# Convexité généralisée pour l'optimisation parcimonieuse

Proposition de stage

19 octobre 2022

## 1 Organisme et supervision

### Organisme

*Nom* : CERMICS, École des Ponts ParisTech

*Adresse* : 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

### Supervision

*Directeurs de stage* :
Michel DE LARA (CERMICS, michel.delara@enpc.fr, 01 64 15 36 21)
Jean-Philippe CHANCELIER (CERMICS, jpc@cermics.enpc.fr, 01 64 15 36 38)

*Nombre de stagiaires recherchés* : 1

*Indemnités de stage* : oui, gratification (27,30 euros par jour)

*Durée* : entre 44 jours et quatre mois (voire six mois), à discuter avec le candidat

*Dates* : à discuter avec le candidat

## 2 Proposition

### Domaine de recherche

Mathématiques, optimisation parcimonieuse, optimisation convexe, convexité généralisée.

### Contexte

Soit $d$ un entier non nul. La fonction de comptage, ou pseudo-norme $\ell_0$, d'expression

$$\ell_0(x) = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{1}_{\{x_i \neq 0\}} \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

compte le nombre de composantes non nulles d'un vecteur. Une telle fonction apparaît en optimisation dite parcimonieuse, où on recherche une solution avec le moins de composantes non nulles (le moins de facteurs “explicatifs”), comme dans les problèmes d'optimisation

$$\min_{\ell_0(x) \leq k} f(x) \qquad \text{ou bien} \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \big\{ f(x) + \lambda \ell_0(x) \big\}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Il est assez courant que la fonction $f$ soit convexe. En revanche, la fonction $\ell_0$ prend des valeurs entières, est discontinue et n'est pas convexe.

La conjugaison de Fenchel est un outil performant en analyse convexe. Elle associe à toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, pas forcément convexe, les fonctions $f^\star : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ et $f^{\star\star'} : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ définies par

$$f^\star(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big( \langle x \,, \, y \rangle - f(x) \big) \ , \ \ \forall y \in \mathbb{R}^d \ , \ \ f^{\star\star'}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \big( \langle x \,, \, y \rangle - f^\star(y) \big) \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Les fonctions $f$ convexes, propres et semi-continues inférieurement on la propriété que $f^{\star\star'} = f$. Or, comme la fonction $\ell_0$ est homogène de degré zéro, la conjugaison de Fenchel ne fournit pas une méthode d'analyse pertinente pour $\ell_0$.

### Sujet

Dans une série de travaux [1, 3, 2, 4], nous avons proposé une classe de conjugaisons adaptées à la pseudo-norme $\ell_0$. À partir d'une norme (source) $|||\cdot|||$ sur $\mathbb{R}^d$, nous définissons une nouvelle conjugaison, dite Capra, définie par

$$f^{¢}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big( \frac{\langle x \,, \, y \rangle}{|||x|||} - f(x) \Big) \ , \ \ \forall y \in \mathbb{R}^d \ , \ \ f^{¢¢'}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \Big( \frac{\langle x \,, \, y \rangle}{|||x|||} - f^{¢}(y) \Big) \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

avec la convention $0/0 = 0$. Nous avons montré que $\ell_0^{¢¢'} = \ell_0$ pour une classe de normes $|||\cdot|||$ (convexité généralisée). En ce cas, nous avons mis en évidence de la convexité cachée dans $\ell_0$ et des perspectives algorithmiques. En effet, la formule

$$\ell_0(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \Big( \frac{\langle x \,, \, y \rangle}{|||x|||} - \ell_0^{¢}(y) \Big) \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

permt d'obtenir une formulation dite min-max dans le problème d'optimisation $\min_{x\in\mathbb{R}^d} \big\{f(x) + \lambda \ell_0(x)\big\}$.

À partir de ce type de formules, l'élève étudiera comment reformuler, de manière exacte, des problèmes d'optimisation parcimonieuse et développera des algorithmes en conséquence [5]. Selon sa motivation, l'élève pourra également étudier des aspects plus théoriques de ces conjugaisons ou leur extension aux matrices.

## References


[1] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Hidden convexity in the $l_0$ pseudonorm. *Journal of Convex Analysis*, 28(1):203–236, 2021.

[2] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Capra-convexity, convex factorization and variational formulations for the $l_0$ pseudonorm. *Set-Valued and Variational Analysis*, 30:597–619, 2022.

[3] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Constant along primal rays conjugacies and the $l_0$ pseudonorm. *Optimization*, 71(2):355–386, 2022.

[4] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Orthant-strictly monotonic norms, generalized top-k and k-support norms and the l0 pseudonorm. *Journal of Convex Analysis (to appear)*, 2022.

[5] Christian Clason, Stanislav Mazurenko, and Tuomo Valkonen. Primal–dual proximal splitting and generalized conjugation in non-smooth non-convex optimization. *Applied Mathematics and Optimization*, 84(2):1239–1284, apr 2020.