Optimisation stochastique (OS)
2022–2023
Master Parisien de Recherche Opérationnelle (MPRO)

Michel De Lara (cermics-enpc)

18 octobre 2022

Présentation. Dans un problème d'optimisation déterministe, les valeurs de tous les paramètres sont supposées connues. Comment formuler un problème d'optimisation dans lequel les données sont incertaines (par exemple, les prix des énergies) ? Et quand certaines valeurs des données sont révélées au cours des étapes de décision (par exemple, les demandes en énergie) ? L'optimisation stochastique est un cadre pour répondre à de telles questions et pour formuler des problèmes sous incertitude. C'est également un ensemble de méthodes de résolution.

Dans ce cours, nous présentons

— l'*optimisation stochastique* statique (à une étape),

— la *programmation stochastique* à deux étapes (et la résolution sur arbre de scénarios ou par scénarios),

— le *contrôle stochastique* à temps discret (et la résolution par *programmation dynamique stochastique*).

Des travaux pratiques informatiques *optionnels* et des exercices complètent le cours.

Pré-requis.

— Optimisation continue élémentaire : programmation linéaire, convexité, conditions d'optimalité du premier ordre. [Ber96]

— Calcul des probabilités : espace de probabilité, probabilité, variable aléatoire (v.a.), loi d'une v.a., fonction indicatrice, espérance mathématique, indépendance, loi forte des grands nombres, théorème central limite. [Fel68]

Apprentissage. À l'issue du cours, l'étudiant devrait pouvoir concevoir des modèles mathématiques pour l'optimisation sous incertitude et des algorithmes pour les résoudre numériquement.

Langue. Les diapositives de cours (et les travaux pratiques informatiques optionnels) sont en anglais. Le cours oral est assuré en français.

Validation. Examens.

Enseignant responsable. Michel De Lara (cermics-enpc)

Enseignants. Michel De Lara (cermics-enpc)

Liens.

```
page web du cours  http://cermics.enpc.fr/~delara/TEACHING/Master_MPRO/
page web du master MPRO  http://uma.ensta-paristech.fr/mpro/
```

Programme

1 / Lundi 19 septembre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 17.1.12

Nous étudions la *programmation stochastique* à une étape au travers d'exemples.

Idée-clef : le résultat d'un problème d'optimisation stochastique est la distribution des valeurs aléatoires prises par le critère ; c'est au décideur de choisir entre plusieurs distributions selon son type d'aversion au risque.

Exercice (1h00)

Nous commençons par un exercice de modélisation de tests sanguins groupés. Nous formulerons un problème d'optimisation *stochastique* de minimisation du nombre *moyen* de tests en fonction de la taille des groupes. Nous comparerons la taille optimale obtenue à celle correspondant au problème d'optimisation *robuste* de minimisation du *pire* nombre de tests. Nous comparerons les distributions du nombre de tests selon la taille des groupes.

Cours (1h00)

Nous ferons des rappels de calcul des probabilités : espace de probabilité, probabilité, variable aléatoire (v.a.), loi d'une v.a., fonction indicatrice, espérance mathématique, indépendance, loi forte des grands nombres.

Exercice (1h00)

Nous poursuivons en étudiant le problème dit du vendeur de journaux. Le vendeur doit décider le matin du nombre (déterministe) de journaux qu'il va commander, alors que la demande est aléatoire (de distribution supposée connue). Nous montrons comment le nombre optimal de journaux dépend de la distribution de probabilité de la demande.

Lecture suggérée : [SDR09, Chap. 1]

Travail pratique informatique (optionnel)

Le vendeur de journaux

2 / Lundi 26 septembre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 17.1.12

Nous avançons de la programmation stochastique à une étape vers deux étapes.

Idée-clef : quand une première décision est prise avant la réalisation d'un aléa et une seconde décision est prise après la réalisation d'un aléa, la façon mathématique de représenter cela est par le biais d'une *contrainte de non-anticipativité* ; formuler un problème d'optimisation stochastique sur un arbre de scénarios est une façon de coder directement une contrainte de non-anticipativité.

Exercice (0h45)

Nous étendons le problème du vendeur de journaux en un problème d'inventaire à une étape. Une compagnie doit commander un produit (en quantité continue) pour satisfaire une demande aléatoire. Elle supporte des coûts d'achat, de *backorder* et de *holding*. Dans le cas où la distribution de probabilité de la demande est continue, nous caractérisons la quantité optimale à commander.

Cours (0h45)

Nous montrons comment un programme linéaire déterministe peut être transformé en un problème stochastique avec un nombre fini de scénarios, en introduisant des variables de recours.

Rappels et exercices (0h30)

Rappels et exercices sur l'optimisation continue [Ber96].

- Rappels sur la convexité : ensembles convexes, fonctions convexes, opérations préservant convexité.
- Variations : convexité stricte et forte.
- Marginale d'une fonction conjointement convexe en deux variables.
- Présentation de la dualité en optimisation linéaire dans le cadre perturbatif.

Cours (1h00)

Nous présentons la *L-shaped method*, méthode de résolution d'un problème *linéaire* stochastique à deux étapes.

Lectures suggérées : § 2.1, 2.2 et 2.3 de [SDR09, Chap. 2]

3 / Lundi 3 octobre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 17.1.12

Nous développons la programmation stochastique à deux étapes.

Idée-clef : dans le cas d'un espace de probabilité fini, la programmation stochastique à deux étapes se prête naturellement à des méthodes de décomposition parallèle par scénarios.

Cours (1h15)

Nous présentons la *programmation stochastique à deux étapes*, avec variables de recours. Nous encadrons la valeur d'un problème stochastique par celles obtenues par un décideur myope (contraintes d'information durcies) et par un décideur clairvoyant (contraintes d'information relachées).

Nous poursuivons la programmation stochastique à deux étapes et montrons comment la contrainte de non-anticipativité peut être prise en compte

— en indiçant les solutions par un arbre de scénarios,

— ou en indiçant les solutions par un peigne, puis en écrivant des égalités entre composantes de la solution.

Avec cette deuxième façon de faire, nous introduisons la *décomposition par scénarios*, puis le *Progressive Hedging* [RW91].

Examen (1h30)

Cet examen porte sur la programmation stochastique à une étape et à deux étapes : formulation de problèmes, résolution (calcul de la solution de première étape), conditions d'utilisation des algorithmes *L-shaped* et décomposition par scénarios (*Progressive Hedging*).

Les documents sont autorisés.

Travail pratique informatique (optionnel)

Dimensionnement de réserves pour l'équilibrage sur un marché électrique.

Exercices (optionnel)

4 / Lundi 10 octobre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 17.1.12

Correction de l'examen (0h45)

Cours (0h45)

Nous soulevons les difficultés du passage de la programmation stochastique à deux étapes vers plusieurs étapes.

Rappels sur les tribus. Rappels de théorie de la mesure — tribu, mesurabilité, théorème de Doob — pour aborder les *contraintes d'information* et, particulièrement, la *contrainte de non-anticipativité*.

Bornes supérieure (boucle ouverte) et inférieure (anticipative) d'un problème de minimisation stochastique (à deux étapes). Nous encadrons la valeur d'un problème stochastique par celles obtenues par un décideur myope (contraintes d'information durcies) et par un décideur clairvoyant (contraintes d'information relachées).

Limite numérique à l'optimisation multi-étapes sur un arbre de scénarios.

Cours (1h30)

Nous présentons la programmation dynamique stochastique.

Idée-clef : un état contient les quantités suffisantes pour prendre une décision optimale à une étape donnée ; la programmation dynamique est une méthode de décomposition séquentielle par étapes.

Contrôle optimal stochastique de systèmes dynamiques avec incertitudes.
Programmation dynamique stochastique.
Équation de la programmation dynamique. Politique de Bellman.
Malédiction de la dimension.

Lecture suggérée : [Ber00, Chap. 1]

5 / Lundi 17 octobre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 21.2.44

Exercice (0h45)

Problème du sac à dos.

Exercice (0h45)

Croissance et reproduction optimales d'une plante.

Cours (0h45)

Contrôle optimal stochastique avec coûts quadratiques et dynamique linéaire, sans contraintes sur la commande.

Exercice (0h45)

Contrôle optimal stochastique avec coûts quadratiques et dynamique linéaire, sans contraintes sur la commande.

Travail pratique informatique (optionnel)

Programmation de l'algorithme de programmation dynamique.

6 / Lundi 24 octobre 2022, 14h00–17h30 (Michel De Lara), CNAM av. St Martin, salle 21.2.44

Cours (1h30)

Récapitulatif optimisation stochastique multi-étapes.
Programmation stochastique : cas d'un espace de probabilité fini ; solutions indicées par un arbre de scénarios ; explosion combinatoire de l'arbre de scénarios avec le nombre de pas de temps ; algorithmes de décomposition par scenarios (*L-shaped*, *progressive hedging*).
Commande optimale stochastique : résolution par programmation dynamique stochastique sous hypothèse de bruits blancs ; solutions en *feedback* sur l'état ; malédiction de la dimension (explosion du nombre de valeurs de la fonction de Bellman à stocker, avec la dimension de l'état).

Nous montrons comment la malédiction de la dimension peut être (en partie) levée sous des hypothèses de coûts convexes et dynamique linéaire, avec contraintes convexes. Les fonctions de Bellman peuvent être approchées par dessous par des suprema de fonctions affines données par l'algorithme *Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP)*.

Idée-clef : la combinaison de méthodes d'analyse convexe et de la programmation dynamique permet de développer un algorithme pouvant traiter des cas avec plusieurs pas de temps et plusieurs dimensions d'état.

Gestion de stocks.

Contrôle optimal stochastique avec coûts convexes et dynamique linéaire, avec contraintes convexes.

Examen (1h30)

7 / Vendredi 28 janvier 2023, 9h00–12h00 (Michel De Lara),

Rattrapage

Annales

Références

[Ber96] D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods.* Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996.

[Ber00] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control.* Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, second edition, 2000. Volumes 1 and 2.

[Fel68] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 1. Wiley, New York, third edition, 1968.

[RW91] R.T. Rockafellar and R. J-B. Wets. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of operations research*, 16(1) :119–147, 1991.

[SDR09] A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczynski. *Lectures on stochastic programming : modeling and theory.* The society for industrial and applied mathematics and the mathematical programming society, Philadelphia, USA, 2009.