Théorie des jeux, optimisation convexe et allocation optimale d'efforts au sein d'une famille

Proposition de stage

19 octobre 2022

1 Organisme et supervision

Organisme

Nom : CERMICS, École des Ponts ParisTech

Adresse : 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

Supervision

Directeur de stage :
Michel De Lara (CERMICS, michel.delara@enpc.fr, 01 64 15 36 21)

Nombre de stagiaires recherchés : 1

Indemnités de stage : oui, gratification (27,30 euros par jour)

Durée : entre 44 jours et quatre mois (voire six mois), à discuter avec le candidat

Dates : à discuter avec le candidat

2 Proposition

Domaine de recherche

Mathématiques, optimisation convexe, théorie des jeux, biologie évolutive.

Contexte

Les familles sont des lieux d'affection et de coopération, mais aussi de conflit. Dans le fameux article *Parent-Offspring Conflict* [3], Robert L. Trivers s'appuie sur le concept d'*inclusive fitness* (valeur sélective inclusive) de W. D. Hamilton [2] pour dériver des prédictions sur l'intensité du conflit entre parent et enfant.

Sujet

Dans [1], nous proposons un modèle mathématique de théorie des jeux qui décrit comment chaque membre $i \in \mathbb{I}$ d'une même famille alloue son budget de ressources pour maximiser sa valeur sélective inclusive. Cette dernière est constituée de la somme de la valeur sélective (*fitness*) personnelle et des valeurs sélectives des autres membres, pondérées par les coefficients de parenté.

Plus précisément, chaque individu (source) $s \in \mathbb{I}$ a un budget $\bar{x}_{s\to} > 0$ d'effort/investissement qu'elle peut allouer à tous les individus (cibles) dans $\mathbb{I}$, elle incluse. On note x_{st} l'effort/investissement de s vers t, c'est-à-dire la quantité que l'individu source s (premier indice) investit dans l'individu cible t (deuxième indice), lui inclus. Ainsi, chaque individu (source) s décide d'un vecteur d'effort/investissement

$$X_s = \{x_{st}\}_{t\in\mathbb{I}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{I}} \ , \ \ \forall s \in \mathbb{I} \ ,$$

dont les composantes sont positives ou nulles ($x_{st} \geq 0$) et qui satisfont les contraintes de budget

$$\sum_{t\in\mathbb{I}} x_{st} \leq \bar{x}_{s\to} \ , \ \ \forall s \in \mathbb{I} \ .$$

La valeur sélective inclusive W_i de l'individu $i \in \mathbb{I}$ est donnée par une expression de la forme

$$W_i\big(\{x_{st}\}_{(s,t)\in\mathbb{I}^2}\big) = \sum_{t\in\mathbb{I}} r_{it} F_t\big(\sum_{s\in\mathbb{I}} x_{st}\big) \ , \ \ \forall i \in \mathbb{I} \ ,$$

où les fonctions $F_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont les valeurs sélectives individuelles et où l'individu i partage avec l'individu cible t, lui inclus, une fraction $r_{st} \in [0,1]$ de ses intérêts génétiques (coefficient de parenté, *Wright's coefficient of relatedness*).

Une solution naturelle d'allocation optimale est un équilibre de Nash, car la fonction objectif à maximiser pour chaque individu dépend des allocations des autres individus. Si on note

$$X_{-i} = \{X_s\}_{s\in\mathbb{I}, s\neq i} \ , \ \ \forall i \in \mathbb{I} \ ,$$

un équilibre de Nash est un profil

$$X^* = \{X_i^*\}_{i\in\mathbb{I}} = \big\{\{x_{it}^*\}_{t\in\mathbb{I}}\big\}_{i\in\mathbb{I}}$$

de vecteurs d'effort/investissement admissibles (qui satisfont les contraintes de budget), tel que

$$\max_{X_i} W_i\big(X_i, X_{-i}^*\big) = W_i\big(X_i^*, X_{-i}^*\big) \ , \ \ \forall i \in \mathbb{I} \ .$$

À partir de ce modèle, l'élève étudiera la structure des équilibres de Nash. L'élève analysera la façon dont un équilibre de Nash dépend à la fois des coefficients de parenté et des dérivées des fonctions de valeur sélective individuelles. Les cas mère-enfant, père-enfant, grand-parents-parents-enfants seront particulièrement détaillés.

Références

[1] Michel De Lara. Joint allocation of efforts in inclusive fitness by related individuals. Preprint hal-03006716, arXiv : 2011.08565, November 2020.

[2] W. D. Hamilton. The genetical evolution of social behaviour. I. *Journal of Theoretical Biology*, 7(1) :1 – 16, 1964.

[3] Robert L. Trivers. Parent-Offspring Conflict. *American Zoologist*, 14(1) :249–264, 08 1974.