Convexité généralisée pour l'optimisation parcimonieuse

Proposition de thèse

11 juin 2021

1 Organisme et supervision

Organisme

Nom : CERMICS, École des Ponts ParisTech

Adresse : 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

Supervision

Directeurs de thèse :
Michel De Lara (CERMICS, michel.delara@enpc.fr, 01 64 15 36 21)
Jean-Philippe Chancelier (CERMICS, jpc@cermics.enpc.fr, 01 64 15 36 38)

2 Proposition

Domaine de recherche

Mathématiques, optimisation parcimonieuse, optimisation convexe, convexité généralisée.

Contexte

Le support d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des indices pour lesquels la composante correspondante est non nulle. Les fonctions du support sont courantes en optimisation parcimonieuse ; l'exemple emblématique est la fonction dite de comptage (ou pseudo-norme l_0), qui compte le nombre de composantes non nulles d'un vecteur. Les fonctions du support d'un vecteur ont la propriété d'être homogène de degré zéro. Pour cette raison, la conjugaison de Fenchel ne fournit pas une méthode d'analyse pertinente.

Sujet

Dans une série de travaux [3, 4, 6, 5], nous avons proposé une classe de conjugaisons qui sont adaptées aux fonctions du support. À partir d'une norme (source) sur $\mathbb{R}^d$, nous définissons, d'une part, une famille de normes "K-coordonnées locales" (avec $K \subset \{1, \ldots, d\}$) et, d'autre part, un couplage entre $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d$, appelé Capra (*constant along primal rays*). Avec un tel couplage, nous pouvons mettre en œuvre les méthodes de la convexité généralisée. C'est ainsi que nous fournissons des formules pour les Capra-conjuguées, les Capra-biconjuguées et pour les Capra-sous-différentiels des fonctions du support en termes des normes "K-coordonnées locales".

À partir de ces formules, le doctorant étudiera comment développer des algorithmes pour l'optimisation parcimonieuse. Par exemple, il/elle examinera l'algorithme classique de descente de gradient en optimisation convexe et analysera comment il pourrait inspirer un algorithme où le produit scalaire (couplage de Fenchel) sera remplacé par le couplage Capra. La même approche sera entreprise pour adapter la divergence de Bregman et l'algorithme de *mirror descent* au couplage Capra [7].

Par ailleurs, grâce au couplage Capra, nous avons obtenu les meilleures sous-approximations convexes de la pseudo-norme l_0 sur des boules unité [2]. Le doctorant étudiera comment approcher (par en dessous) ces sous-approximations convexes par des fonctions polyhédrales et comment utiliser les fonctions obtenues dans des algorithmes pour l'optimisation parcimonieuse.

Enfin, nous avons étendu le couplage Capra aux matrices et obtenu de premiers résultats sur des formulations variationnelles pour le rang [1]. Le doctorant reprendra tous les développements sur la pseudo-norme l_0 et étudiera comment les étendre pour le rang.

Références

[1] Paul Barbier, Jean-Philippe Chancelier, Michel De Lara, and Valentin Paravy. Rank-based norms, capra-conjugacies and the rank function. Preprint hal-03240885, arXiv 2105.14982, June 2021.

[2] Thomas Bittar, Jean-Philippe Chancelier, and Michel De Lara. Best convex lower approximations of the l0 pseudonorm on unit balls. Preprint hal-03240878, arXiv 2105.14983, June 2021.

[3] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Constant along primal rays conjugacies and generalized convexity for functions of the support, 2020. Preprint hal-03194348, arXiv :2010.13323.

[4] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Constant along primal rays conjugacies and the l_0 pseudonorm. *Optimization*, 0(0) :1–32, 2020.

[5] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Variational formulations for the l_0 pseudonorm and applications to sparse optimization. Preprint hal-02459688, arXiv :2002.01314, 2020.

[6] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Hidden convexity in the l_0 pseudonorm. *Journal of Convex Analysis*, 28(1) :203–236, 2021.

[7] David H. Gutman and Javier F. Peña. A unified framework for Bregman proximal methods : subgradient, gradient, and accelerated gradient schemes, 2019. arXiv :1812.10198.