_0^t h(s, X_s) ds$ est il un mouvement brownien standard ?

2. On pose

$$Z = \exp\left(\int_0^T h(t, X_t) dW_t^h - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t, X_t) dt\right) f(X_T).$$

Prouver que :

$$\mathbf{E}^h(Z) = \mathbf{E}\left(f(X_T)\right).$$

3. Montrer que $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ vérifie, sous la probabilité $\mathbf{P}^h$, une équation différentielle stochastique, faisant intervenir $W^h$ que l'on précisera. Comment peut on simuler le processus $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ et la variable aléatoire $Z$ sous la probabilité $\mathbf{P}^h$ ? Interpréter le résultat de la question 2 en terme de méthode de Monte-Carlo.

4. Soit $u(t,x)$ est une solution de classe $C^{1,2}$, admettant une dérivée en $x$ uniformément bornée, de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (Au)(t,x) = 0, & t \leq T, x \in \mathbf{R}, \\ u(T,x) = f(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

où $A = b(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. On pose $\phi_t = \frac{u(t,X_t)}{u(0,x)}$, montrer que, pour $t \leq T$ :

$$\phi_t = 1 - \int_0^t \phi_s h(s, X_s) dW_s \text{ avec } h(s,x) = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)}{u(t,x)}\sigma(x).$$

En déduire que $\phi_T = L_T^h$.

5. Montrer que, si $Z$ est la variable aléatoire définie à la question 2, presque sûrement sous $\mathbf{P}^h$ (ou $\mathbf{P}$) on a :

$$Z = \mathbf{E}\left(f(X_T)\right).$$

En déduire une technique de réduction (en fait d'annulation) de variance permettant de calculer $\mathbf{E}\left(f(X_T)\right)$.

**Exercice 13 Fin de l'exercice 1** On souhaite maintenant majorer la discrépance $D_p^*(u,y)$.

1. **On suppose** $d = 1$. Montrer que pour $x, z, u \in [0,1]$,

$$\mathbf{1}_{\{z+u\} \leq x} = \mathbf{1}_{u \leq x}(\mathbf{1}_{z \leq x-u} + 1 - \mathbf{1}_{z \leq 1-u}) + \mathbf{1}_{x<u}(\mathbf{1}_{z \leq 1+x-u} - \mathbf{1}_{z \leq 1-u}).$$

En remarquant que $x = (x-u) + 1 - (1-u) = (1+x-u) - (1-u)$, en déduire que

$$\forall u \in [0,1],\ D_p^*(y,u) \leq 2D_p^*(y).$$

2. On se place maintenant dans le cas général $d \geq 2$. Justifier rapidement le facteur $3^d$ dans la majoration $D_p^*(u,y) \leq (3^d - 1)D_p^*(y)$ où $u \in [0,1]^d$.

# Méthodes de Monte-Carlo, Applications en Finance

**Le 29 Mars 2001 — 3 heures**

**Exercice 1 : Méthodes de Monte-Carlo.** Le but de cet exercice est d'étudier diverses méthodes permettant d'évaluer $p = \mathbf{P}(Z > t)$, où $Z$ est une variable aléatoire de la forme :

$$Z = \lambda_1 e^{\beta_1 X_1} + \lambda_2 e^{\beta_2 X_2},$$

$(X_1, X_2)$ étant un couple de variables aléatoires réelles dont on précisera la loi dans la suite, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\beta_1$ et $\beta_2$ étant des réels positifs.

1. On suppose, dans cette question, que $(X_1, X_2)$ est un vecteur gaussien centré tel que $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 1$ et $\text{Cov}\,(X_1, X_2) = \rho$, avec $|\rho| \leq 1$. Expliquer comment l'on peut simuler des variables aléatoires selon la loi de $Z$. Décrire une méthode de Monte-Carlo permettant d'estimer $p$ ainsi que de donner une idée de l'erreur que l'on commet.

2. On suppose que la valeur de $t$ est telle que l'on cherche à estimer une valeur de $p$ de l'ordre de $10^{-7}$. Donner un ordre de grandeur du nombre de tirages à effectuer dans une méthode de Monte-Carlo standard pour pouvoir affirmer, avec une confiance proche de $1$, que $\frac{1}{2} \times 10^{-7} \leq p \leq \frac{3}{2} \times 10^{-7}$.

3. Proposer une méthode utilisant des suites à discrépance faible permettant de calculer $p$.

4. On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont deux gaussiennes centrées de variance $1$ indépendantes. Soit $m$ un nombre réel. Montrer que $p$ peut s'écrire sous la forme

$$p = \mathbf{E}\left[\phi(X_1, X_2)\mathbf{1}_{\left\{\lambda_1 e^{\beta_1(X_1+m)} + \lambda_2 e^{\beta_2(X_2+m)} \geq t\right\}}\right],$$

   $\phi$ étant une fonction que l'on précisera. Proposer un choix de $m$ assurant que :

$$\mathbf{P}(\lambda_1 e^{\beta_1(X_1+m)} + \lambda_2 e^{\beta_2(X_2+m)} \geq t) \geq \frac{1}{4}.$$

   Proposer une nouvelle méthode de Monte-Carlo permettant d'évaluer $p$. Expliquer comment l'on peut vérifier, sur les simulations, que cette méthode réduit la variance.

5. On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition respective $F_1(x)$ et $F_2(x)$. Montrer que $p = \mathbf{E}\left[1 - G_2\left(t - \lambda_1 e^{\beta_1 X_1}\right)\right]$, où $G_2(x)$ est une fonction que l'on explicitera, telle que la variance de $1 - G_2\left(t - \lambda_1 e^{\lambda_1 X_1}\right)$ soit toujours inférieure à celle de $\mathbf{1}_{\left\{\lambda_1 e^{\beta_1 X_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2 X_2} > t\right\}}$. En déduire une nouvelle méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $p$.

6. On se place à nouveau dans le cas où $(X_1, X_2)$ est une vecteur gaussien centrée tel que $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 1$ et $\text{Cov}\,(X_1, X_2) = \rho$, avec $|\rho| \leq 1$, montrer que $p = \mathbf{E}\left[1 - F_2\left(\phi(X_1)\right)\right]$, $F_2$ étant la fonction de répartition de $X_2$ et $\phi$ une fonction que l'on précisera.

   En déduire une méthode de Monte-Carlo, dont on prouvera quelle réduit la variance, permettant d'évaluer $p$.

**Exercice 2 : Méthodes numériques pour le calcul du $\Delta$.** On considère un mouvement brownien unidimensionnel $(W_t, t \geq 0)$ et $b$ et $\sigma$ deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on supposera infiniment différentiable, admettant des dérivées en $x$ de tout ordre bornées. On note $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ la solution unique de :

$$dX_s = b(X_s)ds + \sigma(X_s)dW_s, s \geq t, X_t = x.$$

On cherche à calculer le prix et la couverture d'une option qui promet à l'instant $T$, $f(X_T^{0,x})$. On supposera dans la suite que $f$ est régulière.

1. Écrire une équation aux dérivées partielles telle que toute solution régulière $u(t,x)$ s'écrive sous la forme $u(t,x) = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x})\right)$. Comment peut-on calculer le prix de l'option à l'instant $t$, donnée par $V_t = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{0,x}) | \mathcal{F}_t\right)$, à l'aide de $u$ ?

2. On s'intéresse maintenant à la couverture de cette option que l'on supposera donnée par $v(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)$. On suppose que la fonction $v(t,x)$ est régulière et admet une dérivée en $x$ bornée. Montrer, par un calcul direct, que $v(t,x)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on explicitera en fonction de $b$ et $\sigma$.

3. En déduire que $v(t,x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$v(t,x) = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)+\int_t^T b'(Y_s^{t,x})ds} f'(Y_T^{t,x})\right),$$

   $Y^{t,x}$ étant une diffusion que l'on précisera.

4. En utilisant le théorème de Girsanov montrer que $v(t,x) = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f'(X_T^{t,x}) Z_T^{t,x}\right)$, le couple $(X_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, s \geq t)$ étant la solution unique du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s)dt + \sigma(X_s)dW_s, s \geq t, X_t = x \\ dZ_s = Z_s \left\{ b'(X_s)dt + \sigma'(X_s)dW_s \right\}, Z_t = 1. \end{cases}$$

5. Proposer une méthode de simulation permettant d'approcher $v(0,x)$ en simulant le couple $(X, Z)$. On précisera en particulier comment l'on peut discrétiser l'équation différentielle stochastique.

6. Le schéma de Milsthein est il utilisable pour simuler ce couple de diffusion ? Que proposer vous pour améliorer la vitesse de convergence (en fonction du pas de discrétisation temporelle) de l'algorithme ?

**Exercice 3 : Simulation d'un diffusion** On considère l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t, X_0 = x,$$

$c$ et $\sigma$ étant deux constantes réelles et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel.

1. On se donne un pas de temps $h > 0$. Écrire le schéma d'Euler pour cette équation différentielle stochastique. La loi du schéma est elle identique à celle du processus initial aux instants $kh$ ?

2. On se donne un pas de temps $h > 0$. Montrez que l'on a :

$$X_{(k+1)h} = \phi_h(X_{kh}, G_{k+1}),$$

   la suite $(G_k, k \geq 1)$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi gaussienne centrée réduite et la fonction $\phi_h$ une fonction que l'on déterminera. En déduire une méthode de simulation exacte selon la loi du processus aux instants $kh$.

3. Calculer la loi conditionnelle de $X_u$ sachant $X_s$ et $X_t$, pour $s \leq u \leq t$. Proposer, pour une fonction régulière et bornée $f$, un schéma d'approximation de $\int_0^T f(X_s)ds$ construit à partir des valeurs $X_{kh}$.

4. Soit $A$ une matrice $n \times n$, $\Sigma$ une matrice $n \times p$ et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien $p$-dimensionnel. Soit $(Z_t, t \geq 0)$ la solution unique de :

$$dZ_t = -AX_t dt + \Sigma dW_t, Z_0 = z.$$

Calculer $d(e^{tA} Z_t)$. En déduire une méthode de simulation exacte de $(Z_{kh}, k \geq 0)$.

# Méthodes de Monte-Carlo, Applications en Finance

**Mars 2000**

## Problème 1 : Calcul de prix d'options

Le but de ce problème est de proposer des méthodes de calcul du prix d'un option sur deux actifs couplés, avec une corrélation dépendant du temps.
Nous supposons que les processus $S^1$ et $S^2$ décrivant les prix sont solutions des équations stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 \left( rdt + \sigma_1 d\bar{W}_t^1 \right), S_0^1 = x_1, \\ dS_t^2 = S_t^2 \left( rdt + \sigma_2 d\bar{W}_t^2 \right), S_0^2 = x_2. \end{cases}$$

$r$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $x_1$, $x_2$ sont des constantes réelles décrivant les 2 modèles de Black et Scholes. On suppose de plus que $(\bar{W}_t^1, t \geq 0)$ et $(\bar{W}_t^2, t \geq 0)$ sont deux mouvements browniens par rapport à une filtration commune $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ qui vérifient :

$$d < \bar{W}^1, \bar{W}^2 >_t = \rho(t) dt.$$

$\rho(t)$ étant un fonction déterministe telle que :

$$|\rho(t)| \leq \rho_0 < 1.$$

On admettra que, dans ce modèle, le prix à l'instant $t$ d'une option qui promet à l'instant $T$, $f(S_T^1, S_T^2) = (S_T^1 - \lambda S_T^2)_+$ s'écrit :

$$V_t = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^1, S_T^2) | \mathcal{F}_t \right).$$

**Partie I : Méthodes de Monte-Carlo**

1. Soit $(W_t^1, t \geq 0)$ et $(W_t^2, t \geq 0)$ deux mouvements browniens, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, indépendants. Montrer que l'on peut construire, à partir de $W^1$ et $W^2$, deux mouvements browniens $\bar{W}^1$ et $\bar{W}^2$ vérifiant les hypothèses précédentes.

2. Calculer la loi du couple $(\int_0^T \rho(s) dW_s^1, W_T^1)$ et en déduire une méthode de simulation efficace selon la loi de ce couple. Que se passe t'il lorsque $\rho(t)$ ne dépend pas de $t$ ?

3. Proposer une méthode de simulation efficace du couple $(S_T^1, S_T^2)$.

4. On considère une option qui promet à l'instant $T$, $f(S_T^1, S_T^2)$. Proposer une méthode de Monte-Carlo permettant d'évaluer le prix à l'instant $0$ de cette option. On expliquera comment l'on peut évaluer l'erreur que l'on commet par cette méthode.

5. Expliquer comment l'on peut utiliser des suites à discrépances faibles dans cet exemple.

6. On suppose, dans cette question, que $\rho(t)$ n'est plus une fonction déterministe,mais un processus aléatoire indépendant des mouvements browniens $\bar{W}^1$ et $\bar{W}^2$. Expliquer comment l'on peut simuler le couple $(S_T^1, S_T^2)$ lorsque l'on sait simuler le couple :

$$\left( \int_0^T \rho(s)^2 ds, \int_0^T \rho(s) ds \right).$$

**Partie II : Techniques de réduction de variance**

1. On suppose que $\rho(t) = \rho_0$ ne dépend pas de $T$. Montrer que le prix de l'option en 0, $V_0$ s'exprime par une formule de type Black et Scholes. Comment cette formule se généralise t'elle à l'instant $t$ ?

2. Dans cette question, on supposera que $\rho(t)$ dépend de $t$ mais "varie peu" autour de $\rho_0$. Proposer une technique de variable de contrôle pouvant réduire la variance pour le calcul de $V_0$.

3. Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbf{P}(S_T^1 \geq \lambda S_T^2) = 0$. Donner des éléments intuitifs permettant d'affirmer qu'une méthode de Monte-Carlo classique sera inefficace lorsque $x_1 << \lambda x_2$.

4. Soit $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux nombres réels. On pose $\tilde{W}_t^1 = W_t^1 + \lambda_1 t$ et $\tilde{W}_t^2 = W_t^2 + \lambda_2 t$. Sous quelle probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, $(\tilde{W}_t^1, t \leq T)$ et $(\tilde{W}_t^2, t \leq T)$ sont-ils des mouvements browniens indépendants ?

5. En utilisant le résultat précédent, donner une représentation de $V_0$ sous $\tilde{\mathbf{P}}$ faisant intervenir $\tilde{W}^1$ et $\tilde{W}^2$. Comment proposer vous de choisir $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de façon à réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $V_0$.

**Partie III : Équation aux dérivées partielles et calcul d'options**

1. Expliciter une famille d'opérateurs $A_t$ telle que pour toute fonction de classe $C^2$ sur $\mathbf{R}^2$ admettant des dérivées premières bornées :
$$f(S_t^1, S_t^2) - \int_0^t A_s f(S_s^1, S_s^2) ds,$$
est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

2. Écrire une équation aux dérivées partielles telle que si $u(t, x, y)$ en est une solution alors :
$$\mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f(S_T^1, S_T^2) | \mathcal{F}_t\right) = u(t, S_t^1, S_t^2).$$
On *montrera* cette égalité en supposant que $u$ est régulière.

3. On note $\tilde{S}_s^1 = e^{-rs} S_s^1$ et $\tilde{S}_s^2 = e^{-rs} S_s^2$. Montrer que :
$$e^{-rT} f(S_T^1, S_T^2) = \mathbf{E}\left(e^{-rT} f(S_T^1, S_T^2)\right) + \int_0^T H_s^1 d\tilde{S}_s^1 + \int_0^T H_s^2 d\tilde{S}_s^2,$$
$H_s^1$ et $H_s^2$ étant des variables aléatoires que l'on explicitera en fonction de $u(s, x, y)$ (supposée régulière), $S_s^1$ et $S_s^2$.

4. Déduire de la question précédente une variable de contrôle, en fonction des processus $H^1$, $H^2$, $S^1$ et $S^2$ qui annule la variance de la variable aléatoire $e^{-rT} f(S_T^1, S_T^2)$. Comment peut on approcher cette variable de contrôle à l'aide des accroissements de $\tilde{S}^1$ et $\tilde{S}^2$ entre 0 et $T$ ?

5. Lorsque $H^1$ et $H^2$ ne peuvent être connus explicitement, mais qu'un approximation $\tilde{u}$ de $u$ est disponible, proposer une technique de variable de contrôle réduisant (probablement!) la variance. Proposer un choix, plausible, de $\tilde{u}$ lorsque $\rho(t)$ varie peu autour d'une valeur $\rho_0$.

6. On considère maintenant une option promettant $f(S_T^1, S_T^2)$ à l'instant $T$, sous réserve que $S_t^1$ n'ait pas dépassé une valeur barrière $L$ durant l'intervalle $[0, T]$. Écrire une équation aux dérivées partielles telle qu'une solution $v$ permette d'exprimer le prix de cette option sous la forme :
$$\mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f(S_T^1, S_T^2) \mathbf{1}_{\left\{t \leq s \leq T, S_s^1 \leq L\right\}} | \mathcal{F}_t\right) = v(t, S_t^1, S_t^2).$$
On *prouvera* cette égalité en supposant $v$ régulière.

# Méthodes de Monte-Carlo, Applications en Finance

**Mars 1999**

## Problème 1 : Calcul de prix d'options

Le but de ce problème est d'étudier diverses méthodes d'évaluation d'options dites "best off". Ce type d'option promet à son détenteur le maximum du rendement de plusieurs actifs. Si le prix de ces actifs à un instant $T$, est donné par $S_T^1, \ldots, S_T^d$ la payoff de l'option s'exprime par :

$$f(S_T^1, \ldots, S_T^d) = \left(\max\left(S_T^1, \ldots, S_T^d\right) - K\right)_+,$$

$T$ étant l'échéance de l'option et $K$ jouant le rôle d'un strike.
On supposera dans la suite que les actifs $(S_t^i, t \geq 0)$ sont donnés par la solution unique de l'équation :

$$dS_t^i = S_t^i\left(rdt + \sigma_i dW_t^i\right), S_0^i = x_i,$$

$r$ étant le taux sans risque du marché, les $\sigma_i$ étant les volatilités des actifs et les mouvements browniens $(W_t^i, t \geq 0)$, par rapport à une filtration commune $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, vérifiant $< W^i, W^j >_t = \rho^{ij} t$, les $\rho^{ij}$ étant donnés par une matrice $(\rho^{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ définie positive telle que $\rho^{ii} = 1$.
On admettra que, sous ces hypothèses, le prix de l'option à l'instant $t$ est donné par :

$$V_t = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right).$$

1. On cherche tout d'abord à mettre en oeuvre une méthode de Monte-Carlo pour calculer $V_0$. Expliquer comment simuler le vecteur $S_t = \left(S_t^1, \ldots, S_t^d\right)$. Expliciter la méthode de Monte Carlo dans ce cas. On précisera la façon dont on peut estimer l'erreur de la méthode.

2. Proposer une méthode utilisant une suite à discrépance faible permettant de calculer $V_0$.

3. On suppose que $x_1 >> x_2 > \cdots > x_d$, proposer une variable de contrôle permettant (d'espérer) réduire la variance lors du calcul de $V_0$ (On ne cherchera pas à prouver que la méthode réduit la variance, mais on vérifiera que l'on sait expliciter l'espérance de la variable de contrôle).

4. Montrer que si $L$ et $K$ sont deux nombres réels, on sait calculer :

   $$\phi(L) = \mathbf{E}\left(e^{-rT}\left(\max\left(S_T^1, L\right) - K\right)\right),$$

   à l'aide de la fonction $N(d) = \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$.

5. On suppose que $d = 2$ et que $\rho^{12} = 0$. Montrer que $W_T^1$ et $W_T^2$ sont indépendants et calculer :

   $$\mathbf{E}\left(e^{-rT}\left(\max\left(S_T^1, S_T^2\right) - K\right) | S_T^2\right).$$

   En déduire une méthode permettant de réduire la variance pour le calcul de $V_0$.

6. On suppose maintenant que $\rho^{12} \neq 0$. Calculer la loi de $W_T^1$ sachant $W_T^2$ et reprendre le question précédente.

7. Soit $g$ une fonction de classe $C^2$ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$, admettant des dérivées en $x_i$, pour $1 \leq i \leq d$ bornées. Identifier l'opérateur différentiel du second ordre $A$ tel que :

   $$M_t = g(S_t) - \int_0^t (Ag)(X_s) ds,$$

   soit une martingale.

8. En utilisant l'opérateur $A$, écrire une équation aux dérivées partielles telle qu'une solution régulière $u(t, x_1, \dots, x_d)$ permette d'écrire le prix $V_t$ sous la forme $V_t = u(t, S_t^1, \dots, S_t^d)$.

9. On considère ici le cas d'une option européenne promettant $f(S_T^1, S_T^2)$ mais l'option disparaît si l'un des deux actifs dépasse une valeur fixée à l'avance ($L^1$ pour $S^1$ et $L^2$ pour $S^2$). On notera par $V_t^0$ le prix à l'instant $t$ de cette option donné par :

$$V_t^0 = \mathbf{E}\left(e^{-r(T-t)}\mathbf{1}_{\{\forall s, 0 \leq s \leq T, S_s^1 < L_1 \text{ et } S_s^2 < L_2\}} f(S_T)|\mathcal{F}_t\right).$$

Proposer une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $V_0^0$.

10. Soit $v(t, x_1, x_2)$ une fonction que l'on supposera de classe $C^{1,2}$ sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, admettant des dérivées en $x_1$ et $x_2$ bornées, vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t, x_1, x_2) & \\ \qquad +(Av)(t, x_1, x_2) - rv(t, x_1, x_2) = 0, & t \leq T, x_1 < L_1, x_2 < L_2, \\ v(t, x_1, L_2) = 0, & t \leq T, x_1 < L_1, \\ v(t, L_1, x_2) = 0, & t \leq T, x_2 < L_2, \\ v(T, x_1, x_2) = f(x_1, x_2), & x_1 < L_1, x_2 < L_2. \end{cases}$$

On note $\tau = \inf\{t > 0, S_t^1 \geq L_1 \text{ ou } S_t^2 \geq L_2\}$, montrer que

$$M_t = e^{-r(t\wedge\tau)} v(t \wedge \tau, S_{t\wedge\tau}^1, S_{t\wedge\tau}^2)$$

est une martingale. En déduire que $V_0^0 = v(0, x_1, x_2)$ et plus généralement une forme pour $V_t^0$.

## Problème 2 : Discrétisation d'EDS

1. Discrétiser par le schéma d'Euler usuel, de pas $\frac{T}{n}$, le modèle lognormal de Black et Scholes. On notera $(\bar{S}_{pT/n}^n)$ la chaîne de Markov associée. Représenter $\bar{S}_T^n$ sous la forme d'un produit. En déduire la valeur de la fonction $C_1(T)$ telle que :

$$\mathbf{E}|S_T|^2 - \mathbf{E}|\bar{S}_T^n|^2 = \frac{C_1(T)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vérifier que $|C_1(T)|$ tend vers l'infini avec $T$.

2. À présent, considérer le modèle de type Vasicek :

$$dr_t = -\theta r_t dt + \sigma dW_t,$$

avec $\theta > 0$, $\sigma > 0$ et $r_0$ égal à une constante. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $R_{p+1}^n$ telle que :

$$r_{(p+1)/n} = r_{p/n} + \sigma(W_{(p+1)/n} - W_{p/n}) - \theta\frac{1}{n}r_{p/n} + R_{p+1}^n,$$

avec :

$$\exists C > 0,\ \forall n > 1,\ \forall p \geq 0,\ \mathbf{E}|R_{p+1}^n|^2 \leq \frac{C}{n^3}.$$

3. Discrétiser par le schéma d'Euler usuel, de pas $\frac{1}{n}$, ce modèle. On notera $(\bar{r}_{p/n}^n)$ la chaîne de Markov associée. Soit :

$$\epsilon_{p+1}^n := \mathbf{E}|r_{(p+1)/n}|^2 - \mathbf{E}|\bar{r}_{(p+1)/n}^n|^2.$$

Montrer que :

$$\exists C_1, C_2, C_3 > 0,\ \forall n > 1,\ \forall p \geq 0,\ \epsilon_{p+1}^n \leq \left(1 - \frac{C_1}{n}\right)\epsilon_p^n + C_1\sqrt{\epsilon_p^n}\frac{1}{n^2} + \frac{C_3}{n^3}.$$

4. En raisonnant par l'absurde, montrer alors :

$$\exists C > 0,\ \forall n > 1,\ \forall p \geq 0,\ \epsilon_p^n \leq \frac{C}{n^2}.$$

5. Montrer que $r_{p/n}$ et $\bar{r}^n_{p/n}$ sont deux variables aléatoires gaussiennes. Calculer leur variance et expliciter l'erreur d'approximation en fonction de $n$ et $p$. Montrer qu'elle peut être bornée uniformément en $p$.

# Méthodes de Monte Carlo et Équations d'Évolution

**Avril 1998** 3 heures

**Exercice 1** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites. On cherche à évaluer par simulation $\theta = \mathbf{E}\left(e^{XY}\right)$.

1. Expliciter la méthode de Monte-Carlo classique et expliquer comment l'on peut évaluer l'erreur dans cette méthode.
2. Proposer une méthode utilisant des suites à discrépances faibles en supposant calculable l'inverse de la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.
3. Proposer une technique de variable de controle permettant de réduire la variance de votre estimateur.
4. Proposer une méthode de variables antithétiques pour estimer $\theta$. Pouver vous prouver que votre méthode réduit la variance ?
5. Proposer une technique de conditionnement pour estimer $\theta$.

---

**Problème 1** On considère le modèle d'actif financier suivant. Soit $(X_t, t \geq 0)$ la solution unique de :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, X_0 = x,$$

$b$ et $\sigma$ étant deux fonctions lipschitziennes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $(B_t, t \geq 0)$ étant un mouvement brownien réel. On suppose, de plus, que le processus décrivant le prix d'un actif $(S_t, t \geq 0)$ est solution de :

$$dS_t = S_t\left(R(X_t)dt + V(X_t)dW_t\right), S_0 = y$$

$R$ et $V$ étant deux fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $R$ étant de plus positive et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien indépendant de $(B_t, t \geq 0)$.

1. On cherche à calculer $V_t^1 = \mathbf{E}\left(e^{-\int_t^T R(X_s)ds}|\mathcal{F}_t\right)$. Écrire une équation aux dérivées partielles telle qu'une solution régulière $u(t,x)$ permet de représenter $V_t^1$ sous la forme $u(t, X_t)$.
2. Vérifier que le couple $(X_t, S_t)$ est solution d'une équation différentielle stochastique et en déduire qu'il existe un opérateur différentiel $A$ que l'on précisera tel que :

$$f(X_t, S_t) - \int_0^t (Af)(X_t, S_t)ds$$

   est une martingale dès que $f$ est de classe $C^2$ à dérivées bornées. Comment doit on modifier l'opérateur $A$ apparaissant dans la question précédente si les browniens $B$ et $W$ vérifient $d < W, B >_t = \rho dt$ ?
3. On cherche à calculer : $V_t^2 = \mathbf{E}\left(e^{-\int_t^T R(X_s)ds} f(S_T)|\mathcal{F}_t\right)$. Montrer que $V_t^2 = u(t, X_t, S_t)$ si $u$ est une solution régulière d'une équation aux dérivées partielles que l'on précisera.
4. Montrez que l'on peut écrire $S_t$ sous la forme :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(R(X_s) - \frac{V(X_s)^2}{2}\right) ds + \int_0^t V(X_s)dW_s\right).$$

5. En utilisant la question 4 et le fait que les processus $X$ et $W$ sont indépendants, montrer que :

$$V_0^2 = \mathbf{E}\left(\psi\left(\frac{1}{T}\int_0^T R(X_s)ds, \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(X_s)^2 ds}\right)\right),$$

$\psi(r, \sigma)$ étant une fonction que l'on explicitera comme une espérance faisant intervenir seulement le mouvement brownien $W$. Lorsque $\psi$ admet une forme explicite, en déduire une méthode de Monte-Carlo permettant d'évaluer $V_0^2$. Pourquoi cette méthode diminue t'elle la variance par rapport à une méthode de simulation classique ?

---

**Problème 2** Soit $(U_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ de loi commune $\mu(dx)$. Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramétre $\lambda$ indépendant de de la suite $(U_i, i \geq 1)$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma\left(N_s, s \leq t, U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_t\}}, j \geq 1\right)$. On note alors $(\tau_i, i \geq 1)$ les instants de saut du processus $N$.
Dans ce problème on utilisera librement le résultat suivant.

> Soit $\Phi(y, z)$ une fonction mesurable bornée de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel $z$ la fonction $y \mapsto \Phi(y, z)$ soit continue sur $\mathbf{R}^d$, et soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus continu à *gauche*, à valeur dans $\mathbf{R}^d$, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Alors le processus $M_t$ défini par :
>
> $$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \mu(dz)\Phi(Y_s, z),$$
>
> est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$.

1. On se donne une fonction continue $H(x, u)$ de $\mathbf{R}^d \times [0, 1]$ dans $\mathbf{R}^d$. On considére le processus continu à *droite* $(X_t, t \geq 0)$ construit de la façon suivante : $X_s = x$, pour $s \in [0, \tau_1[$, puis, pour $k \geq 1$ :

$$X_{\tau_k^+} = H(X_{\tau_k^-}, U_k), X_s = X_{\tau_k^+}, \text{pour } s \in [\tau_k, \tau_{k+1}[.$$

Soit $f$ une fonction continue bornée. Exprimer $f(X_t)$ comme une somme de sauts et en déduire que :

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t (Af)(X_{s^-})ds,$$

est une martingale, si l'on pose : $Af(x) = \lambda \int_{\mathbf{R}^d} (f(H(x, u)) - f(x))\, \mu(du)$. Montrer que $M_t = f(X_t) - \int_0^t (Af)(X_s)ds$.

2. On se donne $b$ un fonction lipschitzienne bornée de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ et l'on modifie la définition du processus $X$ de la façon suivante :

$$X_0 = x, \frac{dX_s}{ds} = b(X_s) \text{pour } s \in [0, \tau_1[,$$

puis, pour $k \geq 1$ :

$$X_{\tau_k^+} = H(X_{\tau_k^-}, U_k),$$
$$X_s = X_{\tau_k^+}, \frac{dX_s}{ds} = b(X_s), \text{ pour } s \in [\tau_k, \tau_{k+1}[.$$

Exprimer $f(X_t)$ et en déduire la forme d'un opérateur différentiel du premier ordre $B$ tel que $M_t = f(X_t) - \int_0^t (A + B)f(X_s)ds$ soit une martingale.

3. Soit $u$ une fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$. On se donne un ouvert borné $\Omega$ de $\mathbf{R}^d$, $g$ une fonction continue et bornée. On suppose que $u$ est une fonction bornée de classe $C^1$ qui vérifie :
$$\begin{array}{l} (A+B)u(x) = 0, \text{ dans } \Omega \\ u(x) = g(x) \text{ dans } \Omega^c. \end{array}$$
Soit $\tau$ est le temps d'arrêt défini par $\tau = \inf\{s \geq 0, X_s \notin \Omega\}$. On suppose que $\mathbf{P}(\tau < +\infty) = 1$. Montrer que $u(x) = \mathbf{E}\left(g(X_\tau)\right)$.

4. On suppose que $\mathbf{E}(\tau) < +\infty$ et que $f$ et $g$ sont des fonctions continues bornées. Comment peut on représenter $u(x)$ à l'aide du processus $X$ si $u$ est une solution bornée et régulière de :
$$\begin{array}{l} (A+B)u(x) = f(x), \text{ dans } \Omega \\ u(x) = g(x) \text{ dans } \Omega^c. \end{array}$$

5. Montrer que si $\Phi(s,x,u)$ est une fonction bornée et continue alors :
$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \mu(dz)\Phi(s, Y_s, z),$$
est une martingale. En déduire que si $u(t,x)$ est une fonction de classe $C^{1,1}$, alors :
$$M_t = u(t, X_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + (A+B)\right) u(t, X_s)ds$$
est une martingale.

6. Montrer que si $u$ est une solution régulière de :
$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} + (A+B)u(t,x) = 0, 0 \leq t \leq T, x_i n\mathbf{R}^d \\ u(T,x) = g(x), x \in \mathbf{R}^d, \end{array}$$
alors $u(0,x) = \mathbf{E}\left(g(X_T)\right)$.

7. Soit $r(x)$ une fonction continue minorée par une constante $\epsilon > 0$. Montrer que si $u$ est une fonction régulière :
$$M_t = e^{-\int_0^t r(X_s)ds} u(X_t) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(X_v)dv}((A+B)u(X_s) - r(X_s)u(X_s))ds,$$
est une martingale.

8. En déduire que si $u$ est une solution bornée et régulière de :
$$(A+B)u(x) - r(x)u(x) = f(x), \text{ dans } \mathbf{R}^d,$$
alors :
$$u(x) = -\mathbf{E}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t r(X_s)ds} f(X_t)dt\right).$$

**Exercice 1** On considère deux fonctions lipschitziennes $b$ et $\sigma$ à valeurs réelles, un brownien unidimensionnel $(W_t)$ et $(X_t)$ la solution de
$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,$$
où $x$ est un réel donné. Soit $(\bar{X}_t, t \leq T)$ le schéma d'Euler en temps continu de pas $h = \frac{T}{n}$: pour $t \in [kh, (k+1)h[$ (avec $(k+1)h \leq T$),
$$\bar{X}_t = \bar{X}_{kh} + b(\bar{X}_{kh})(t-kh) + \sigma(\bar{X}_{kh})(W_t - W_{kh}).$$

1. Soit $p$ un entier non nul. En appliquant la formule d'Itô à $(\bar{X}_t)^{2p} - (\bar{X}_{kh})^{2p}$ pour $t \in [kh, (k+1)h[$, montrer qu'il existe une constante $C(p)$ telle que, pour tout $h$ assez petit, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{E}(\bar{X}_t)^{2p} \leq C(p)$.

2. En déduire que, lors d'un calcul par Monte Carlo de $\mathbf{E}f(\bar{X}_T)$, où $|f|$ est majorée par un polynôme, la variance de l'erreur statistique peut être majorée uniformément en $h$.

# Méthodes de Monte Carlo et Équations d'évolutions

**Mars 1997** 3 heures

### Exercice 1

On suppose que $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{R}$ dont les fonctions de répartitions respectives sont notées $F$ et $G$. On cherche à calculer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo :

$$\theta = \mathbf{P}\left(X + Y \leq t\right).$$

1. Expliquez quelle est la méthode Monte Carlo classique pour ce problème. On précisera, en particulier, comment l'on peut estimer l'erreur commise.
2. Proposer un estimateur de variance réduite en utilisant une méthode de conditionnement.
3. On suppose que $F$ et $G$ sont numériquement facilement inversibles, expliquer comment implémenter la méthode des variables antithétiques. Pourquoi cette méthode diminue t'elle la variance dans ce cas ?
4. On suppose que $h$ est une fonction telle que $\int_0^1 |h(s)|^2 ds < +\infty$. Soit $(U_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Montrez que l'estimateur $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N h\left(\left(i-1+U_i\right)/n\right)$, est meilleur du point de vue de la variance que $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N h\left(U_i\right)$. Comment appliquer ce résultat dans ce cas.
5. Interprétez le résultat précédent en terme de méthode de stratification.

### Exercice 2

On suppose que le prix d'un actif financier $S_t$ s'écrit sous la forme :

$$S_t = \exp\left(A(t) + B_1(t)X_t^1 + B_2(t)X_t^2\right),$$

$X_t = (X_t^1, X_t^2)$ étant la diffusion solution de :

$$dX_t = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix} dt + \sigma dW_t, X_0 = x_0,$$

où $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ est un couple de $\mathcal{F}_t$ browniens indépendants, $\alpha_1$,$\alpha_2$,$B_1$,$B_2$ et $A$ des fonctions de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ régulières et $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ une matrice $2 \times 2$. On cherche à évaluer :

$$V_0 = \mathbf{E}\left(e^{-\int_0^T X_s^1 ds} f(S_T)\right).$$

1. Montrer que $V_0$ peut s'écrire sous la forme :

   $$V_0 = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_1\int_0^T W_s^1 ds - \lambda_2\int_0^T W_s^2 ds}\phi(T, W_T^1, W_T^2)\right).$$

   On explicitera $\lambda_1$,$\lambda_2$ et $\phi$.
2. Montrer que $V_0$ peut se mettre sous la forme $V_0 = u(0,0,0)$, $u(t,x_1,x_2)$ étant solution régulière d'une équation parabolique dont on précisera la forme.

3. Calculer la loi du couple $\left(\int_0^T W_s^1 ds, W_T^1\right)$ et en déduire une méthode de simulation de ce couple de variables.

4. Proposer une méthode de Monte Carlo permettant de calculer $V_0$.

5. Décrire une méthode utilisant (le minimum) des suites à discrépance faible permettant d'évaluer $V_0$ de façon (en principe!) plus efficace que la méthode précédente. On pourra supposer que l'on sait calculer numériquement l'inverse de la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite $N^{-1}$.

6. Soit $f$ et $g$ des fonctions $C^1$. Calculez la loi du couple $\left(\int_0^T f(s)dW_s^1, \int_0^T g(s)dW_s^1\right)$ et en déduire une méthode de simulation de ce couple.

7. En déduire que si $\sigma$ est une matrice non plus constante mais dépendant du temps de façon déterministe, on peut construire une méthode de Monte Carlo permettant de calculer $V_0$, sans simuler l'ensemble de la trajectoire de $(X_s, s \geq 0)$.

8. On suppose que $\alpha$ est une fonction de $(x_1, x_2)$ régulière et bornée. Proposez une méthode de Monte Carlo permettant de calculer le prix $V_0$ dans ce cas.

### Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver que la méthode des variables antithétiques réduit bien la variance lorsque la fonction est monotone en chacune de ses variables.

1. On suppose que $f$ et $g$ sont deux fonctions croissantes bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrez que, si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles, on a :

$$\mathbf{E}\left(f(X)g(X)\right) + \mathbf{E}\left(f(Y)g(Y)\right) \geq \mathbf{E}\left(f(X)g(Y)\right) + \mathbf{E}\left(f(Y)g(X)\right).$$

2. En déduire que si $X$ si est une variable aléatoire réelle :

$$\mathbf{E}\left(f(X)g(X)\right) \geq \mathbf{E}\left(f(X)\right)\mathbf{E}\left(g(X)\right).$$

3. Montrez que, si $X_1, \ldots, X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes :

$$\mathbf{E}\left(f(X_1, \ldots, X_n)g(X_1, \ldots, X_n)|X_n\right) = \phi(X_n),$$

$\phi$ étant une fonction que l'on explicitera sous forme d'une espérance.

4. En déduire que, si $f$ et $g$ sont deux fonctions croissantes en chacun de leur arguments :

$$\mathbf{E}\left(f(X_1, \ldots, X_n)g(X_1, \ldots, X_n)\right) \geq \mathbf{E}\left(f(X_1, \ldots, X_n)\right)\mathbf{E}\left(g(X_1, \ldots, X_n)\right).$$

5. Soit $h$ une fonction de $[0,1]^n$ dans $\mathbf{R}$ monotone en chacun de ses arguments, soit $U_1, \ldots, U_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes suivant un loi uniforme sur $[0,1]$, montrez que :

$$\text{Cov}\left(h(U_1, \ldots, U_n)h(1-U_1, \ldots, 1-U_n)\right) \leq 0,$$

et en déduire que le méthode des variables antithétiques réduit la variance dans ce cas.

# Méthodes de Monte Carlo

**Mars 1996** 3 heures

## Problème I

Soit $(W_t^1, t \geq 0)$ un mouvement brownien. On suppose que le processus $(S_t, t \geq 0)$ décrit le prix d'un actif financier et que $S_t$ est la solution de :

$$dS_t = S_t \left( rdt + \sigma_t dW_t^1 \right), S_0 = x,$$

où $\sigma_t$ est une fonction continue donnée. On cherche alors à calculer par des méthodes de Monte Carlo le prix d'une option portant sur l'actif $S_t$. Cela signifie que l'on cherche à calculer :

$$\mathbf{E}\left( e^{-rT} \psi(S_s, 0 \leq s \leq T) \right),$$

$\psi$ étant une fonctionnelle que l'on précisera dans la suite.

1. Montrer que : $S_T = x \exp\left( rT - \int_0^T \sigma_t^2/2dt + \int_0^T \sigma_t dW_t^1 \right)$. En déduire que la loi de $S_T$ est la même que celle de :
$$h\left( W_T^1, \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt} \right),$$
$h$ étant une fonction que l'on explicitera.

2. On suppose maintenant que la fonction $\sigma_t$ est tirée de façon aléatoire indépendamment de $W_T^1$ et que la loi de $\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt$ est celle d'un carré d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m$ et de variance $v^2$. Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et bornée, proposer une méthode de Monte Carlo permettant de calculer sous ces hypothèses :
$$\mathbf{E}\left( e^{-rT} f(S_T) \right).$$

3. Décrire une méthode utilisant un couple de suites à discrépance faible permettant de résoudre ce même problème.

4. On suppose maintenant que $(\sigma_t, t \geq 0)$ est le processus solution de :
$$d\sigma_t = -c\left(\sigma_t - a\right) dt + \alpha dW_t^2, \sigma_0 = \sigma.$$
avec $(W_t^2, t \geq 0)$ un mouvement brownien indépendant de $(W_t^1, t \geq 0)$. Proposer un schéma de discrétisation pour le couple de processus $(S_t, \sigma_t, t \geq 0)$. Déduire de ce schéma une méthode de Monte Carlo (on ne demande pas de preuve de convergence) permettant de calculer, si $H$ est une constante positive :
$$\mathbf{E}\left( e^{-rT} f(S_T) \mathbf{1}_{\{\forall s \leq T, S_s \geq H\}} \right).$$

5. Comment peut on estimer l'erreur due à la méthode de Monte Carlo ? Peut on espérer améliorer la vitesse de convergence de cet algorithme à l'aide de suites à discrépance faible ?

6. Ecrire une équation parabolique telle que, si $u$ est fonction de $t, x, \sigma$ de classe $C^{1,2,2}$, admettant des dérivées premières en $x$ et $\sigma$ bornées alors $\mathbf{E}\left( e^{-rT} f(S_T) \right) = u(0, x, \sigma_0)$.

7. Même question si $W^1$ et $W^2$ ne sont plus indépendants mais tels que $< W^1, W^2 >_t = \rho t$, $\rho$ étant un nombre tel que $|\rho| \leq 1$.

**Problème II**

Le but de ce problème est de donner un exemple d'équation différentielle stochastique telle que la vitesse de convergence presque sûre du schéma d'Euler n'est pas plus rapide que $h^{1/2}$, si $h$ est le pas de discrétisation. Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien. On notera $(X_t, t \geq 0)$ la solution unique de :

$$dX_t = X_t dW_t, X_0 = x.$$

1. On prend comme pas de temps $h = 1/N$. Ecrire le schéma d'Euler pour l'équation précédente et en déduire une expression de $\bar{X}_1$ (approximation de $X_1$ par ce schéma) en fonction de $\Delta W_i = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, avec $t_i = i/N, i = 0 \dots N$.

2. Montrer que, pour tout $\omega$, il existe un $N_0(\omega)$ tel que, si $N \geq N_0(\omega)$, pour $i$ $i = 1 \dots N$, $|\Delta W_i| \leq 1/2$.

3. Montrer que, si $N \geq N_0$ :
$$\log(\bar{X}_1) = W_1 - \frac{1}{2} + T_1 + \frac{1}{6} T_2 + \epsilon_N,$$
avec :
$$T_1 = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i^2\right) /2 \text{ et } T_2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i^3,$$
et $\epsilon_N \leq K T_3$ si $T_3 = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i^4$.

4. Démontrer que :
$$\mathbf{E}(T_1^6) \leq \frac{C}{N^3} \text{ et } \mathbf{E}(T_2^4) \leq \frac{C}{N^4}.$$
En déduire que p.s. $\lim_{N \to +\infty} N^\alpha T_1^2 = 0$ et que p.s. $\lim_{N \to +\infty} N^\alpha T_2 = 0$, si $\alpha < 2/3$.

5. Montrer que $T_3 = C/N + U_3$, $U_3$ étant une variable aléatoire telle que :
$$\mathbf{E}(U_3^2) \leq \frac{C}{N^3}.$$
En déduire que p.s. $\lim_{N \to +\infty} N^\alpha \epsilon_N = 0$, si $\alpha < 1$.

6. Soit $(Z_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles $Z_n$ convergeant en loi vers $Z$, $Z$ étant une variable aléatoire admettant une densité. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ $n^\epsilon Z_n$ converge en probabilité vers $+\infty$, puis que $\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} n^\epsilon Z_n = +\infty\right) = 1$.

7. Montrer que $\limsup_{N \to +\infty} N^\alpha T_1 = +\infty$, si $\alpha > 1/2$. En déduire que :
$$\mathbf{P}\left(\limsup_{N \to +\infty} N^\alpha \left|\bar{X}_1 - X_1\right| = +\infty\right) = 1,$$
pour tout $\alpha > 1/2$.