Méthode de monte-carlo pour le pricing d'option
Le modèle de Black et Scholes

LAPEYRE Bernard

8 octobre 2018

http ://cermics.enpc.fr/~bl/home.html

Préliminaires

1. Ecrire une fonction `Scilab` qui calcule la moyenne empirique `Moyenne`, la variance empirique `Variance` empirique d'un tableau de nombre.

   Vérifiez qu'elles coïncident avec les fonctions prédéfinies de `Scilab` : `mean`, `variance`.

   Correction

2. Ecrire une fonction permettant de simuler un vecteur consitué de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

   Tracer l'histogramme du vecteur obtenu et verifier qu'il correspond bien à la loi gaussienne centrée réduite.

   Cette fonction existe dans `Scilab` (`x=rand(1,n,"gauss")`).

   Correction

3. On cherche à calculer par simulation $\mathbf{E}(e^{\beta G})$ où G est une gaussienne centrée réduite. On rappelle que $\mathbf{E}(e^{\beta G}) = \exp(\beta^2/2)$.

   Calculer par simulation $\mathbf{E}(e^{\beta G})$ pour $\beta = 2, 4, 6, 8, 10 \ldots$. Précisez à chaque fois une intervalle de confiance. Pour quelles valeurs de β peut on utiliser cette méthode de monte-carlo ?

   Correction

Le modèle de Black et Scholes On considère le modèle de Black et Scholes :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

On supposera dans la suite que $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

1. Tracer l'histogramme de la loi de S_T, pour $T = 1$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

   Correction

2. On cherche à calculer le prix d'un call de strike $K = 100$. Calculer ce prix par une méthode de monte-carlo avec un nombre de tirages égaux à $N = 1000$,1000,10000. On précisera l'intervalle de confiance.

   Correction

3. On va chercher à utiliser la variable aléatoire S_T comme une variable de contrôle. Vérifiez que $\mathbf{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ (pourquoi ?).

   Ecrire un programme qui utilise S_T comme variable de contrôle. Comparer la précision de cette méthode avec la précédente suivant les valeur relative de K et S_0.

   Se convaincre que l'on a ainsi ramené le calcul du call à un calcul de put.

   Correction

4. On se place dans la cas d'un call de strike K grand devant S_0. Montrer par simulation que la précision relative du calcul décroit au fur et à mesure que K/S_0 décroit. On prendra $S_0 = 100$ et $K = 100$, 150, 200, 250. Que se passe t'il pour $K = 400$?

   Correction

5. Montrer en utilisant le théorème de Girsanov que :

$$\mathbf{E}\left(f(W_T)\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}} f(W_T + \lambda T)\right).$$

   On se place dans le cas du call avec $S_0 = 100$ et $K = 150$. Proposer une valeur de λ permettant de réduire la variance de la simulation.

   Correction