Promenade aléatoire
Séance I, Vendredi 9 novembre 2007

Exercice 1 (Rappels). 1. Rappeler la définition de la convergence en loi, de la convergence en probabilité, de la convergence L^p et de la convergence presque-sûre.

2. Montrer que la convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité, et que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.
3. Montrer que si $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers X et si $(Y_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une constante a, alors la suite $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ converge en loi vers (X, a).

△

Exercice 2 (Convergence du maximum).
Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}[X]$.

On suppose que X est intégrable. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires de même loi que X.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $Y_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{m}\}}$ est p.s. finie.
3. En déduire que $\dfrac{X_n}{n}$ tend p.s. vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que $\dfrac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ tend p.s. vers 0 quand n tend vers l'infini.
5. On suppose que X est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et non plus dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ tend p.s. vers 0 quand n tend vers l'infini.

△

Exercice 3 (Somme de variables indépendantes de loi de Cauchy).
On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, alors $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] = \mathrm{e}^{-a|u|}$.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Étudier les convergences en loi et en probabilité des suites :

1. $\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, n \geq 1\right)$.
2. $\left(\dfrac{S_n}{n^2}, n \geq 1\right)$.
3. $\left(\dfrac{S_n}{n}, n \geq 1\right)$. On pourra dans un premier temps déterminer la loi de $\dfrac{S_{2n}}{2n} - \dfrac{S_n}{n}$, et puis en déduire que la suite $\left(\dfrac{S_{2n}}{2n} - \dfrac{S_n}{n}, n \geq 1\right)$ ne converge pas en probabilité vers 0. On montrera alors que l'on ne peut avoir la convergence en probabilité de la suite $\left(\frac{S_n}{n}, n \geq 1\right)$.

△

Exercice 4 (Limite d'intégrale).
Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\, dx_1\cdots dx_n,$$
où f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

△

Exercice 5 (Loi de Poisson).
Soit $(X_n, n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$.
2. Déterminer la loi de S_n, puis montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}) = \dfrac{1}{2}$.

△

Exercice 6 (Le paradoxe de Saint-Petersbourg).
Le paradoxe de Saint-Petersbourg est d'abord un problème imaginé par Nicolas Bernoulli, qui obtint une solution partielle donnée par Daniel Bernoulli (1738) dans les Commentaires de l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg (d'où son nom). Aujourd'hui encore, ce problème attire l'attention de certaines personnes en mathématiques et en économie[1].

Un casino propose le jeu suivant qui consiste à lancer plusieurs fois de suite une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. Le joueur gagne 2^k francs si le premier pile a lieu au k-ième jet. La question est de savoir quel doit être le prix à payer pour participer à ce jeu.

Soit X_n le gain réalisé lors du n-ième jeu et $S_n = X_1+\cdots+X_n$ le gain obtenu lors de n jeux successifs.

1. Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres pour donner un prix équitable ?

Les fonctions d'utilité qui quantifient l'aversion au risque permettent de proposer des prix pour ce jeu. La suite de l'exercice est consacré à l'étude de la convergence de la suite $(S_n, n\geq 1)$ convenablement renormalisée[2]

2. On pose $S'_n = \sum_{k=1}^n X_k^n$, où pour $k\in\{1,\ldots,n\}$,
$$X_k^n = X_k \mathbb{1}_{\{X_k \leq n\log_2 n\}},$$
où $\log_2 n$ est le logarithme en base 2, i.e. $2^{\log_2 n} = n$. Après avoir vérifié que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S'_n}{n\log_2 n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S'_n - \mathbb{E}[S'_n]}{n\log_2 n}\right| > \varepsilon/2\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbb{E}[S'_n]}{n\log_2 n} - 1\right| > \varepsilon/2\right),$$
montrer que la suite $(\dfrac{S'_n}{n\log_2 n}, n\geq 1)$ converge en probabilité vers 1.
3. Calculer $\mathbb{P}(S_n \neq S'_n)$, et en déduire sa limite quand $n\to\infty$.
4. En déduire que la suite $(\dfrac{S_n}{n\log_2 n}, n\geq 1)$ converge en probabilité vers 1.

[1]Voir par exemple l'article suivant et les références citées : G. Székely and D. Richards, The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000, *Amer. Statist.* **58**, 225–231 (2004).
[2]Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. 1. Third ed. (1968). Wiley & Sons.

$\triangle$

Exercice 7 (Processus auto-régressif).
On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$, alors $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] = \mathrm{e}^{ium-\sigma^2 u^2/2}$.

Soit $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Soit Y_0 une variable aléatoire indépendante de $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ et de loi $\mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2)$, avec $m_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_0 \geq 0$. On définit par récurrence pour $n \geq 1$ $Y_n = aY_{n-1} + \varepsilon_n$.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. À quelle condition sur a la suite $(Y_n, n \geq 0)$ converge-t-elle. De quelle convergence s'agit-il ? Quand la convergence est assurée quelle est la limite ? Quelle est la loi de Y_n si Y_0 a pour loi la loi limite ?

$\triangle$

Exercice 8 (Théorème de Weirstrasse).
Théorème de Weierstrass (1885) : "Toute fonction continue sur un intervalle borné est limite uniforme d'une suite de polynômes".

Cet exercice s'inspire de la démonstration de Bernstein du théorème de Weierstrass. Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$. On considère la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ (de loi binomiale de paramètre (n, x)). Soit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $\Delta_n = \{\left|\bar{X}_n - x\right| > \delta\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\Delta_n) \leq \delta^{-2}\mathbb{E}[(\bar{X}_n - x)^2]$. Majorer $\mathbb{P}(\Delta_n)$ indépendanment de $x \in [0, 1]$.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|h(x) - \mathbb{E}[h(\bar{X}_n)]\right|$, en écrivant
$$\left|h(x) - h(\bar{X}_n)\right| = \left|h(x) - h(\bar{X}_n)\right| \mathbf{1}_{\Delta_n} + \left|h(x) - h(\bar{X}_n)\right| \mathbf{1}_{\Delta_n^c}.$$
3. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k h(k/n) x^k (1-x)^{n-k} \right| = 0.$$
4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer, en s'inspirant des questions précédentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} f(k/n) \right| = 0.$$
Si l'on suppose f uniformément continue, la convergence ci-dessus est-elle uniforme en x ? (Prendre par exemple $f(x) = \cos(x)$ pour $x_n = \pi n$.)

$\triangle$

Exercice 9 (Nombres absolument normaux).
L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant du à Borel (1909) : "Tout nombre réel choisi au hasard et uniformément dans $[0, 1]$ est presque sûrement absolument normal".

Soit $x \in [0, 1]$, et considérons son écriture en base $b \geq 2$:
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n},$$

avec $x_n \in \{0, \ldots, b-1\}$. Cette écriture n'est pas unique seulement pour les fractions rationnelles de la forme $x = a/b^n$ et $a \in \{1, \ldots, b^n - 1\}$. En effet, dans ce cas deux représentations sont possibles : l'une telle que $x_k = 0$ pour $k \geq n+1$ et l'autre telle que $x_k = b-1$ pour $k \geq n+1$. On dit que x est simplement normal en base b si et seulement si pour tout $i \in \{0, \ldots, b-1\}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \text{Card } \{1 \leq k \leq n; x_k = i\}$ existe et vaut $1/b$. Cela revient à dire que les fréquences d'apparition de i dans le développement de x en base b sont uniformes.

On dit que x est normal en base b si et seulement si il est simplement normal en base b^r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Remarquons qu'un nombre est normal en base b si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la fréquence d'apparition d'une séquence donnée de longueur r, dans le développement de x est uniforme (et vaut donc $1/b^r$) i.e. pour tout $i \in \{0, \ldots, b-1\}^r$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \text{Card } \{0 \leq k \leq n; (x_{rk+1}, \ldots, x_{r(k+1)}) = i\} = \frac{1}{b^r} .$$

Les fractions rationnelles ne sont pas normales, quelle que soit leur représentation et quel que soit la base. Le nombre de Champernowne[3] dont la partie décimale est la suite consécutive des entiers (0,12345678910111213...) est normal en base 10.

On dit que x est absolument normal si et seulement si il est normal en toute base $b \geq 2$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de X_n, le n-ième chiffre du développement de X en base b ?
2. Montrer que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. En déduire que les variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ sont indépendantes.
3. En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que X est p.s. simplement normal en base b.
4. Montrer que X est p.s. normal en base b, puis qu'il est p.s. absolument normal.

Bien que presque tous les réels soient absolument normaux, il est très difficile de montrer qu'un réel donné est absolument normal. On ne sait toujours pas si des nombres tels que π, e, $\sqrt{2}$ ou $\ln 2$ sont absolument normaux, ni même normaux en base 10 (cf. *Pour la Science*, janvier 1999).

△

Exercice 10.
Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles continues, indépendantes et de même loi. On suppose que la densité, f, de leur loi est bornée, symétrique, continue en 0 et telle que $f(0) > 0$.

1. Montrer que la suite de variable aléatoire $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$ converge en loi vers une variable aléatoire de Cauchy dont on déterminera la paramètre en fonction de $f(0)$. On rappelle que
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(u)}{u^2}\, du = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin(u)}{u}\, du = \frac{\pi}{2}.$$
2. En déduire que la moyenne harmonique empirique $\tilde{X}_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ converge en loi vers une loi de Cauchy.

△

[3]D. G. Champernowne, The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London MAth. Soc.* (1933), **8** pp. 254-260

Promenade aléatoire
Séance II, Vendredi 16 novembre 2007

Exercice 1 (Manipulation sur les chaînes de Markov).
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur un espace d'état dénombrable, E, et de matrice de transition P.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = y|X_0 = x)$. Montrer que $Z = (Z_n = X_{2n}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov. Préciser sa matrice de transition. Vérifier que toute probabilité invariante pour X est une probabilité invariante pour Z. En considérant un espace d'état à deux éléments, donner un contre-exemple pour la réciproque.
2. On pose $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que $Y = (Y_n, n \geq 1)$ est une chaîne de Markov sur E^2. Donner sa matrice de transition, Q. Donner un exemple où Q n'est pas irréductible alors que P est irréductible. Changer l'espace d'état de Y pour que Y soit irréductible si X est irréductible. On suppose que X possède une probabilité invariante, π. En déduire une probabilité invariante pour Y.

△

Exercice 2 (Chaîne trace).
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur un espace d'état dénombrable, E, et de matrice de transition P. On utilise la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. On pose $\tau_1 = \inf\{k \geq 1; X_k \neq X_0\}$. Soit $x \in E$. Calculer la loi de τ_1 conditionnellement à $X_0 = x$. Vérifier que, conditionnellement à $X_0 = x$, soit $\tau_1 = +\infty$ p.s. (on dit que x est un point absorbant), soit p.s. τ_1 est fini.
2. Conditionnellement à $X_0 = x$, si x n'est pas un point absorbant, calculer la loi de X_{τ_1}.
3. On pose $S_0 = 0$, $Y_0 = X_0$ et on définit par récurrence sur $n \geq 1$: $S_n = S_{n-1} + \tau_n$, et si $S_n < \infty$: $Y_n = X_{S_n}$ et
$$\tau_{n+1} = \inf\{k \geq 1; X_{k+S_n} \neq X_{S_n}\}.$$
Soit $R = \inf\{k; \tau_k = +\infty\}$. Montrer que si X ne possède pas de points absorbants, alors p.s. $R = +\infty$.
4. On suppose que X ne possède pas de points absorbants. Montrer que $Y = (Y_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov (appelée chaîne trace associée à X) et donner sa matrice de transition. On suppose que π est une probabilité invariante pour X. On pose $\nu(x) = \dfrac{\pi(x)(1 - P(x,x))}{\sum_{y \in E} \pi(y)(1 - P(y,y))}$ pour $x \in E$. Vérifier que $\nu = (\nu(x), x \in E)$ est une probabilité invariante pour Y.

△

Exercice 3 (Retournement du temps).
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur un espace d'état dénombrable E, de matrice de transition P. Pour $n \geq m \geq 0$, on note $x_m^n = (x_m, \ldots, x_n) \in E^{n-m+1}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x, X_2 = z)$.
2. Montrer plus généralement, pour $n \geq 1$, $k \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = y|X_0^{n-1} = x_0^{n-1}, X_{n+1}^{n+k} = z_1^k) = \mathbb{P}(X_n = y|X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = z_1)$ (propriété de champ markovien).
3. Soit π une probabilité invariante pour X. On suppose que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$ et que X_0 est distribué suivant π. Calculer $\mathbb{P}(X_n = y|X_{n+1}^{n+k} = z_1^k)$. Montrer que pour tout n,

$(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ a même loi que $(Y_0, \dots, Y_n)$, où $Y = (Y_k; k \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition et la loi de Y_0.

4. Si P est réversible par rapport à π, comparer la loi de Y et la loi de X.

$\triangle$

Exercice 4 (Modèle de Wright-Fisher)**.**
On considère une population asexuée de taille constante N. On suppose que la reproduction est aléatoire. Plus précisément, si on note $a_i^{k+1} \in \{1, \dots, N\}$ le parent de l'individu i de la génération $k+1$, vivant à la génération k, alors les variables aléatoires $(a_i^{k+1}, i \in \{1, \dots, N\}, k \in \mathbb{N})$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. Tout se passe comme si chaque individu choisissait de manière indépendante son parent dans la génération précédente. Le modèle de Wright-Fisher concerne l'étude de l'évolution de la répartition de deux allèles, A et a, au sein d'une population.

On note $\nu_i^k = \text{Card}\,\{r \in \{1, \dots, N\}; a_r^{k+1} = i\}$ le nombre d'enfants de l'individu $i \in \{1, \dots, N\}$ de la génération k. Les variables aléatoires $(\nu^k, k \geq 0)$ sont indépendantes et de même loi.

1. Calculer (et reconnaître) la loi de $\nu^k = (\nu_i^k, i \in \{1, \dots, N\})$. Les variables aléatoires $(\nu_i^k, i \in \{1, \dots, N\})$ sont-elles indépendantes ? Donner la loi de ν_i^k.
2. Pour $k \geq 0$, on note X_k le nombre d'allèles A présents à la génération k dans la population. Montrer que $X = (X_n; n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur $\{0, \dots, N\}$. Donner sa matrice de transition. Trouver les états absorbants. Quelles sont les probabilités invariantes ?
3. On note τ le premier instant de disparition de la diversité : $\tau = \inf\{k \geq 0, X_k \in \{0, N\}\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer, en décomposant suivant les valeurs possibles de X_{k-1}, qu'il existe $c > 0$ tel que, pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, on a $\mathbb{P}(\tau > k | X_0 = i) \leq c\mathbb{P}(\tau > k-1 | X_0 = i)$. En déduire que p.s. τ est fini.
4. Montrer, en décomposant suivant les valeurs de X_{n-1} que pour $n \geq 1$, $i \in \{0, \dots, N\}$, on a $\mathbb{E}[X_n | X_0 = i] = \mathbb{E}[X_{n-1} | X_0 = i]$. En déduire que $\mathbb{P}(X_\tau = N | X_0 = i_0) = i_0/N$.

$\triangle$

Promenade aléatoire
Séance III, Vendredi 23 novembre 2007

Exercice 1 (Chaîne de Markov à deux états).
On considère l'espace à deux états $E = \{a, b\}$. La matrice stochastique la plus générale s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

1. Condition pour que la chaîne de Markov soit de période 2.
2. Condition pour que la chaîne de Markov soit irréductible.
3. On suppose que la chaîne est irréductible. Calculer la probabilité invariante, π.
4. On suppose que la chaîne de Markov associée à P est irréductible. Montrer que les puissances de P s'écrivent
$$P^n = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix} + \gamma^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -1+p & 1-p \end{pmatrix}.$$
où l'on déterminera p et γ.
5. On suppose que la chaîne de Markov est apériodique et irréductible. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \nu_0 P^n$ est indépendant de la loi initiale ν_0.

△

Exercice 2 (Récurrence et transience pour la marche aléatoire).
Soit $d \geq 1$. On considère $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $B = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \{-1, 0, 1\}^d; \sum_{i=1}^d |x_i| = 1\}$: $\mathbb{P}(X_n = x) = 2^{-d}$, pour tout $x \in B$. La marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}^d$, $S = (S_n, n \geq 0)$ est définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Rappeler le critère pour qu'une chaîne de Markov irréductible soit récurrente.
2. Vérifier que S est une chaîne de Markov irréductible.
3. Soit $d = 1$. Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$ pour n grand), montrer que $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$, i.e. 0 est récurrent pour S. En déduire que S est récurrente. La chaîne S est-elle récurrente positive ?
4. Soit $d = 2$. Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. Montrer que 0 est récurrent pour la chaîne de Markov S. (On pourra utiliser que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ pour calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}$.) En déduire que S est récurrente.
5. Soit $d = 3$. Montrer que 0 est transient. On utilisera que pour $n \geq 3$:
$$\sum_{i+j+k=n} \left(\frac{n!}{i!j!k!}\right)^2 \leq \left(\sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!}\right) \max_{i+j+k=n} \left(\frac{n!}{i!j!k!}\right) \leq 3^n \frac{n!}{q!(q+\alpha)!(q+\beta)!},$$
où $q, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ avec $n = 3q + \alpha + \beta$ et $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.
6. En déduire que la marche aléatoire symétrique simple est transiente[4] si et seulement si $d \geq 3$.

[4]Plus généralement, il existe un critère du à Chung et Fuchs (cf Feller tome II p.614) sur la fonction génératrice qui détermine si la marche aléatoire est récurrente ou transiente.

$\triangle$

Exercice 3 (Salle d'attente).
On désire étudier l'évolution du nombre de personnes dans une salle d'attente. On suppose que si k personnes sont dans la salle d'attente avec $k \geq 1$, alors le prochain changement du nombre de personnes dans la salle d'attente correspond à une arrivée avec probabilité $p \in (0,1)$ et à un départ avec probabilité $1-p$. Si $k = 0$, le prochain changement correspond à une arrivée.

On note X_n le nombre de personnes dans la file d'attente au n-ième changement.

1. Pourquoi le processus $X = (X_n, n \geq 0)$ est-il une chaîne de Markov ? Donner alors sa matrice de transition. La chaîne est-elle irréductible ?
2. Pour quelles valeurs de p a-t-on une probabilité invariante ? La calculer quand elle existe. (On pourra montrer que si π est une probabilité invariante, alors $\pi(n) = \alpha^{n-1}\pi(1)$ pour $n \geq 1$ et $\alpha = p/(1-p)$.)
3. On suppose que la probabilité invariante, π, existe. La chaîne de Markov est-elle réversible par rapport à π ? Calculer le nombre moyen de personnes dans la salle d'attente en régime stationnaire.

Soit $(Z_n, n \geq 0)$ une suite de variable aléatoire indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telles que $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_n = -1)$. Soit $x \in \mathbb{N}$. On pose $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$, $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} Z_k$. On suppose que $X_0 = x$.

4. Vérifier que X a même loi que $Y = (Y_n, n \geq 0)$ où $Y_0 = x$ et, pour $n \geq 1$, $Y_n = Y_{n-1} + Z_n \mathbf{1}_{\{Y_{n-1}>0\}} + \mathbf{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}$. Montrer que si $p > 1/2$ alors p.s. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. En déduire que p.s. $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$. En déduire que la chaîne est transiente.
5. On suppose $p = 1/2$. Montrer que X a même loi que $(|S_n|, n \geq 0)$. Montrer que la chaîne est récurrente : p.s. le cardinal de $\{n \geq 0; X_n = 0\}$ est infini. En déduire que la chaîne est récurrente nulle.

$\triangle$

Exercice 4 (Temps d'atteinte et ruine du joueur).
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov sur un espace fini E de matrice de transition P.

1. Soit $A \subset E$. On note $\tau = \inf\{k \geq 0; X_k \in A\}$ le temps d'atteinte de A. On pose $u(x) = \mathbb{E}[\tau | X_0 = x]$ pour $x \in E$. Montrer que pour $x \notin A$, $u(x) = 1 + \sum_{y \in E} u(y) P(x,y)$.

Vous jouez à un jeu de pile ou face : à chaque lancer dont le résultat est pile, votre adversaire vous donne 1 Euro, et à chaque lancer dont le résultat est face, vous donnez un 1 Euro à votre adversaire. On suppose que la probabilité d'avoir pile est $p \in (0,1)$. Le jeu s'arrête dès qu'un jour est ruiné. On note x_0 votre richesse initiale, y_0 celle de votre adversaire et X_n votre richesse après le n-ième lancer.

2. Montrer que $X = (X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition.
3. Calculer le temps moyen de la fin du jeu pour $p \neq 1/2$ puis pour $p = 1/2$. (Pour $p \neq 1/2$, on pourra poser, pour $1 \leq x \leq x_0 + y_0 - 1$, $a(x) = u(x) - u(x-1) - (1-2p)^{-1}$ avec $A = \{0, x_0 + y_0\}$.)
4. Soit $\tau_r = \inf\{k \geq 0; X_k = r\}$. On note $\varphi(x) = \mathbb{P}(\tau_0 < \tau_{x_0+y_0} | X_0 = x)$ la probabilité que vous soyez ruiné alors que vous possédez x Euro (et votre adversaire $x_0 + y_0 - x$). Écrire $\varphi(x)$ en fonction de $\varphi(x+1)$ et $\varphi(x-1)$. En déduire $\varphi(x_0)$.

$\triangle$

Promenade aléatoire
Séance IV, Vendredi 30 novembre 2007

Exercice 1 (Loi uniforme sur les permutations).
Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations sur $\{1, \ldots, n\}$, $n \geq 2$. On considère le mécanisme de transition suivant : si l'on dispose d'une permutation $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in \mathcal{S}_n$, on choisit deux éléments au hasard, par exemple i et j et on les permute pour obtenir la permutation σ' telle que $\sigma'(k) = \sigma(k)$ si $k \notin \{i, j\}$, $\sigma'(i) = \sigma(j)$ et $\sigma'(j) = \sigma(i)$.

1. La chaîne de Markov, dont le mécanisme est décrit ci-dessus, est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ? Vérifier que sa matrice de transition, P, est symétrique. En déduire une probabilité invariante pour laquelle P est réversible. Est-ce la seule probabilité invariante ? Donner une méthode pour évaluer $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f(\sigma)$.
2. On impose de choisir des éléments distincts ($i \neq j$) pour chaque transition. Vérifier que la chaîne de Markov est périodique. La méthode de la question précédente, utilisant cette nouvelle chaîne de Markov, permet-elle d'évaluer $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f(\sigma)$?

△

Exercice 2 ("Waste recycling Monte Carlo").
L'algorithme "Waste recycling Monte Carlo" (WR) est une variante de l'algorithme de Metropolis Hasting qui tient compte de toutes les propositions (et pas seulement des propositions acceptées comme dans Metropolis-Hastings). Soit
- E un espace au plus dénombrable,
- π une probabilité sur E telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$,
- Q une matrice de transition irréductible telle que si $Q(x, y) = 0$ alors $Q(y, x) = 0$,
- ρ une fonction définie sur $E \times E$ à valeurs dans $(0, 1]$ telle que pour tout $x, y \in E$,

$$\rho(x, y)\pi(x)Q(x, y) = \rho(y, x)\pi(y)Q(y, x).$$

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E. On suppose construit $X_0, \ldots, X_n$. La proposition à l'étape $n + 1$, $\tilde{X}_{n+1}$ est distribuée suivant $Q(X_n, \cdot)$. La proposition est acceptée avec probabilité $\rho(X_n, \tilde{X}_{n+1})$ et alors on pose $X_{n+1} = \tilde{X}_{n+1}$. Si elle est rejetée, alors on pose $X_{n+1} = X_n$.

Pour une probabilité ν sur E et f une fonction réelle définie sur E, on définit $\langle \nu, f \rangle = \sum_{x \in E} \nu(x) f(x)$, dès que le second membre a un sens (i.e. si $f \geq 0$ ou si $\langle \nu, |f| \rangle < \infty$).

1. Vérifier que $X = (X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition. Vérifier que P est réversible par rapport à π. Montrer que P est irréductible.
2. Soit f telle que $\langle \pi, |f| \rangle < \infty$. Montrer que $I_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ converge p.s. vers $\langle \pi, f \rangle$.

On pose $f^c(x, \tilde{x}) = \mathbb{E}[f(X_1) | X_0 = x, \tilde{X}_1 = \tilde{x}]$ et $I_n^{WR}(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^c(X_k, \tilde{X}_{k+1})$.

3. On suppose que $\langle \nu_0, |f| \rangle < \infty$, où ν_0 est la loi de X_0. Montrer que $I_n^{WR}(f)$ et $I_n(f)$ sont des estimateurs de $\langle \pi, f \rangle$ ayant même biais (i.e. $\mathbb{E}[I_n^{WR}(f)] = \mathbb{E}[I_n(f)]$).
4. Montrer que $X^c = (X_n^c = (X_n, \tilde{X}_{n+1}), n \geq 0)$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P^c. Est-elle irréductible ? Montrer que π^c définie par $\pi^c(x, \tilde{x}) = \pi(x)Q(x, \tilde{x})$ est une probabilité invariante pour P^c. Est-ce la seule ?

5. Calculer $\langle \pi^c, f^c \rangle$. Montrer que $I_n^{WR}(f)$ converge p.s. vers $\langle \pi, f \rangle$.
6. Montrer que $\mathrm{Var}_\pi(f(X_k)) \geq \mathrm{Var}_\pi(f^c(X_k, \tilde{X}_{k+1}))$, ou l'indice π indique que la loi de X_0 est π. Peut-on en déduire que la variance de $I_n^{WR}(f)$ est plus faible que celle de I_n [5] ?

△

Exercice 3 (Dernier temps de passage)**.**
Soit Y une chaîne de Markov irréductible transiente à valeurs dans un espace d'état au plus dénombrable. On note $\tau_y = \sup\{n \geq 0; Y_n = y\}$ le dernier temps de passage en y, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\tau_y = n | Y_0 = y) = 1$. En déduire que
$$\mathbb{P}(Y_n \neq y, \quad \forall n \geq 1 | Y_0 = y) = \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y_n = y | Y_0 = y)}.$$
2. Montrer que $N = \mathrm{Card}\ \{n \geq 0; Y_n = y\}$ suit, conditionnellement à $\{Y_0 = y\}$, une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$. On suppose $p \neq 1/2$. On définit $S_0 = 0$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

3. Vérifier que $S = (S_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que S est irréductible transiente.
4. Évaluer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. Écrire la fonction $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ sous forme d'une série entière (pour $x \in (-1, 1)$). En déduire que $\mathbb{P}(S_n \neq 0, \quad \forall n \geq 1) = |1 - 2p|$.

△

Exercice 4 (Marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^2$)**.**
Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ indépendantes de même loi, de carré intégrable et telle que X_1 a même loi que $-X_1$. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que $S = (S_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(S_n = x)^2$.
3. On pose $B_n = \{x \in \mathbb{Z}^2; |x|^2 < 2\mathbb{E}[|S_n|^2]\}$. Calculer $\mathbb{E}[|S_n|^2]$ et en déduire que $\mathrm{Card}\ B_n \leq n/C$ pour une certaine constante C.
4. Montrer que $\displaystyle \left(\frac{1}{\mathrm{Card}\ B_n} \sum_{x\in B_n} \mathbb{P}(S_n = x) \right)^2 \leq \frac{1}{\mathrm{Card}\ B_n} \sum_{x\in B_n} \mathbb{P}(S_n = x)^2.$
5. Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \geq C/4n$, puis en déduire que S est une chaîne de Markov récurrente[6] (i.e. p.s. le cardinal de $\{n \geq 0; S_n = 0\}$ est infini).
6. Montrer que si S est irréductible, alors elle est récurrente nulle.

△

[5] D. Frenkel. Waste Recycling Monte Carlo, *Lect. Notes in Phys.*, 703 :127-137, Springer, (2006).
[6] J.-M. Derrien, A simple proof of a recurrence theorem for random walks in $\mathbb{Z}^2$, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00109869/en/`, (2006).

Exercice 5.
On considère une marche aléatoire symétrique $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où les v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2.$$

On considère la famille de variables aléatoires

$$Y_n = \sup \{k \leq n; S_{2k} = 0\}, \quad n \geq 1.$$

On désire évaluer la valeur $\mathbb{P}[Y_n = k]$ pour $k \leq n$. Dans le jeu de pile ou face, la v.a.r. Y_n est le dernier instant où les deux joueurs sont à égalité.

1. Calculer $\mathbb{P}[S_m = b]$.
2. On admet la formule suivante :

$$\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots; S_m \neq 0; S_m = b] = \frac{|b|}{m} \mathbb{P}[S_m = b].$$

   Calculer $\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots; S_{2n} \neq 0]$. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{2k}{(n+k)(n-k)} = \frac{1}{n-k-1} - \frac{1}{n+k-1}.$$

3. En déduire que $\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots; S_{2n} \neq 0] = \mathbb{P}[S_{2n} = 0]$.
4. En utilisant le résultat précédent montrer que

$$\mathbb{P}[Y_n = k] = \mathbb{P}[S_{2k} = 0]\mathbb{P}[S_{2n-2k} = 0].$$

   Remarquer que contrairement à l'intuition la loi du dernier zéro avant $2n$ est symétrique par rapport à n.
5. Soit $0 < y < x < 1$. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi}$ pour n grand), montrer que pour n grand

$$\mathbb{P}[ny \leq Y_n \leq nx] \sim \frac{1}{\pi} \int_y^x \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, du.$$

6. En déduire que la suite $(Y_n/n, n \geq 1)$ converge en loi.
7. Montrer que asymptotiquement, avec probabilité $1/2$,

$$Y_n/n \in \left[0, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 1\right].$$

△

Promenade aléatoire
Séance V, Vendredi 7 décembre 2007

Exercice 1 (Manipulation de l'espérance conditionnelle).

1. Soit A et B deux évènements. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathbf{1}_B]$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle symétrique (i.e. X et $-X$ ont même loi) et intégrable. Calculer $\mathbb{E}[X|X^2]$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable à densité. Calculer $\mathbb{E}[X||X|]$ puis en déduire $\mathbb{E}[X|X^2]$.
4. Soit $(X_n, n \geq 1)$ des variables aléatoires réelles intégrables indépendantes et de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, pour $n \geq 1$. Montrer que p.s. $\mathbb{E}[X_1|S_2] = \mathbb{E}[X_2|S_2]$. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_2]$. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1 \mid \sigma(S_k, k \geq n)\right]$ pour $n \geq 1$.

△

Exercice 2 (Formule de Wald).
Soit $X = (X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles, de carré intégrable, indépendantes et de même loi. Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de carré intégrable et indépendante de X. On note $S_\tau = \sum_{k=1}^\tau X_k$.

1. Calculer la moyenne conditionnelle $\mathbb{E}[S_\tau \mid \tau]$ et $\mathbb{E}\left[(S_\tau - \mathbb{E}[S_\tau \mid \tau])^2 \mid \tau\right]$, la variance conditionnelle.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[S_\tau]$ et de $\mathrm{Var}(S_\tau)$.

△

Exercice 3 (Urne de Polya).
On considère une urne contenant $r \geq 1$ boules rouges et $b \geq 1$ boules bleues. À l'étape n, on tire une boule au hasard de l'urne. Si elle est rouge on la remet dans l'urne avec une autre boule rouge, si elle est bleue, on la remet dans l'urne avec une autre boule bleue. Ainsi à l'étape n, il y a $b+r+n$ boules dans l'urne. On définit la suite $(X_n, n \geq 1)$, où $X_n = 1$ si la boule tirée à l'étape n est rouge et $X_n = 0$ sinon. On note S_n le nombre de boules rouges dans l'urne à l'étape n. En particulier, on a $S_0 = r$ et $S_n = r + \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer, par récurrence, que
$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \frac{(s-1)!}{(r-1)!} \times \frac{(b+r-1)!}{(b-1)!} \times \frac{(b+r+n-s-1)!}{(b+r+n-1)!},$$
où $s = r + \sum_{i=1}^n x_i$. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
2. Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Vérifier que le vecteur $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ a même loi que $(X_1, \ldots, X_n)$ (On dit que les variables aléatoires sont échangeables.). En déduire que les variables $(X_n, n \geq 1)$ ont même loi, que l'on déterminera.
3. Déduire de la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ la loi de S_n :
$$\mathbb{P}(S_n = s) = \frac{C_{s-1}^{s-r} C_{b+r+n-s-1}^{n+r-s}}{C_{b+r+n-1}^n}, \quad s \in \mathbb{N}, s \geq r.$$

On note $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle du processus $S = (S_n, n \geq 0)$ (i.e. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k, k \leq n)$).

4. Montrer que S est une chaîne de Markov (non homogène) dont la matrice de transition, que l'on calculera, dépend de n : $\mathbb{P}(S_{n+1} = s | \mathcal{F}_n) = P_{n+1}(S_n, s)$.
5. Montrer que la suite $M = (M_n, n \geq 0)$ définie par $M_n = \dfrac{S_n}{b+r+n}$ est une martingale bornée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.
6. Soit $\theta \in (0,1)$. Montrer que la suite $(N_n^\theta, n \geq 0)$, où

$$N_n^\theta = \frac{(b+r+n-1)!}{(S_n-1)!(b+r+n-S_n-1)!} \theta^{S_n-1}(1-\theta)^{b+r+n-S_n-1}$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.

$\triangle$

Exercice 4 (Urne de Polya et convergence)**.**
On reprend les notations de l'exercice précédent. On cherche à identifier la loi limite de la martingale M. Soit Z une variable aléatoire de loi $\beta(a, a')$, avec $a > 0, a' > 0$ dont la densité est $f(z) = \dfrac{\Gamma(a+a')}{\Gamma(a)\Gamma(a')} z^{a-1}(1-z)^{a'-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(z)$. Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que cette suite est indépendante de Z. On définit, pour $n \geq 1$, $Y_n = \mathbf{1}_{\{U_n \leq Z\}}$.

1. On note $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Montrer que $\mathbb{E}\left[(Z - \bar{Y}_n)^2 | Z\right] = \dfrac{Z(1-Z)}{n}$.
2. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[(Z - \bar{Y}_n)^2\right] = 0$. Quelle est la loi limite de $\bar{Y}_n$ lorsque n tends vers l'infini ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n)$ en fonction de $v = \sum_{i=1}^n x_i$. Montrer que l'on peut choisir a et a' de façon à ce que la loi de la suite $(Y_n, n \geq 0)$ ait même loi que $(X_n, n \geq 0)$. (On rappelle que si $a \in \mathbb{N}^*$ alors $\Gamma(a) = (a-1)!$.)
4. Vérifier que la suite M converge p.s. vers une limite M_∞. Donner la loi de M_∞.

$\triangle$

Exercice 5 (Urne de Polya et retournement du temps)**.**
On reprend les notations de l'exercice précédent. Pour $s \geq r+1$, On note T_s le premier instant d'apparition de la s-ième boule rouge : $T_s = \inf\{n \geq 0; S_n = s\}$.

1. Écrire l'événement $\{T_s = n\}$ en fonction de $X_1, \ldots, X_n$. En déduire que $\mathbb{P}(T_s = n) = \dfrac{s-r}{n} \mathbb{P}(S_n = s)$.
2. Écrire l'événement $\{T_s = n\}$ en fonction de S_{n-1} et S_n. En déduire $\mathbb{P}(S_{n-1} = s-1 | S_n = s)$.
3. Montrer que la suite $(V_n, n \in \{0, \ldots, m\})$ définie par $V_n = S_{m-n}$ est une chaîne de Markov (non homogène).
4. En déduire que $((S_n - r)/n, n \in \{0, \ldots, m\})$ est une martingale par rapport à une filtration que l'on précisera.

$\triangle$

Promenade aléatoire
Séance VI, Vendredi 14 décembre 2007

Exercice 1 (Uniforme intégrabilité).
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(X_i, i \in I)$ une famille, pas forcément dénombrable, de variables aléatoires réelles. On dit que la famille $(X_i, i \in I)$ est uniformément intégrable si on a

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbf{1}_{|X_i|\geq r}\right] = 0.$$

1. Montrer que $(X_i, i \in I)$ est uniformément intégrable si et seulement si $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] \leq \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout évènement B tel que $\mathbb{P}(B) < \delta$, alors on a $\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_B] \leq \varepsilon$ pour tout $i \in I$.

Soit X une variable aléatoire réelle intégrable.

2. Vérifier que X est uniformément intégrable. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que l'on a $\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\geq r}\right] \leq \mathbb{E}[|X|]/r$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]| \mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\geq r}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X| \mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\geq r}\right].$$

   En déduire que la famille de variables aléatoires $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, où $\mathcal{G}$ parcourt l'ensemble des sous-tribus de $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable.

3. Soit $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ une filtration et $\mathcal{F}_\infty$ la plus petite tribu qui contient $\mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n], n \geq 1)$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^1 vers $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$.

△

Exercice 2 (Inégalité de Jensen).
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X est bornée. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$: φ est l'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de fonctions affines (i.e. il existe une famille dénombrable $(A_n, n \geq 1)$ de fonctions affines telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = \sup_{n\geq 1} A(x)$).

1. Montrer que p.s. $\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On pose $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Vérifier que Y est de carré intégrable. Montrer que $\mathrm{Var}(Y) \leq \mathrm{Var}(X)$.

△

Exercice 3 (Martingale et mesure de Lebesgue).
On considère $\Omega = [0, 1)$ muni de la tribu borélienne, $\mathcal{F}$, (la plus petite tribu sur $[0, 1)$ qui contienne tous les ouverts) et de la mesure de Lebesgue, $\mathbb{P}$, comme probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la fonction $x \mapsto \lfloor 2^n x \rfloor$, où $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de $y \in \mathbb{R}$.

1. Donner tous les événements de $\mathcal{F}_n$.
2. Soit g une fonction mesurable intégrable définie sur $[0, 1)$. Calculer $g_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$. Déterminer la plus petite tribu qui contienne $\mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$. Déduire de l'exercice 1, question 3, que $(g_n, n \geq 0)$ converge p.s. et dans $L^1(\mathbb{P})$ vers une limite que l'on précisera.

3. On considère $g_n = 2^n \mathbf{1}_{[0,2^{-n})}$. Montrer que $(g_n, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale intégrable. Étudier la convergence de cette martingale. Est-elle uniformément intégrable ?
4. Soit f une fonction lipschitzienne définie sur $[0,1]$: il existe $c > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ pour tout $x, y \in [0,1)$. On pose $h_n(x) = 2^n \Big(f(2^{-n} + 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor) - f(2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor) \Big)$ pour $x \in [0,1)$. Montrer que $(h_n, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale bornée. Montrer qu'il existe une fonction h intégrable telle que $f(x) = f(0) + \int_0^x h(y)\, dy$ pour $x \in [0,1)$.

△

Exercice 4 (Convergence en probabilité de martingale mais pas p.s.).
Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/(2n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - n^{-1}$. On pose $X_1 = Z_1$ et pour $n \geq 2$

$$X_n = \begin{cases} Z_n & \text{si } X_{n-1} = 0, \\ n X_{n-1}|Z_n| & \text{si } X_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que $|X_n| \leq n!$, puis montrer que $X = (X_n, n \geq 1)$ est une martingale.
2. Montrer directement que X converge en probabilité vers 0.
3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, vérifier que $\mathbb{P}(Z_n \neq 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existe}) = 0$. En particulier la martingale ne converge pas p.s. vers 0.

△

Exercice 5 (Convergence L^1 et uniforme intégrabilité).
Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires intégrables qui converge p.s. vers X intégrable. On note $x^+ = \max(0, x)$.

1. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X - X_n)^+] = 0$. En déduire que $(X_n, n \geq 0)$ converge vers X dans L^1.
2. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ converge vers X dans L^1 si et seulement si $(X_n, n \geq 0)$ est uniformément intégrable. On pourra utiliser l'exercice 1.

△

Exercice 6 (Modèle de Wright-Fisher).
On considère une population asexuée de taille constante N. On suppose que la reproduction est aléatoire : tout se passe comme si chaque individu choisissait de manière indépendante son parent dans la génération précédente. Le modèle de Wright-Fisher concerne l'étude de l'évolution de la répartition de deux allèles, A et a, au sein d'une population. Pour $k \geq 0$, on note X_n le nombre d'allèles A présents à la génération n dans la population. On suppose que $X_0 = i \in \{0, \ldots, N\}$ fixé.

1. Montrer que $X = (X_n, n \geq 0)$ est une martingale (préciser la filtration).
2. Montrer que X converge vers une limite X_∞ et préciser le type de convergence.
3. Montrer que $M = (M_n = (\frac{N}{N-1})^n X_n(N - X_n), n \geq 0)$ est une martingale et calculer $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)]$.
4. Montrer que l'un des allèles disparaît p.s. en temps fini. Calculer la probabilité pour que l'allèle A disparaisse.
5. (Facultatif) Déterminer $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$. A-t-on $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$? La martingale M est-elle uniformément intégrable ?

△

Promenade aléatoire
Séance VII, Vendredi 21 décembre 2007

Exercice 1 (Temps d'arrêt)**.**
Soit T et S deux temps d'arrêt associés à une filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.

1. Montrer que $\min(T, S)$ est une temps d'arrêt et qu'il est $\mathcal{F}_T$ mesurable.
2. Montrer que $\max(T, S)$ est un temps d'arrêt. Est-il $\mathcal{F}_T$ mesurable ?

△

Exercice 2 (Propriété de Markov fort)**.**
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov définie sur un espace discret E et de matrice de transition P. Soit τ un temps d'arrêt fini p.s. par rapport à la filtration naturelle du processus X, $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.

1. Calculer la loi de $X_{\tau+1}$ sachant $\mathcal{F}_\tau$.
2. Montrer que la loi de $Y = (Y_n = X_{\tau+n}, n \geq 0)$ sachant $\mathcal{F}_\tau$ est la loi de X issu de X_0 distribué suivant X_τ.

△

Exercice 3 (Loi du temps de sortie de la marche aléatoire simple)**.**
Soit $X = (X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, où $p \in (0, 1)$. On considère la marche aléatoire simple $S = (S_n, n \geq 0)$ définie par $S_0 = x \in \mathbb{Z}$, et pour $n \geq 1$, $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k$. On note $(\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n), n \geq 1)$ la filtration naturelle de S. On utilisera la notation $\mathbb{P}_x$ pour souligner que $S_0 = x$.

Pour $a < b \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_{a,b}$ (resp. τ_b) le temps de sortie de (a, b) (resp. de $(-\infty, b)$) pour la marche aléatoire

$$\tau_{a,b} = \inf\{n \geq 0; S_n \geq b \text{ ou } S_n \leq a\} \quad \text{et} \quad \tau_b = \inf\{n \geq 0; S_n \geq b\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Le but de cet exercice est de déterminer les lois de $\tau_{a,b}$ et de τ_b.

1. Montrer que $\tau_{a,b}$ est un temps d'arrêt. Donner sa valeur si $x \notin (a, b)$.
2. Vérifier que $(\tau_{-n,b}, n \geq 0)$ converge p.s. en croissant vers τ_b. En déduire que τ_b est un temps d'arrêt.

On suppose dorénavant que $x \in (a, b)$. On étudie dans une première partie le cas $p = 1/2$.

3. Montrer en utilisant le théorème de la limite centrale que p.s. $\tau_{a,b}$ est fini. Montrer qu'il n'est pas borné si $a < x < b - 1$ ou si $a + 1 < x < b$.
4. Montrer que $(S_n, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. En déduire que $\mathbb{E}_x[S_{\tau_{a,b}}] = x$, puis calculer $\mathbb{P}_x(S_{\tau_{a,b}} = a)$.
5. Trouver une suite déterministe $(b_n, n \geq 0)$ telle que $((S_n - x)^2 - b_n, n \geq 0)$ soit une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. En déduire $\mathbb{E}_x[\tau_{a,b}]$.
6. Utiliser les martingales exponentielles pour calculer

$$\mathrm{e}^{at}\, \mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right] + \mathrm{e}^{bt}\, \mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=b\}}\right],$$

   où $s = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$ et $t \in \mathbb{R}$. Exprimer e^t en fonction de s. En déduire $\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right]$, puis la fonction génératrice de $\tau_{a,b}$.

7. Montrer que $\mathbb{P}_x(\tau_b < +\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(S_{\tau_{-n,b}} = b) = 1$.
8. Calculer $\mathbb{E}_x[\tau_b]$. Calculer la fonction génératrice de τ_b. Peut-on appliquer le théorème d'arrêt à la martingale S à l'instant τ_b ? En déduire que $\mathbb{E}[\sup_{n\leq\tau_b} |S_n|] = +\infty$.

On étudie dans une seconde partie le cas $p \neq 1/2$. On pose $q = 1 - p$.

9. Montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que $\tau_{a,b}$ est fini p.s. Montrer qu'il n'est pas borné si $a < x < b - 1$ ou si $a + 1 < x < b$.
10. Montrer que $((q/p)^{S_n}, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. En déduire $\mathbb{E}_x[(q/p)^{S_{\tau_{a,b}}}] = (q/p)^x$, puis $\mathbb{P}_x(S_{\tau_{a,b}} = a)$. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$ (on cherchera une convergence en loi) ?
11. Trouver une suite déterministe $(c_n, n \geq 0)$ telle que $(S_n - c_n, n \geq 0)$ soit une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. En déduire $\mathbb{E}_x[\tau_{a,b}]$.
12. Utiliser les martingales exponentielles pour calculer

$$\mathrm{e}^{at}\,\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right] + \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}\{S_{\tau_{a,b}} = b\}\right],$$

où $s = p\,\mathrm{e}^t + q\,\mathrm{e}^{-t}$. Exprimer e^t en fonction de s. En déduire $\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{\{S_{\tau_{a,b}}=a\}}\right]$. En deduire la fonction génératrice de $\tau_{a,b}$. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$?
13. Montrer que τ_b n'est pas toujours fini p.s. Calculer $\mathbb{P}_x(\tau_b < +\infty)$.
14. Calculer la fonction génératrice de τ_b. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$?

$\triangle$

Exercice 4 (Temps d'attente avant l'apparition d'une séquence)**.**
Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p$. On désire calculer le temps moyen avant la première apparition d'une séquence de longueur trois donnée. Pour cela, on pose : $\tau_{ijk} = \inf\{n \geq 3; (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) = (i, j, k)\}$ pour $i, j, k \in \{0, 1\}$

1. Montrer que τ_{ijk} est un temps d'arrêt (par rapport à une filtration que l'on précisera) p.s. fini.
2. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = (S_{n-1} + 1)\dfrac{X_n}{p}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(S_n - n, n \geq 0)$ est une martingale. En déduire $\mathbb{E}[\tau_{111}]$.
3. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{111} > \tau_{110})$.
4. Considérer $T_2 = \dfrac{X_1X_2}{p^2} + \dfrac{X_2}{p}$ et $T_n = T_{n-1}\dfrac{1 - X_n}{1 - p} + \dfrac{X_{n-1}X_n}{p^2} - \dfrac{X_{n-1}(1 - X_n)}{p(1 - p)} + \dfrac{X_n}{p}$ pour tout $n \geq 3$, afin de calculer $\mathbb{E}[\tau_{110}]$.
5. Considérer $U_1 = \dfrac{X_1}{p}$ et $U_n = U_{n-1}\dfrac{1 - X_n}{1 - p} + \dfrac{X_n}{p}$ pour tout $n \geq 2$, afin de calculer $\mathbb{E}[\tau_{100}]$.
6. Considérer $V_2 = \dfrac{X_1(1 - X_2)}{p(1 - p)} + \dfrac{X_2}{p}$ et $V_n = V_{n-1}\dfrac{X_n}{p} + \dfrac{X_{n-1}(1 - X_n)}{p(1 - p)} - \dfrac{X_{n-1}X_n}{p^2} + \dfrac{X_n}{p}$ pour tout $n \geq 3$, afin de calculer $\mathbb{E}[\tau_{101}]$.

$\triangle$

Promenade aléatoire
Séance VIII, Vendredi 11 janvier 2008

Exercice 1 (Pêche).
Vous débutez une journée de pêche dans un bassin. On suppose que la vente d'un poisson rapporte $g = 1$ et que chaque unité de temps passée à pêcher coûte $c > 0$. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre optimal de poisson à pécher qui assure le plus grand gain moyen.

On suppose que le bassin comporte $n \geq 1$ poissons numérotés de 1 à n où n est connu. On modélise le temps où le poisson $k \in \{1, \ldots, n\}$ est pêché par une variable aléatoire T_k. On suppose que les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_n$ sont indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire T positive dont la fonction de répartition est continue (i.e. $\mathbb{P}(T = t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$). Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_k le temps de pêche du k-ième poisson (ainsi $X_1 = \min_{1 \leq i \leq n} T_i$ et $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} T_i$).

1. Montrer que l'on ne peut pécher qu'un seul poisson à la fois.
2. Écrire la valeur du gain, Y_k, lorsque l'on pêche le k-ième poisson. On pose $Y_0 = 0$. Écrire les équations d'optimalité (i.e. l'enveloppe de Snell, $Z = (Z_k, 0 \leq k \leq n)$, du processus de gain $Y = (Y_k, 0 \leq k \leq n)$).

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (ceci est équivalent à supposer que la probabilité de pêcher le poisson k entre les instants t et $t + dt$ sachant qu'il n'a pas encore été pêché ne dépend pas de t). La densité de la loi de T est $\lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

3. On suppose $n \geq 2$. On pose $U = j$ si $T_j = \min_{1 \leq k \leq n} T_k$ de sorte que $T_U = X_1$. Montrer que les variables aléatoires $U, X_1, (T_k - X_1, 1 \leq k \leq n, k \neq U)$ sont indépendantes, et que U est uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, X_1 est de loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, et les variables $(T_k - X_1, 1 \leq k \leq n, k \neq U)$ sont $n - 1$ variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.
4. On pose $X_0 = 0$. Déduire de la question précédente que les variables $(X_k - X_{k-1}, 1 \leq k \leq n)$ sont indépendantes et que $X_k - X_{k-1}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(n + 1 - k)$.
5. Montrer que $Z_k = a_k - cX_k$ pour $0 \leq k \leq n$ pour une certaine suite $(a_k, 0 \leq k \leq n)$.
6. Montrer que le temps optimal minimal, τ^*, d'arrêt de la pêche est déterministe. Vérifier que si $c \geq n\lambda$, alors il est optimal de ne rien faire. Vérifier que $\tau^* = \max(0, \lceil n - \frac{c}{\lambda} \rceil)$, où $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ est tel que $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. Donner le gain optimal.

△

Exercice 2 (Exemples où il n'existe pas de temps d'arrêt optimal).
On note Y_n le gain à l'instant $n \geq 1$. On cherche un temps d'arrêt optimal, $\tau^* : \mathbb{E}[Y_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[Y_\tau]$, où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt strictement positifs.

1. On pose $Y_n = 1 - n^{-1}$ et $Y_\infty = 0$. Existe-t-il un temps d'arrêt optimal ?
2. On considère un jeu de pile ou face : les variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On considère les gains $Y_n = (2^n - 1) \prod_{k=1}^n X_k$: si on s'arrête à l'instant n, on gagne $(2^n - 1)$ si l'on a observé que des succés et rien sinon. On pose $Y_\infty = 0$.
   (a) Montrer que p.s. $\limsup_{n \to \infty} Y_n = 0$. Calculer $\mathbb{E}[\sup_{n \geq 1} Y_n]$.

(b) Montrer que $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] > Y_n$ pour tout $n \geq 1$, où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas de temps d'arrêt optimal.

$\triangle$

Exercice 3 (Recherche optimale d'une place de parking)**.**
Vous désirez garer votre voiture le plus près possible de l'entrée du théâtre où vous vous rendez. Vous vous engagez dans la rue du théatre (à sens unique), qui comporte $n > 1$ places de parking avant l'entrée du théatre (la n-ième place de parking étant devant l'entrée du théatre) et qu'il y a une infinité de places de parking aprés l'entrée du théatre. On note $X_k = 0$ si la k-ième place de parking est libre et $X_k = 1$ sinon. On suppose que les variables aléatoires $(X_k, k \geq 1)$ sont indépendantes de même loi et que la probabilité pour qu'une place donnée soit vide, $p = \mathbb{P}(X_1 = 0) \in (0, 1)$, est connue.

L'objectif est de trouver une stratégie optimale qui réduise le nombre de place de parking entre l'entrée du théatre et l'endroit où vous garez la voiture. On note $Y_k = |n-k| + \infty \mathbf{1}_{\{X_k=1\}}$ le coût si vous vous garez sur la k-ième place de parking. Soit $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des temps d'arrêt (associés à la filtration naturelle engendrée par $(X_i, i \geq 1)$) minorés par k. On désire donc trouver $\tau^* \in \mathcal{T}_1$ tel que $\mathbb{E}[Y_{\tau^*}] = \min_{\tau \in \mathcal{T}_1} \mathbb{E}[Y_\tau]$. On considère pour $k \geq 1$ $Z_k = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in \mathcal{T}_k} \mathbb{E}[Y_\tau|\mathcal{F}_k]$.

1. Quelle stratégie adopter si $k \geq n$. En déduire $Z_n = \dfrac{X_n}{p}$.
2. Montrer que pour $1 \leq k \leq n$, $Z_k = \alpha_k X_k + \min(n-k, \alpha_k)(1 - X_k)$, où
$$\alpha_n = \frac{1}{p} \quad \text{et, pour } 1 \leq k \leq n-1, \quad \alpha_k = (1-p)\alpha_{k+1} + p\min(n-k-1, \alpha_{k+1}).$$
3. Vérifier que pour $p > 1/2$, $Z_k = \dfrac{1-p}{p} < 1$ pour $1 \leq k < n$. En déduire la stratégie optimale.
4. Montrer que si $\alpha_{k+1} < n-k-1$ alors $\alpha_k < n-k$. En déduire qu'il est optimal de choisir la première place libre à partir de $k^* = \inf\{k \geq 1; n-k \leq \alpha_k\}$: le temps d'arrêt optimal est $\tau^* = \inf\{k \geq k^*; X_k = 0\}$.

On note $n^*(p) = n - k^*$ le nombre de places avant le théatre à partir du quel il est optimal de se garer. La question 3 assure que $n^*(p) = 0$ si $p > 1/2$.

5. On suppose $p \leq 1/2$. On pose
$$a_n = \frac{1}{p} \quad \text{et, pour } 1 \leq k \leq n-1, \quad a_k = (1-p)a_{k+1} + p(n-k-1).$$
Montrer que $a_k = n - k + \dfrac{2(1-p)^{n-k} - 1}{p}$ pour $1 \leq k \leq n$. Vérifier que $\alpha_k = a_k$ pour $k \geq k^* - 1$, puis que $n^*(p) = \inf\{j \geq 0; j > a_{n-j}\} - 1$. En déduire que $n^*(p) = \left\lfloor \dfrac{\log(2)}{|\log(1-p)|} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ est tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
6. Montrer que pour $p \in (1 - 2^{-1/r}, 1 - 2^{-1/(r+1)}]$, où $r \in \mathbb{N}$, on a $n^*(p) = r$.

$\triangle$

Exercice 4 (Vente de maisons)**.**
Un vendeur désire vendre une maison au plus offrant. L'attente d'une offre supplémentaire engendre un coût $c > 0$. Les offres $(X_n, n \geq 1)$ sont modélisées par des variables aléatoires positives

indépendantes de même loi et de carré intégrable. On suppose qu'une offre rejetée est perdue. Le gain de la vente lors de la n-ième offre est donc $Y_n = X_n - nc$.

On suppose $c \leq \mathbb{E}[X_1]$. On pose $Y_0 = 0$. On note $x^+ = \max(0, x)$ la partie positive de $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y_n \geq -nc/2) < \infty$. En déduire que p.s. $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = -\infty$.
2. Vérifier que $\mathbb{E}[\sup_{n\geq 1} Y_n^+] \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[(X_1 - nc)^+]$. En déduire que $\sup_{n\geq 1} Y_n^+$ est intégrable. (En fait il y équivalence entre $\sup_{n\geq 1} Y_n^+$ intégrable et X_1 de carré intégrable).

On note $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des temps d'arrêt (associés à la filtration naturelle engendrée par $(X_n, n \geq 1)$) minorés par k. Pour $n \geq 1$, on pose $Z_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n} \mathbb{E}[Y_\tau|\mathcal{F}_n]$, et $Z_0 = \sup\limits_{\tau\in\mathcal{T}_1} \mathbb{E}[Y_\tau]$ le gain moyen optimal de la vente.

3. Vérifier que $Z_0 = \mathbb{E}[Z_1]$. Montrer que p.s. $Z_1 = \max(X_1, Z_0) - c$, puis $\mathbb{E}[(X_1 - Z_0)^+] = c$.
4. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $\mathbb{E}[(X_1 - z)^+] = c$, que l'on note Z_0.
5. Montrer que $\tau^* = \inf\{n \geq 1; X_n \geq Z_0\}$ est un temps d'arrêt optimal pour le problème en horizon infini : $\mathbb{E}[Y_{\tau^*}] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_1} \mathbb{E}[Y_\tau]$.
6. On suppose que les offres rejetées ne sont pas perdues : le gain de la vente lors de la n-ième offre est $\tilde{Y}_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k - nc$. Vérifier que $\sup_{n\geq 1} Y_n = \sup_{n\geq 1} \tilde{Y}_n$. Montrer que la stratégie associée au temps d'arrêt τ^* est encore optimale, et que le gain moyen optimal de la vente est encore V_0.

On note $\bar{\mathcal{T}}_k$ le sous ensemble de $\mathcal{T}_k$ formé des temps d'arrêt intégrables.

On suppose que lorsque la maison est vendue, suivant une stratégie associée à un temps d'arrêt $\tau \in \bar{\mathcal{T}}_1$, on construit une autre maison du même type, avec un coût $a > 0$, sur une durée $b > 0$, que l'on vend en utilisant la même stratégie. On note Y^i le gain de la vente de la maison i, τ^i la durée de la vente et $\tau^i + b$ la durée d'un cycle construction-vente. On suppose que les variables (Y^i, τ^i), pour $i \geq 1$, sont indépendantes et de même loi que $(Y_\tau - a, \tau)$.

7. Sur le long terme, quel est le gain moyen de la vente d'une maison par unité de temps : $\mathbb{E}\left[\dfrac{Y_\tau - a}{\tau + b}\right]$ ou $\dfrac{\mathbb{E}[Y_\tau] - a}{\mathbb{E}[\tau] + b}$?
8. Montrer que s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{\tau\in\bar{\mathcal{T}}_1} \mathbb{E}[Y_\tau - a - \gamma(\tau + b)] = 0$, alors $\sup\limits_{\tau\in\bar{\mathcal{T}}_1} \dfrac{\mathbb{E}[Y_\tau] - a}{\mathbb{E}[\tau] + b} = \gamma$. Vérifier que si $\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{T}}_1$ est tel que $\mathbb{E}[Y_{\bar{\tau}} - a - \gamma(\bar{\tau} + b)] = 0$, alors le temps d'arrêt $\bar{\tau}$ définie une stratégie qui maximise le gain moyen de la vente d'une maison par unité de temps.
9. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$ fixé, déduire de la question 5. la valeurs de $Z_0(\gamma) = \sup_{\tau\in\bar{\mathcal{T}}_1} \mathbb{E}[Y_\tau - a - \gamma(\tau + b)]$. On suppose $\mathbb{E}[(X_1 - a + bc)^+] > 0$. Montrer qu'il existe une valeur unique $\gamma^* > -c$ telle que $Z_0(\gamma^*) = 0$.
10. Montrer que la stratégie optimale est définie par le temps d'arrêt intégrable $\bar{\tau}^* = \inf\{n \geq 1; X_n \geq a + \gamma^* b\}$.
11. Si $b = 0$, déterminer $\bar{\tau}^*$ et γ^* le gain moyen optimal de la vente d'une maison par unité de temps.
12. On suppose que la loi de X_1 est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (et de densité $\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}$). Calculer γ^*. Calculer $\mathbb{E}[Y_\tau]$ et $\dfrac{\mathbb{E}[Y_\tau] - a}{\mathbb{E}[\tau] + b}$ pour $\tau = \tau^*$ et $\tau = \bar{\tau}^*$.

△

Promenade aléatoire

Séance IX (révision), Vendredi 18 janvier 2008

Exercice 1 (Convergence p.s. pour somme de variables indépendantes).
Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$. Le but de cet exercice est de démontrer que si $(S_n, n \geq 1)$ converge en loi alors la suite converge presque sûrement.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$ et $M_n(t) = \dfrac{e^{itS_n}}{\prod_{k=1}^n \psi_k(t)}$ pour $n \geq 1$ si $\prod_{k=1}^n \psi_k(t) \neq 0$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\prod_{k=1}^n \psi_k(t) \neq 0$. Montrer que $(M_k(t), 1 \leq k \leq n)$ est une martingale.

On suppose que $(S_n, n \geq 1)$ converge en loi vers S.

2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, p.s. la suite $(e^{itS_n}, n \geq 1)$ converge.
3. On rappelle que s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour presque tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ la suite $(e^{its_n}, n \geq 1)$ converge, alors la suite $(s_n, n \geq 1)$ converge. Montrer que $(S_n, n \geq 1)$ converge p.s. vers une variable aléatoire de même loi que S.

△

Exercice 2 (Toute suite de variables n'est pas une chaîne de Markov).
Soit $(X_{2n+1}, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$: $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On définit pour tout $n \geq 1$, $X_{2n} = X_{2n-1}X_{2n+1}$.

1. Vérifier que les variables aléatoires $X_{2n}, n \geq 1$ sont indépendantes et de même loi que X_1. Montrer également que X_n et X_{n+1} sont indépendantes.
2. En déduire que les variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ sont indépendantes deux à deux.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$ pour tout $n \geq 1$, $i, j = \pm 1$. En déduire que les équations de Chapman-Kolmogorov sont satisfaites.
4. Calculer $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 1 \mid X_{2n} = -1, X_{2n-1} = 1)$. En déduire que X n'est pas une chaîne de Markov.
5. Montrer que $(Z_n = (X_n, X_{n+1}), n \geq 1)$ est une chaîne de Markov non homogène à valeurs dans $\{-1, 1\}^2$. On déterminera la matrice de transition en distinguant suivant que n est pair ou impair.

△

Exercice 3 (Déterminant d'une matrice à coefficients gaussiens).
Soit (X_1, X_2, X_3, X_4) des variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère la matrice aléatoire $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ et on note $Y = \det A$. Calculer $\mathbb{E}\left[e^{iuY} | X_1, X_2\right]$, puis en déduire la fonction caractéristique de Y. Vérifier que Y est distribuée suivant la loi exponentielle symétrique (de densité $2^{-1} e^{-|x|}$).

△

Exercice 4 (Exemple de chaîne de Markov).
Soit $(p_n, n \geq 0)$ une suite à valeurs dans $(0, 1]$. On considère une chaîne de Markov, $S = (S_n, n \geq 0)$,

à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les transitions sont : pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_1 = k | S_0 = n) = \begin{cases} p_n & \text{si } k = n+1, \\ 1 - p_n & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \notin \{0, n+1\}. \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire est suffisante sur $(p_n, n \geq 0)$ pour que S soit irréductible.
2. On suppose S irréductible. Montrer que $\mathbb{P}(\text{il existe } n \geq 1, S_n = 0 | S_0 = 0) = 1$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - p_n) = +\infty$. Donner une condition nécessaire est suffisante sur $(p_n, n \geq 0)$ pour que S soit récurrente.
3. On suppose S irréductible. Donner une condition nécessaire est suffisante sur $(p_n, n \geq 0)$ pour que S soit récurrente positive.
4. On suppose S irréductible récurrente positive. On note $T_r = \inf\{n \geq 1; S_n = r\}$ pour $r \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $r \geq 1$,
$$\mathbb{E}[T_r | S_0 = r] = \mathbb{E}[T_0 | S_0 = r] + \mathbb{E}[T_r | S_0 = 0],$$
puis que $\mathbb{E}[T_r | S_0 = 0] = \dfrac{1 + \sum_{k=0}^{r-2} \prod_{i=0}^{k} p_i}{\prod_{i=0}^{r-1} p_i}$, avec la convention $\sum_{k=0}^{r-2} \prod_{i=0}^{k} p_i = 0$ si $r = 1$.
5. On pose $V_0 = S_0$ et, pour $n \geq 1$, $V_n = \dfrac{\mathbf{1}_{\{S_n \neq 0\}}}{p_{S_{n-1}}}(1 + V_{n-1})$. Montrer que $(V_n - n, n \geq 0)$ est une martingale. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}[T_r | S_0 = 0]$ pour $r \geq 1$.

△

Exercice 5 (Convergence p.s. de martingale mais pas L^1)**.**
On considère un jeu de pile ou face équilibré où à chaque tour on joue toute sa fortune pour soit tout perdre soit doubler sa fortune. On note X_n votre fortune à l'instant $n \geq 1$. On suppose que $X_0 = 1$. Montrer que $X = (X_n, n \geq 1)$ est une martingale positive. Donner sa limite p.s. Peut-on avoir une convergence dans L^1 ?

△

Exercice 6 (Loi du maximum d'une marche aléatoire)**.**
Soit $(X_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0$, $p = \mathbb{P}(X = 1) > 0$ et X intégrable avec $m = \mathbb{E}[X] < 0$. On considère la marche aléatoire $S = (S_n, n \geq 0)$ définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On désire étudier le maximun global de S : $M = \sup_{n \geq 0} S_n$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(M < +\infty) = 1$.
2. On pose $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_i}\right]$ pour $\lambda \geq 0$. Montrer que φ est convexe et qu'il existe un unique $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 1$. Vérifier que $\varphi'(\lambda_0) > 0$.

On pose $p_k = e^{\lambda_0 k}\, \mathbb{P}(X_n = k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. D'après la question précédente on a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1$. Soit $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi et telles que pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(Y_n = k) = p_k$. On considère la marche aléatoire $V = (V_n, n \geq 0)$ définie par $V_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

3. Montrer que pour toute fonction f bornée ou positive (mesurable), on a
$$\mathbb{E}\left[f(Y_1, \ldots, Y_n)\, e^{-\lambda_0 V_n}\right] = \mathbb{E}\left[f(X_1, \ldots, X_n)\right].$$

4. Vérifier que Y_1 est intégrable et que $\mathbb{E}[Y_1] > 0$.

On introduit les premiers temps d'atteinte du niveau $k \geq 0$ pour les marches S et V :

$$\tau_k = \inf\{n \geq 0; S_n \geq k\} \quad \text{et} \quad \rho_k = \inf\{n \geq 0; V_n \geq k\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

5. Vérifier que ρ_k et τ_k sont des temps d'arrêt par rapport à des filtrations que l'on précisera.
6. Quel est le comportement asymptotique de la suite V quand n tend vers l'infini ? En déduire $\mathbb{P}(\rho_k < \infty)$ et V_{ρ_k}.
7. Montrer que $\left(\mathrm{e}^{-\lambda_0 V_n}, n \geq 1\right)$ est une martingale. Calculer $\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\rho_k \leq n}\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 V_n} \mid \mathcal{F}_{\rho_k}\right]$.
8. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(\tau_k \leq n) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 k}\, \mathbb{P}(\rho_k \leq n)$. Puis calculer $\mathbb{P}(\tau_k < \infty)$.
9. Montrer que $M + 1$ est une variable aléatoire géométrique : $\mathbb{P}(M + 1 = k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On explicitera α.

On considère la marche aléatoire simple avec dérive négative : $\mathbb{P}(X = -1) = 1-p$ avec $1/2 > p > 0$.

10. Vérifier que $\mathrm{e}^{-\lambda_0} = \dfrac{p}{1-p}$. Montrer, en utilisant la propriété de Markov, que $\mathbb{P}(S_n < 0; \forall n \geq 1) = (1-p)\mathbb{P}(M = 0)$. En déduire la probabilité pour que la marche aléatoire $(S_n, n \geq 0)$ ne revienne jamais en 0 : $\mathbb{P}(S_n < 0; \forall n \geq 1)$.

△

Exercice 7 (Arrêt optimal pour une marche aléatoire)**.**
Soit $(X_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0$, $p = \mathbb{P}(X = 1) > 0$. On considère la marche aléatoire $S = (S_n, n \geq 0)$ définie par $S_0 \in \mathbb{Z}$, variable aléatoire indépendante de $(X_n, n \geq 1)$, et pour $n \geq 1$, $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$. On considère le gain à l'instant $n \geq 0$ défini par $Y_n = \beta^n S_n$, où $\beta \in (0, 1]$ peut s'interpréter comme un taux d'actualisation. On pose $Y_\infty = 0$. On désire calculer la valeur optimale moyenne des gains en fonction de S_0 et déterminer le temps d'arrêt optimal associé.

On suppose $\beta < 1$.

1. Vérifier que $Y_n \leq (n + S_0^+)\beta^n$, où $y^+ = \max(0, y)$ désigne la partie positive de y. En déduire que p.s. $\limsup_{n\to\infty} Y_n \leq 0$ et $\mathbb{E}[\sup_{n\geq 0}(Y_n)^+ | S_0 = x] \leq \infty$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

On note $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle associée au processus $(X_n, n \geq 0)$, $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des temps d'arrêt τ tel que p.s. $\tau \geq n$. On pose $Z_0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}[Y_\tau | S_0 = x]$ et pour $n \geq 1$, $Z_n = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}[Y_\tau | \mathcal{F}_n]$.

2. Montrer que $Z_n = \beta^n Z_0(S_n)$ et que $Z_0(x)$ est une fonction croissante de x. Montrer que $\mathbb{E}[Z_0(x' + X)] \leq \mathbb{E}[Z_0(x + X)] + x' - x$ pour tout $x' \geq x$. En déduire, en utilisant les équations d'optimalité, que si à l'instant n, $S_n = x$ et qu'il est optimal de s'arrêter alors si $S_n = x'$ avec $x' \geq x$ il est également optimal de s'arrêter. Montrer qu'il existe un temps d'arrêt optimal de la forme $\tau_r = \inf\{n \geq 0; S_n \geq r\}$, où $r \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y_{\tau_r} | S_0 = x] = \begin{cases} x & \text{si } x \geq r, \\ r\gamma^{-(r-x)} & \text{si } x < r, \end{cases}$$

où $\gamma = 1/\mathbb{E}[\beta^{\tau_1} | S_0 = 0]$. En déduire le temps d'arrêt optimal en fonction de γ, et la valeur optimale moyenne des gains en fonction de S_0.

4. On note $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ pour $\lambda \leq 0$. Montrer que $\log(\gamma)$ est l'unique racine positive de $\varphi(y) = 1/\beta$.

On suppose $\beta = 1$, $\mathbb{E}[X] \in [-\infty, 0)$, et on considère le gain $Y_n = (S_n)^+$. On rappelle que $M = \sup_{n\geq 0} S_n - S_0$ est fini p.s., et que $M+1$ suit une loi géométrique (son paramètre est $1 - e^{-\lambda_0}$, où λ_0 est l'unique racine strictement positive de $\varphi(y) = 1$).

5. Montrer qu'il existe des temps d'arrêt optimaux, dont un de la forme τ_r avec $r \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que
$$\mathbb{E}[Y_{\tau_r}|S_0 = x] = \begin{cases} x & \text{si } x \geq r, \\ \mathbb{E}[S_{\tau_r}\mathbf{1}_{\{\tau_r<\infty\}}|S_0 = x] & \text{si } x < r. \end{cases}$$
Si $x < r$, montrer que $\mathbb{E}[(M + x - S_{\tau_r})\mathbf{1}_{\{\tau_r<\infty\}}|S_0 = x] = \mathbb{E}[M]\mathbb{P}(\tau_r < \infty|S_0 = x)$, puis que
$$\mathbb{E}[S_{\tau_r}\mathbf{1}_{\{\tau_r<\infty\}}|S_0 = x] = \mathbb{E}\left[(M + x - \mathbb{E}[M])\mathbf{1}_{\{M+x\geq r\}}\right].$$
En déduire que $\tau_{\lceil \mathbb{E}[M]\rceil}$est un temps d'arrêt optimal, où pour $y \in \mathbb{R}$, $\lceil y \rceil \in \mathbb{Z}$ est tel que $\lceil y \rceil - 1 < y \leq \lceil y \rceil$. Vérifier que le gain moyen optimal est $V_0(x) = \mathbb{E}[(M + x - \mathbb{E}[M])^+]$.

△

Exercice 8 (Récurrence des processus de naissance et de mort)**.**
Soit $X = (X_n, n \geq 0)$ un processus de naissance et de mort, c'est-à-dire une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont les transitions sont données pour $k \geq 0$ par $\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k) = u_k$, $\mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = k) = r_k$, $\mathbb{P}(X_1 = k-1|X_0 = k) = d_k$ (si $k \geq 1$), $\mathbb{P}(X_1 = \ell|X_0 = k) = 0$ si $|\ell - k| > 1$, où $u_k > 0$, $r_k \geq 0$, et $u_k + r_k + d_k = 1$ pour tout $k \geq 0$, avec $d_0 = 0$ et $d_k > 0$ pour tout $k \geq 1$.

On considère la fonction h définie par $h(0) = 0$ et pour $x \geq 1$, $h(x) = \sum_{k=0}^{x-1} \gamma_k$ définie sur $\mathbb{N}$, où $\gamma_0 = 1$ et$\gamma_k = \dfrac{\prod_{i=1}^k d_j}{\prod_{j=1}^k u_j}$ si $k \geq 1$.

On note les temps d'entrée $\tau_r = \inf\{n \geq 0; X_n = r\}$ pour $r \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[h(X_1)|X_0 = x] = h(x)$ si $x \geq 1$. En déduire que, si $X_0 \geq 1$, alors le processus $(h(X_{\min(n,\tau_0)}), n \geq 0)$ est une martingale.
2. Soit $0 \leq r < x < s \in \mathbb{N}$. Montrer en utilisant le théorème d'arrêt que
$$\mathbb{P}(\tau_r < \tau_s|X_0 = x) = \frac{h(s) - h(x)}{h(s) - h(r)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_s < \tau_r|X_0 = x) = \frac{h(x) - h(r)}{h(s) - h(r)}.$$
3. Vérifier que X est irréductible. Donner une condition nécessaire est suffisante pour que X soit récurrent.

△

Exercice 9 (Ruine d'une assurance)**.**
On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit $S_0 = x > 0$ le capital initial, $c > 0$ le montant (supposé fixe) des revenus des cotisations par an et $X_n \geq 0$ le coût des dommages pour l'année n. Le capital à la fin de l'année $n \geq 1$ est $S_n = x + nc - \sum_{k=1}^n X_k$. L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, i.e. si $\tau = \inf\{k; S_k < 0\}$ est fini. Le but de cet exercice est de majorer la probabilité de ruine, $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

On suppose que les variables $(X_k, k \geq 1)$ sont indépendantes, de même loi, non constante p.s. et possédant des moments exponentiels de tous ordres (i.e. $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

1. Vérifier que $\mathbb{E}[X_1] \geq c$ implique $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, et que $\mathbb{P}(X_1 > c) = 0$ implique $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 0$.

On suppose que $\mathbb{E}[X_1] \leq c$ et $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$.

2. Vérifier que si $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X_k}] \geq \mathrm{e}^{\lambda c}$, alors $(V_n = \mathrm{e}^{-\lambda S_n + \lambda x}, n \geq 0)$ est une sous martingale positive.
3. Soit $N \geq 1$. Vérifier que $\{\tau \leq N\}$ est la réunion disjointe des évènements $F_k = \{S_r \geq 0 \text{ pour } r < k, S_k < 0\} = \{\tau = k\}$ pour $k \in \{1, \dots, N\}$. En déduire

$$\mathbb{E}[V_N \mathbf{1}_{\{\tau \leq N\}}] \geq \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[V_k \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}] \geq \mathrm{e}^{\lambda x}\, \mathbb{P}(\tau \leq N).$$

   (Vérifier que l'on retrouve ainsi l'inégalité maximale sur les sous martingales positives.)
4. En déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \mathrm{e}^{-\lambda_0 x}$, où $\lambda_0 \in (0, \infty)$ est l'unique racine de $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X_1}] = \mathrm{e}^{\lambda c}$.

$\triangle$