# Feuille 1

**Exercice** 1.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). En considérant les événements $A_p = \{|X_p| > p\}$ montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que

$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}(|X_n| > n \quad \text{infiniment souvent}) = 0.$$

□

**Exercice** 2.

1. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. qui converge vers $X$ en probabilité. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que l'on peut extraire de toute sous-suite $(n_k, k \geq 1)$ une sous-sous-suite $(m_l, l \geq 1)$ telle que la suite $(X_{m_l}, l \geq 1)$ converge presque sûrement (p.s.) vers $X$.

2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ et $(Y_n, n \geq 1)$ deux suites de v.a.r. définies sur le même espace de probabilité qui convergent en probabilité vers $X$ et $Y$ respectivement. Soit $f$ une fonction continue réelle définie sur $\mathbb{R}^2$. Utiliser le résultat précédent pour démontrer par l'absurde que la suite de v.a.r. $(f(X_n, Y_n), n \geq 1)$ converge en probabilité vers $f(X, Y)$. □

**Exercice** 3.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. définies sur le même espace de probabilité qui converge vers en loi vers une constante $c$. Montrer que la convergence a également lieu en probabilité.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. qui converge en probabilité vers $X$ et $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. définies sur le même espace de probabilité qui converge p.s. vers 0. Montrer que la suite de v.a.r. $(X_n Y_n, n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0 mais pas forcément p.s. vers 0.
□

**Exercice** 4.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. qui converge en probabilité vers 0. On suppose que la suite de v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ est uniformément intégrable, c'est à dire que

$$\lim_{A \to \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[|X_n| \, \mathbf{1}_{|X_n| \geq A}\right] = 0.$$

1. Montrer que la suite $(X_n, n \geq 1)$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers 0.

2. Montrer à l'aide de 1. que la suite converge au sens de Cézaro en probabilité vers 0 i.e. la suite de v.a.r. $(n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0.

Contre exemple montrant que l'hypothèse d'uniforme intégrabilité est nécessaire.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes et telles que

$$\mathbb{P}[X_n = n] = 1/n \text{ et } \mathbb{P}[X_n = 0] = (n-1)/n.$$

On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3. Montrer que $\mathbb{P}[M_n \leq k] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k-1}$. En déduire que pour tout $\varepsilon$ assez petit,

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}[M_n \leq n\varepsilon] \leq 1/2.$$

4. Comparer $\mathbb{P}[\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \leq \varepsilon]$ et $\mathbb{P}[M_n \leq n\varepsilon]$. En déduire que la suite $(X_n, n \geq 1)$ ne converge pas au sens de Cézaro en probabilité vers 0. $\square$

**Exercice** 5.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes de carré intégrable telles que $\mathbb{E}X_n = 0$ et $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. On désire montrer que la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge p.s. et étudier l'existence de la densité de la loi de cette v.a.r dans un cas particulier (exercice suivant).

On pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. on considère les événements suivants

$$A_1 = \{|Y_1| > r\}\,; \quad A_2 = \{|Y_1| \leq r; |Y_2| > r\}\,; \ldots \quad A_n = \{|Y_1| \leq r; \ldots |Y_{n-1}| \leq r; |Y_n| > r\}\,; \ldots$$

1. Montrer que pour tout entier $k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}\left[A_k\right] \leq \frac{1}{r^2}\,\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_k} Y_n^2\right]$$

(on utilisera le fait que les v.a.r. $X_i$ sont centrées indépendantes).

2. En déduire que pour tous entiers $1 \leq p \leq n$ on a

$$\mathbb{P}\left[\sup_{j=p+1,\ldots,n} |Y_j - Y_p| > r\right] \leq \frac{1}{r^2} \sum_{j=p+1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2\right]$$

(on écrira l'événement $\{\sup_{j=p,\ldots,n} |Y_j - Y_p| > r\}$ comme réunion disjointes d'événements similaires aux $A_k$).

3. Montrer que pour tout $l \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[\lim_{p+1\to\infty} \sup_{j=p,\ldots,n} |Y_j - Y_p| > \frac{1}{l}\right] = 0.$$

4. Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge p.s. $\square$

**Exercice** 6.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d telles que

$$\mathbb{P}\left[X_k = 1\right] = \mathbb{P}\left[X_k = -1\right] = 1/2.$$

1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} 2^{-k} X_{2^k}$ est p.s. convergente.

2. Déterminer sa loi soit en étudiant la convergence des fonctions de répartitions des sommes partielles soit en utilisant les transformées de Fourier. Dans ce dernier cas on utilisera, après l'avoir démontrée, la formule

$$\frac{\sin\lambda}{\lambda} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\lambda}{2^k}\right).$$

3. Soit $\nu_1$ et $\nu_2$ deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\nu_1(dx) = f(x)dx$ où $dx$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction positive mesurable telle que $\int f(x)dx = 1$. Soit $Z_1$ et $Z_2$ deux v.a.r. indépendantes de loi respective $\nu_1$ et $\nu_2$. Montrer que la loi de $Z_1 + Z_2$ a pour densité $\int f(x-y)\nu_2(dy)$.

4. Déduire de l'exercice précédant que la série $\sum_{k\geq 1} k^{-1} X_k$ est p.s. convergente. Montrer à l'aide du 2. et du 3. que sa loi possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. $\square$

# Feuille 1-bis

**Exercice** 1.

On dit que la suite de v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{A\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[|X_n| \, \mathbf{1}_{|X_n|\geq A}\right] = 0.$$

1. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. uniformément intégrable. Montrer que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. Soit $f$ une fonction positive mesurable définie sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \infty$. Montrer que la condition

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(|X_n|)] < \infty$$

implique que la suite de v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ est uniformément intégrable.

3. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. intégrables qui converge p.s. vers la v.a.r. $X$.

- i) Montrer que sauf pour un ensemble au plus dénombrable de réels positifs $A$, on a la convergence p.s. de la suite $\left(X_n \mathbf{1}_{|X_n|<A}\right)$ vers $X\mathbf{1}_{|X|<A}$.
- ii) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.
  - a) La suite $(X_n, n \geq 1)$ est uniformément intégrable.
  - b) La suite $(X_n, n \geq 1)$ converge vers $X$ dans $L^1(\mathbb{P})$.
  - c) On a $X \in L^1(\mathbb{P})$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|X|$.

  Pour montrer a) $\Rightarrow$ b), on montrera d'abord à l'aide du 1. que $\mathbb{E}|X| < \infty$, puis on utilisera i). Pour montrer c) $\Rightarrow$ a), on utilisera i).

□

# Feuille 2

**Exercice** 1.

0. Soit $A$, $B$ deux sous-ensembles mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mid \mathbf{1}_B]$.

Soit $(X, Y)$ un vecteur gaussien centré.

1. Montrer qu'une version de la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y$ est gaussienne. Calculer sa moyenne et sa variance.

2. Calculer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $Y^2$.

3. En déduire $\mathbb{E}[f(X) \mid Y^2]$, où $f$ est une fonction bornée mesurable. □

**Exercice** 2.

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X$ est bornée. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Soit $\varphi$ une fonction convexe de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On peut vérifier que $\varphi$ est l'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de fonctions affines (i.e. il existe une famille dénombrable $(A_n, n \geq 1)$ de fonctions affines telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = \sup_{n \geq 1} A(x)$). Montrer que p.s.

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{B}].$$

Retrouver ce résultat en utilisant l'inégalité de Jensen (i.e. pour toute variable aléatoire $Y$ définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}')$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\varphi(\mathbb{E}'[Y]) \leq \mathbb{E}'[\varphi(Y)]$) et l'existence d'une version régulière de la loi conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{B}$. □

**Exercice** 3.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d et de carré intégrable. Soit $\tau$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de carré intégrable et indépendantes des v.a.r. précédentes. On note $S_\tau = X_1 + \cdots + X_\tau$.

1. Calculer la moyenne conditionnelle $\mathbb{E}[S_\tau \mid \tau]$ et $\mathbb{E}\left[(S_\tau - \mathbb{E}[S_\tau \mid \tau])^2 \mid \tau\right]$, la variance conditionnelle.

2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[S_\tau]$ et de $\mathbb{E}\left[(S_\tau - \mathbb{E}[S_\tau])^2\right]$. □

**Exercice** 4.

1. Soit $X$, $Y$, deux v.a.r. finies définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$X \in \sigma(Y) \iff \text{il existe une fonction mesurable } \varphi \text{ telle que } X = \varphi(Y).$$

Pour le sens direct, on considèrera les v.a.r.

$$X_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{p}{2^n} \mathbf{1}_{\frac{p}{2^n} < X \leq \frac{p+1}{2^n}}.$$

On utilisera également le fait que si l'événement $B$ est $\sigma(Y)$-mesurable, alors il existe un borélien $A \subset \mathbb{R}$ tel que $B = Y^{-1}(A)$.

2. On suppose $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables telles que $\mathbb{E}[f(Y)^2] < \infty$. Vérifier qu'il existe une fonction $f_0 \in \mathcal{B}$ telle que $f_0(Y) = \mathbb{E}[X \mid Y]$ p.s. (on utilisera les résultats de l'exercice 2). Montrer que $\inf_{f \in \mathcal{B}} \mathbb{E}\left[(X - f(Y))^2\right]$ est atteint pour $f = f_0$. □

**Exercice** 5.

1. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d. telle que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Montrer que p.s.

$$\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_2 \mid X_1 + X_2] = [X_1 + X_2]/2.$$

2. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. En déduire que p.s.

$$\mathbb{E}[X_1 \mid \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)] = S_n/n.$$

□

**Exercice** 6.

Soit $(X_i, i \in I)$ une famille, pas forcément dénombrable, de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que la famille $(X_i, i \in I)$ est uniformémént intégrable si on a

$$\lim_{A \to \infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbf{1}_{|X_i| \geq A}\right] = 0.$$

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) < \delta$, alors on a $\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_B] \leq \varepsilon$ pour tout $i \in I$.

2. Soit $X$ une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, intégrable. Remarquer que $X$ est uniformément intégrable. Soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Majorer, en utilisant l'exercice 2,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]| \geq A}\right].$$

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]| \mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]| \geq A}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X| \mathbf{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]| \geq A}\right].$$

Déduire du 1. que la famille de v.a.r. $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$, où $\mathcal{F}$ parcourt l'ensemble des sous-tribus de $\mathcal{A}$ est uniformément intégrable. □

# Feuille 3

**Exercice** 1.

On considère un processus de Markov homogène en temps $X$ à espace d'état dénombrable, issu de $X_0 = j$ sous $\mathbb{P}_j$. On définit les v.a.r.

$$U_n = \begin{cases} 1 \text{ si } X_n = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $B \in \mathcal{B}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$ et $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}_j[(U_{n+1}, \dots) \in B \mid U_n = 1, U_{n-1} = s_{n-1}, \dots, U_1 = s_1] = \mathbb{P}_j[(U_1, \dots) \in B].$$

On dit que $U$ est un processus de renouvellement.

2. On note $F_n = \{U_n = 1, U_{n+k} = 0, \quad \forall k \geq 1\}$ et $F_0 = \{U_k = 0, \quad \forall k \geq 1\}$. Montrer que

$$1 - \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_j[F_n].$$

3. Montrer que $\mathbb{P}_j[F_n] = \mathbb{P}_j[F_0]\mathbb{P}_j[U_n = 1]$.

On note $G = \cup_{n \geq 1} \{X_n = j\}$.

4. Déduire de 2 et 3 que

$$\mathbb{P}_j[G] = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] = 1 \\ \displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j[X_n = j] = \infty \end{cases}$$

5. Déduire de 2 et 3 que

$$\mathbb{P}_j[G] < 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] = 0 \\ \displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j[X_n = j] < \infty \end{cases}$$

□

**Exercice** 2.

Soit la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$: $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, où les v.a.r. $(Y_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1/2.$$

1. Calculer $\mathbb{P}[S_{2n} = 0]$. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$ pour $n$ grand) les questions 5 et 4 de l'exercice 1, montrer que $\mathbb{P}[S_n = 0 \text{ infiniment souvent}] = 1$.

2. On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^2$: $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où les v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[X_1 = (0,1)] = \mathbb{P}[X_1 = (0,-1)] = \mathbb{P}[X_1 = (1,0)] = \mathbb{P}[X_1 = (-1,0)] = 1/4.$$

Calculer $\mathbb{P}[S_{2n} = 0]$. En utilisant la même méthode que pour la question 1, montrer que 0 est récurrent pour la chaîne de Markov $S$. On pourra utiliser que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ pour calculer $\sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{[k!(n-k)!]^2}$.
Remarque. En fait on montre que 0 est transient pour la marche aléatoire symétrique en dimension $d \geq 3$. □

**Exercice** 3.

On considère l'espace à deux états $E = \{a, b\}$. La matrice markovienne la plus générale s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

1. Condition pour que la chaîne de Markov ne soit pas périodique.
2. Condition pour que la chaîne de Markov soit irréductible.
3. On suppose que la chaîne est irréductible. Calculer la probabilité invariante.
4. On suppose que la chaîne de Markov associée à $P$ est irréductible. Montrer que les puissances de $P$ s'écrivent

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix} + \gamma^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -1+p & 1-p \end{pmatrix}.$$

où on déterminera $p$ et $\gamma$.

5. On suppose que la chaîne de Markov est apériodique et irréductible. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \pi_0 P^n$ est indépendant de la loi initiale $\pi_0$. □

**Exercice** 4.

Soit $(X_{2n+1}, n \geq 0)$ une suite de v.a.r. i.i.d telles que

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2.$$

On définit pour tout $n \geq 1$, $X_{2n} = X_{2n-1}X_{2n+1}$.

1. Vérifier que les v.a.r. $X_{2n}, n \geq 1$ sont i.i.d. Donner leur loi.
2. Montrer que $X_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes.
3. Déduire de 1 et 2 que les v.a.r. $X_n, n \geq 1$ sont indépendantes deux à deux.
4. Calculer $\mathbb{P}[X_{m+n} = j \mid X_m = i]$ pour tout $n \geq 1$ , $i, j = \pm 1$. En déduire que les équations de Chapman-Kolmogorov sont satisfaites.
5. Calculer $\mathbb{P}[X_{2n+1} = 1 \mid X_{2n} = -1, X_{2n-1} = 1]$. En déduire que $X$ n'est pas une chaîne de Markov.
6. Montrer en revanche que $(Z_n = (X_n, X_{n+1}), n \geq 1)$ est une chaîne de Markov non homogène à valeurs dans $\{-1, 1\}^2$. On déterminera la matrice de transition en distinguant suivant que $n$ est pair ou impair. □

**Exercice** 5.

Soit $X$ une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable. Soit $n \geq 1$. On note $p_{i,j}(n) = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i]$, la probabilité de transition de l'état $i$ à l'état $j$ en $n$ étapes. Par convention on pose $p_{i,i}(0) = 1$ et $p_{i,j}(0) = 0$. On note

$$l_{i,j}(n) = \mathbb{P}[X_n = j; X_k \neq i, 1 \leq k < n \mid X_0 = i],$$

la probabilité partant de l'état $i$ d'atteindre l'état $j$ en $n$ étapes, sans repasser par l'état $i$. On note également pour $i \neq j$,

$$f_{i,j}(n) = \mathbb{P}[X_n = j; X_k \neq j, 1 \leq k < n \mid X_0 = i],$$

la probabilité partant de l'état $i$ d'atteindre pour la première fois l'état $j$ en $n$ étapes. On introduit les fonctions suivantes définies sur $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} P_{i,j}(s) &= \sum_{n \geq 0} p_{i,j}(n) s^n \\ L_{i,j}(s) &= \sum_{n \geq 1} l_{i,j}(n) s^n \\ F_{i,j}(s) &= \sum_{n \geq 1} f_{i,j}(n) s^n. \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $i \neq j$,

$$\begin{aligned} P_{i,j}(s) &= P_{i,i}(s) L_{i,j}(s) \\ P_{i,j}(s) &= P_{j,j}(s) F_{i,j}(s) \end{aligned}$$

2. On défini le premier temps d'atteinte de $j$ par $\tau = \inf\{k; X_k = j\}$ et le dernier temps de passage par $\tau'_n = [n - \sup_{k \leq n}\{X_k = i\}]\mathbf{1}_{\{X_n = j\}}$. Montrer que les variables aléatoires $\tau'_n$ ne sont pas des temps d'arrêt. Déduire du 1 que si $P_{i,i} = P_{j,j}$, alors on a $\mathbb{P}[\tau = k] = \mathbb{P}[\tau'_n = k]$ pour tout $n \geq k$. Donc de manière imagée le premier temps de passage et le dernier temps de passage "ont même loi".

3. Donner un exemple de chaîne de Markov à espace d'état dénombrable vérifiant $P_{j,j} = P_{i,i}$ pour tout $i$ et $j$. □

**Exercice 6.**

On considère une marche aléatoire symétrique $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où les v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2.$$

On considère la famille de variables aléatoires

$$Y_n = \sup\{k \leq n; S_{2k} = 0\}, \quad n \geq 1.$$

On désire évaluer la valeur $\mathbb{P}[Y_n = k]$ pour $k \leq n$. Dans le jeu de pile ou face, la v.a.r. $Y_n$ est le dernier instant où les deux joueurs sont à égalité.

1. Calculer $\mathbb{P}[S_m = b]$.

2. On admet la formule suivante:

$$\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots; S_m \neq 0; S_m = b] = \frac{|b|}{m} \mathbb{P}[S_m = b].$$

Calculer $\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots; S_{2n} \neq 0]$. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{2k}{(n+k)(n-k)} = \frac{1}{n-k-1} - \frac{1}{n+k-1}.$$

3. En déduire que $\mathbb{P}[S_1 \neq 0; \ldots ; S_{2n} \neq 0] = \mathbb{P}[S_{2n} = 0]$.

4. En utilisant le résultat précédent montrer que

$$\mathbb{P}[Y_n = k] = \mathbb{P}[S_{2k} = 0]\mathbb{P}[S_{2n-2k} = 0].$$

Remarquer que contrairement à l'intuition la loi du dernier zéro avant $2n$ est symétrique par rapport à $n$.

5. Soit $0 < y < x < 1$. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$ pour $n$ grand), montrer que pour $n$ grand

$$\mathbb{P}[ny \leq Y_n \leq nx] \sim \frac{1}{\pi}\int_y^x \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,du.$$

6. En déduire que la suite $(Y_n/n, n \geq 1)$ converge en loi.

7. Montrer que asymptotiquement, avec probabilité $1/2$,

$$Y_n/n \in \left[0, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 1\right].$$

□

**Exercice** 7.

1. Soit $Y$ une chaîne de Markov à espace d'état discret. On suppose que

$$\mathbb{P}_j[Y_n = j \text{ infiniment souvent}] = 0.$$

On note $\tau = \sup\{n; Y_n = j\}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_j[\tau = n] = 1$. En déduire que

$$\mathbb{P}_j[Y_n \neq j \quad \forall n \geq 1] = \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_j[Y_n = j]}.$$

On considère maintenant $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d. telles que

$$P[X_n = 1] = p, \quad P[X_n = -1] = q = 1 - p.$$

On définit $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Vérifier que $(S_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose $p \neq 1/2$.

2. Évaluer $\mathbb{P}[S_n = 0]$.

3. Écrire la fonction $f(x) = [1-x]^{-1/2}$ sous forme d'une série entière.

4. En déduire que $\mathbb{P}[S_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1] = |p - q|$. □

**Exercice** 8.

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène à espace d'état dénombrable $E$. On note $T_y = \inf\{n \geq 1; X_n = y\}$. Si $x$ et $y$ sont deux états distincts, on note

$$\rho_{xy} = \mathbb{P}[T_y < \infty \mid X_0 = x].$$

1. Montrer que

$$\rho_{xy} > 0 \Longleftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ tel que } \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] > 0.$$

On suppose $\rho_{xy} > 0$. Soit $n_0 = \inf\{n; \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] > 0\}$.

2. Montrer qu'il existe des états $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$ tels que

$$p(x, x_1)p(x_1, x_2)\cdots p(x_{n_0-1}, y) > 0, \text{ où } p(x, z) = \mathbb{P}[X_1 = z \mid X_0 = x].$$

Montrer que ces états sont distincts.

3. Si $E$ est fini et de cardinal $d$. Montrer alors que $n_0 \leq d-1$ et $\mathbb{P}[T_y \leq d-1 \mid X_0 = x] > 0$.

□

# Feuille 4

**Exercice** 1.

Un petit restaurateur qui ne possède que trois tables, remarque que si son restaurant est vide alors la loi d'arrivée du premier client est une loi exponentielle de paramètre 1. Le temps de service d'un client est une loi exponentielle de paramètre 1. Mais dès qu'un client est installé, sa présence attire d'autre clients, et une voire deux tables en même temps, s'il en reste deux, peuvent se remplir. Les temps d'arrivée suivent toujours des lois exponentielles de paramètre 1. Enfin si toutes les tables sont occupées, le restaurateur presse le service et une ou deux tables en même temps peuvent se libérer suivant des temps exponentiels de paramètre 1.

On modélise l'évolution du nombre de tables occupées à l'aide d'une chaîne de Markov $X$ à temps continu sur l'espace d'état $E = \{0, 1, 2, 3\}$. On note $P_t$ le semi-groupe de transition du processus $X$ et $G$ le générateur infinitésimal ($P_t = \mathrm{e}^{tG}$).

1. Montrer que $G$ s'écrit

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. On note $T = \inf\{t \geq 0; X_t \neq X_0\}$, le premier instant où la chaîne change d'état. Calculer $\mathbb{E}[T \mid X_0 = i]$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. On note $R = \inf\{t \geq 0; X_t = 3\}$, le premier instant où les trois tables sont occupées. On désire estimer $\mathbb{E}[R \mid X_0 = 0]$, le temps moyen pour que le restaurant initialement vide ait ses trois tables occupées. On note $b_i = \mathbb{E}[R \mid X_0 = i]$. Montrer que $b_3 = 0$ et que pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$

$$b_i = \mathbb{E}[T \mid X_0 = i] + \sum_{j \neq i} b_j \mathbb{P}[X_T = j \mid X_0 = i].$$

4. En déduire la valeur de $b_0$.
5. Montrer que $G = Q^{-1}DQ$, où $D$ est une matrice diagonale.
6. Calculer le semi-groupe de transition $P_t = \mathrm{e}^{tG}$.
7. Calculer $\lim_{t\to\infty} P_t$.
8. En déduire la probabilité invariante $\pi_0$.
9. Quel est la limite quand $t \to \infty$ du taux moyen de remplissage du restaurant? □

**Exercice** 2.

On note $G$ le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov $X$ à temps continu sur un espace d'état dénombrable $E$. On peut considérer $G$ comme une matrice $G = (g(x, y), (x, y) \in E^2)$. On note $P_t$ le semi-groupe de transition du processus $X$ ($P_t = \mathrm{e}^{tG}$). On rappelle que si $f$ est une fonction mesurable positive définie sur $E$, $P_t f(x) = \sum_{y \in E} f(y) p_t(x, y)$ où

$$p_t(x, y) = \mathbb{P}\left[X_t = y \mid X_0 = x\right].$$

On suppose que $||G|| = \sup_{x\in E} \sum_{y\in E} |g(x, y)| < \infty$.

1. Montrer que $||G^n|| \leq ||G||^n$ et que $\left|\left|\mathrm{e}^{tG}\right|\right| \leq \mathrm{e}^{t\,||G||}$. En déduire que

$$P_t = I + tG + t\varepsilon_t,$$

où $\lim_{t\to 0} ||\varepsilon_t|| = 0$.

2. Faire un développement de $p_t(x,y)$ à l'ordre $o(t)$.

3. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq y$, alors $g(x,y) \geq 0$. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y\in E} g(x,y) = 0.$$

4. Soit $\pi$ une probabilité sur $E$. L'expression $\pi P_t = \pi$ signifie que $\sum_{x\in E} \pi(x) p_t(x,y) = \pi(y)$ pour tout $y \in E$. De même $\pi G = 0$ signifie que $\sum_{x\in E} \pi(x) g(x,y) = 0$. Montrer que

$$\pi P_t = \pi, \quad \forall t \geq 0 \iff \pi G = 0.$$

Si l'une des conditions ci-dessus est vérifiée, on dit que $\pi$ est la probabilité invariante du processus. □

**Exercice** 3.

On modélise l'évolution d'une population, en fait du cardinal de la population, à l'aide d'une chaîne de Markov $X$ à temps continu sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante.

$$\mathbb{P}[X_{t+h} = n + m \mid X_t = n] = \begin{cases} \lambda_n h + o(h) \text{ si } m = 1 \\ \mu_n h + o(h) \text{ si } m = -1 \\ \qquad o(h) \text{ si } |m| > 1 \end{cases}$$

On suppose $\lambda_0 \geq 0$, $\mu_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n > 0$, $\mu_n > 0$.

1. Interpréter les valeurs $\lambda_n$ et $\mu_n$.

2. Déterminer le générateur infinitésimal $G$ de la chaîne de Markov ($P_t = \mathrm{e}^{tG}$).

3. Donner la loi de $T(t) = \inf \{s \geq t; X_s \neq X_t\}$ conditionnellement à $X(t) = n$.

4. Calculer $\mathbb{P}\left[X_{T(t)} = n + m \mid X_t = n\right]$.

5. En utilisant la question 4. de l'exercice 2, donner une condition suffisante pour l'existence d'une probabilité invariante $\pi$. Calculer alors cette probabilité.

6. On considère le modèle suivant pour l'évolution de la population. À $t$ fixé, deux phénomènes sont en concurrence. Soit un immigrant arrive (à un temps exponentiel de paramètre $\lambda$), soit un membre de la population meurt (à un temps exponentiel de paramètre $\mu$). Calculer $\mathbb{P}\left[X_{T(t)} = n + m \mid X_t = n\right]$. En déduire les valeurs de $\lambda_n$ et $\mu_n$.

7. Montrer que la probabilité invariante est une loi de Poisson de paramètre $\rho = \lambda/\mu$.

8. On suppose que $X_0$ est distribué suivant la probabilité invariante $\pi$. Calculer le nombre moyen de personnes dans la population à l'instant $t > 0$. □

**Exercice** 4.

On reprend les résultats et les notations de l'exercice 2. On note

$$G = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix},$$

où $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$, le générateur infinitésimal le plus général sur l'espace à deux états $E = \{a,b\}$.

1. Sous quelles conditions la chaîne de Markov à temps continu associé à $G$ est-elle constante (et donc déterministe)?

2. On suppose $\mu + \lambda > 0$. Écrire $G = Q^{-1}DQ$ où $D$ est une matrice diagonale. Montrer que

$$P_t = \frac{1}{\mu + \lambda} \begin{pmatrix} \lambda + \mu h(t) & \mu(1 - h(t)) \\ \lambda(1 - h(t)) & \mu + \lambda h(t) \end{pmatrix},$$

où $h$ est une fonction que l'on calculera explicitement.

3. Calculer $\mathbb{P}[X_t = b \mid X_{2t} = a, X_0 = a]$.
4. Calculer la probabilité invariante $\pi$ ($\pi P_t = \pi$).
5. Calculer la limite de $P_t$ quand $t$ tend vers $\infty$.
6. En déduire que $X_t$ converge en loi quand $t$ tend vers $\infty$. Donner la loi limite.
7. On note

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un semi-groupe de transition continu en temps $(P_t, t \geq 0)$ tel que $P_1 = P$ si et seulement si $1 \geq \alpha > 1/2$. On distinguera le cas $\alpha = 1$.

8. Montrer qu'alors le semi groupe $(P_t, t \geq 0)$ est unique et le calculer à l'aide de $\alpha$. □

# Feuille 5

**Exercice** 1.

On modélise, quand le trafic est fluide, les temps de passages des véhicules à l'aide d'un processus de Poisson.

1. On considère le trafic sur le périphérique intérieur au niveau de la porte d'Orléans, que l'on modélise donc à l'aide d'un processus de Poisson $N^P$ de paramètre $\lambda_P$. On modélise également le trafic sur la bretelle d'accès à l'aide d'un processus de Poisson $N^B$ de paramètre $\lambda_B$ indépendant du précédent. Montrer que le trafic après l'insertion de la bretelle d'accès, $(N_t = N_t^P + N_t^B, t \geq 0)$ est un processus de Poisson dont on déterminera le paramètre. Pour cela on calculera les transformées de Laplace des vecteurs

$$(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_{n-1}} - N_{t_n}) \quad 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n.$$

2. À la sortie suivante, chaque voiture qui passe a une probabilité $p$ d'emprunter la sortie et donc $1-p$ de rester sur le périphérique. Les destinations des voitures sont indépendantes. On note $N_t^S$ le nombre de voitures qui ont emprunté la sortie avant l'instant $t$, et $N_t^R$ le nombre de voitures qui sont restées sur le périphérique. On suppose que le nombre de voitures avant l'instant $t$, $N_t$, sur le périphérique avant la sortie est le processus de Poisson de la question précédente. On a $N_t = N_t^S + N_t^R$.

i) Calculer $\mathbb{P}\left[N_t^S = m, N_t^R = n\right]$. En déduire que $N_t^S$ et $N_t^R$ sont deux v.a.r. indépendantes dont on déterminera les lois.

ii) Soit $0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty$. Calculer la loi du vecteur

$$(N_{t_1}^S, N_{t_1}^R, N_{t_2}^S - N_{t_1}^S, N_{t_2}^R - N_{t_1}^R, \ldots, N_{t_k}^S - N_{t_{k-1}}^S, N_{t_k}^R - N_{t_{k-1}}^R).$$

En déduire que les v.a.r. sont indépendantes.

iii) En déduire que les deux processus $(N_t^S, t \geq 0)$ et $(N^R_,t \geq 0)$ sont des processus de Poisson indépendants dont on déterminera les paramètres.

$\square$

**Exercice** 2.

On modélise les temps de passage du métro à la station Saint Germain à l'aide d'un processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ de paramètre $\lambda$. On note $T_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}$ les temps successifs de passage des métro. On note $S(t) = \inf\{s \geq 0, N_s = N_{s+t} + 1\}$, le temps d'attente d'un métro après l'instant $t$, et $R(t) = t - \sup\{s \leq t, N_s = N_t - 1\}$ si $T_1 \geq t$, $R(t) = t$ sinon, le temps écoulé entre le dernier temps de passage d'un métro avant l'instant $t$ et $t$.

1. Calculer l'intervalle moyen entre deux métro $\mathbb{E}[T_1]$.
2. Calculer le temps moyen d'attente: $\mathbb{E}[S(t)]$.
3. Montrer que $R(t)$ et $S(t)$ sont deux v.a.r. indépendantes.
4. On désire calculer la loi de $R(t)$. On note $g(t,x) = \mathbb{P}[R(t) > x]$. Montrer, en distinguant suivant que $T_1 \geq t$ ou $T_1 < t$, et en utilisant la propriété forte de Markov à l'instant $T_1$ dans ce dernier cas, que

$$g(t,x) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbf{1}_{x<t} + \int_0^t \lambda \,\mathrm{e}^{-\lambda u} g(t-u, x) du.$$

Poser $f(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda t} g(t,x)$ et résoudre l'équation ci-dessus.

5. Déterminer la loi de $T_n$. Remarquer que

$$\{R(t) > x\} = \{T_1 \leq t, \exists n \geq 1 \text{ tel que } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ et } T_n - t > x\} \cup \{T_1 > t > x\},$$

et retrouver le résultat de la question précédente.

6. Montrer que $R(t)$ converge en loi quand $t \to \infty$.

7. Calculer $\mathbb{E}[R(t)]$. En déduire $\mathbb{E}[R(t)+S(t)]$, la valeur moyenne de l'intervalle entre deux métro qui encadre l'instant $t$. Donner la limite quand $t \to \infty$.

8. Interpréter et expliquer les résultats des questions 1 et 7. □

**Exercice** 3.

Soit un processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ de paramètre $\lambda$. On note $T_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}$ pour tout entier $n \geq 1$, $X_1 = T_1$, et pour tout entier $n \geq 2$ $X_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Calculer la loi de $(X_n, n \geq 1)$.

2. Calculer la loi de $T_1$ conditionnellement à $\{N_h = 1\}$.

3. Calculer $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n) \mid T_n \leq h < T_{n+1}]$.

4. Soit $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.r i.i.d., distribués suivant la loi uniforme sur $[0,h]$, $h > 0$. Montrer que presque sûrement, il existe une seule permutation $\sigma$ (aléatoire) telle que $Y_{\sigma(1)} < \ldots < Y_{\sigma(n)}$. On note $(Z_k, 1 \leq k \leq n)$ la suite de v.a.r définies par $Z_1 = Y_{\sigma(1)}$ et pour tout entier $2 \leq k \leq n$, $Z_k = Y_{\sigma(k)} - Y_{\sigma(k-1)}$. Soit $f$ une fonction positive mesurable défine sur $[0,h]$, calculer $\mathbb{E}[f(Z_1, \dots, Z_n)]$.

5. En déduire la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ conditionnellement à $\{N_h = n\}$. □

**Exercice** 4.

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda$.

1. Montrer que $N_n/n$, puis $N_t/t$ converge p.s. Calculer cette limite.

2. Étudier la convergence en loi de $(\frac{N_n - n\lambda}{\sqrt{n}}, n \geq 1)$.

3. Soit $(X_n, n \geq 1)$ et $(Z_n, n \geq 1)$ deux suites de v.a.r définies sur le même espace. On suppose que $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une v.a.r $X$ et que $(Z_n, n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0. Montrer que $(X_n + Z_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $X$.

4. En déduire que la suite $([N_t - t\lambda]/\sqrt{t}, t > 0)$ converge en loi.

On désire estimer $1/\lambda$ à l'aide d'un estimateur sans biais.

5. Calculer $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\theta N_t}\right]$ et $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\theta N_t} \mathbf{1}_{N_t > 0}\right]$.

6. En déduire

$$\mathbb{E}\left[\frac{t}{N_t + 1}\right] \text{ et } \mathbb{E}\left[\frac{t}{N_t}\mathbf{1}_{N_t > 0}\right].$$

7. En déduire que $\frac{t}{N_t+1}$ et $\frac{t}{N_t}\mathbf{1}_{N_t>0}$ sont des estimateurs biaisés de $1/\lambda$. On calculera le biais dans le premier cas, et on donnera un équivalent du biais quand $t \to \infty$ dans le second cas.

8. On note $T_k = \inf\{s; N_s \geq k\}$. Montrer que $(T_k/k, k \geq 1)$ converge p.s. et déterminer sa limite.

9. Étudier la convergence en loi de $([T_k - k/\lambda]/\sqrt{k}, k \geq 1)$. Donner un encadrement asymptotique (valable pour $k \to \infty$) de $1/\lambda$ à 95%.

□

# Feuille 5-bis

**Exercice** 1.

On suppose que le nombre d'appels à un standard téléphonique suit la loi d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

1. Que représente $\lambda$?

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois appels pendant la première heure? pendant la troisième heure?

3. On suppose que six appels sont arrivés pendant la première heure, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux appels pendant la deuxième heure?

4. La personne qui s'occupe du standard décide de partir déjeuner après le quinzième appel. Quel est le temps moyen que cette personne devra attendre avant de partir déjeuner? En utilisant la transformée de Laplace, montrer que la loi du $k$-ième appel est une loi gamma dont on précisera le paramètre.

5. On sait qu'il est arrivé huit appels pendant la première heure. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu cinq appels pendant la première heure?

6. On suppose qu'il est arrivé $k$ appels pendant les quatre premières heures. Quelle est la probabilité que $j$ appels exactement soient arrivés pendant la première heure? $\square$

**Exercice** 2.

Soit deux v.a.r. i.i.d. $X$ et $Y$ de loi $\nu$. On désire caractérisé les lois $\nu$ qui vérifient la propriété (P): "$\min(X, Y)$ a même loi que $X/2$".

1. Montrer les lois exponentielles vérifient (P).

2. Montrer que la loi $\delta_0$ vérifie (P).

3. On suppose que $\mathbb{P}[X = 0] < 1$. Montrer que $\mathbb{P}[X > x]^2 = \mathbb{P}[X > 2x]$.

4. Montrer par l'absurde que $\mathbb{P}[X > x] = 1$ pour tout $x < 0$.

5. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tous entiers $m > 0$ et $n > 0$, $\mathbb{P}[X > ma/n] = \mathrm{e}^{-m\lambda/n}$.

6. Conclure. $\square$

# Feuille 6

**Exercice** 1.

Face à des avaries informatiques fréquentes, le patron d'une entreprise décide de recruter un ingénieur système. Pour cela il remarque que le temps nécessaire pris par un ingénieur système pour résoudre un problème suit une loi exponentielle de paramètre $\mu_i$ qui est caractéristique du candidat $i$. Mais plus l'ingénieur est rapide, plus ses prétentions de salaires sont élevées. Afin de minimiser les coûts, le patron décide de recruter un ingénieur suffisamment rapide pour que le nombre de réparations en attente ne dépasse pas 3 avec 87,5% de chance. On modélise le processus d'interarrivée des pannes à l'aide de v.a.r. i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$. On note $X_t$ le nombre de pannes à l'instant $t$ qui n'ont pas été réparées par l'ingénieur ($\mu$).

1. Montrer que le processus $(X_t, t \geq 0)$ est une chaîne de Markov à temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on explicitera le générateur infinitésimal $G$. Calculer la loi de $T = \inf\{t \geq 0, X_t \neq X_0\}$.

2. On désire calculer si elle existe la probabilité invariante $\pi$ de la chaîne de Markov. (Si $X_0$ a pour loi $\pi$, pour tout entier $n$ $\mathbb{P}[X_0 = n] = \pi_n$, alors pour tout $t \geq 0$, $X_t$ a pour loi $\pi$.) Montrer à l'aide de l'exercice 2 de la feuille 4 que cette probabilité $\pi$ existe si et seulement si

$$\pi_1 - \rho\pi_0 = 0$$
$$\pi_{n+1} - (1+\rho)\pi_n + \rho\pi_{n-1} = 0 \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où $\rho = \lambda/\mu$.

3. En déduire que si $\rho \geq 1$, il n'existe pas de probabilité invariante. Interpréter.

4. Calculer la probabilité invariante si $\rho < 1$.

5. On suppose $\rho < 1$. On suppose également que à l'instant $t = 0$, le nombre de pannes est distribué suivant la loi $\pi$. Déterminer la valeur minimale de $\mu$ pour que à l'instant $t > 0$, le nombre de pannes non réparées soit inférieur strictement à 3 avec 87.5% de chance.

6. Quelle devra donc être la caractéristique de l'ingénieur système recruté?

7. L'ingénieur système travaille depuis un an dans l'entreprise. L'ordinateur du patron vient de tomber en panne. Le patron est d'une humeur excellente si l'ingénieur système entreprend la réparation tout de suite. Or ce dernier traite les problèmes les uns après les autres. Est-ce le moment de demander une augmentation au patron? □

**Exercice** 2.

Un cuisinier méticuleux remarque que quand il saupoudre de poivre le boeuf bourguignon, la répartition aléatoire des grains de poivre à la surface du plat est distribuée suivant un processus de Poisson ponctuel d'intensité $\lambda(dx, dy)$. S'il ne remue pas le boeuf bourguignon, alors les grains de poivre diffusent verticalement à vitesse constante. On suppose que les vitesses sont aléatoires indépendantes et de loi la loi exponentielle de paramètre $\theta$.

1. Calculer, en utilisant la transformée de Laplace, la loi de la répartition des grains de poivre à l'instant $t > 0$ (on notera $h$ la profondeur du plat).

2. On suppose $\iint \lambda(dxdy) < \infty$. Est-ce réaliste?

3. On suppose de plus que la répartition des grains de poivre n'est pas altérée lors du service. Le dernier servi reçoit tout le poivre déposé au fond du plat. Montrer que la loi du nombre de grain de poivre contenu dans l'assiette de ce convive est une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. □

**Exercice** 3.

Une personne possède une parcelle de terrain (un carré de longueur 1 i.e. $[0,1]^2$) dans les causses du Larzac. Par suite de l'érosion en terrain calcaire, on constate la formation de cavités sous-terraines, qui peuvent s'effondrer. On modélise l'apparition des effondrements de la manière suivante. Au cours d'une période de 100 ans, les effondrements sont en fait des trous de rayon constant $r$, et dont les centres sont distribués suivant un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda \mathbf{1}_{(x,y)\in[0,1]^2} dxdy$ où $\lambda > 0$.

On désire calculer un minorant et un majorant pour la probabilité $p$ de l'effondrement de toute la parcelle en 100 ans.

1. Calculer le nombre minimal de disques de rayon $r$ nécessaires pour recouvrir la parcelle (i.e. $[0,1]^2$). En déduire un minorant de $p$ (on tiendra compte des effets de bords).

2. On suppose $\sqrt{2}r \leq 1$. On décompose la parcelle en petites parcelles carrées de longueur $1/[1/\sqrt{2}r]$, où $[x]$ désigne la partie entière de $x$. Montrer que pour que toute la parcelle $[0,1]^2$ soit effondrée, il faut que chaque petite parcelle contienne le centre d'un trou. En déduire un majorant de $p$.

3. Que pensez vous de ces bornes (regarder $r \to 0$)? De manière générale l'évaluation de $p$ est très difficile. □

**Exercice** 4.

On considère un grillage régulier formé de droites d'équation $x = n$ et $y = m$ où $n$ et $m$ sont des entiers relatifs. On désire utiliser ce grillage comme moustiquaire, et donc empêcher des insectes de pénétrer dans une enceinte. On modélise les insectes par des disques de rayon $r$. On suppose que les centres des disques sont distribués suivant un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda dxdy$, où $\lambda > 0$. Si un insecte touche la moustiquaire, il prend peur et fait demi-tour.

Montrer que les insectes (en fait les centres des disques) qui passent au travers de la moustiquaire et ceux qui font demi-tour sont distribués suivant deux processus ponctuels de Poisson indépendants dont on déterminera les intensités. □

**Exercice** 5.

Vous êtes convié au jeu de la roue de la fortune. Le jeu est gratuit. Vous pouvez cessez de jouer à tout instant et partir ainsi avec vos gains. La roue comporte douze cases. Sur la première est marqué 100F, la deuxième 200F,..., la onzième 1100F et sur la douzième Faillite. Chaque case à la même chance de sortir. Tous les tirages sont indépendants. Enfin à chaque tirage vous remportez la mise inscrite sur la case, sauf si vous faites faillite, auquel cas on vous reprend tous vos gains précédents et vous êtes expulsé du jeu. Et il n'y aura pas d'autre invitation. On désire construire une stratégie optimale, c'est à dire décider à l'étape $n$ s'il faut sortir du jeu et prendre les gains accumulés, ou s'il faut encore jouer et donc risquer de tout perdre. Le critère que l'on cherche à optimiser c'est le gain moyen.

1. On ne considère pas pour l'instant les problèmes d'optimisation. On note $X_n$ le gain à l'étape $n$. Montrer que $(X_n, n \geq 1)$ est une chaîne de Markov dont on déterminera l'espace d'état $E$ et les probabilités de transition $(p(x,y),\ (x,y) \in E)$. Vérifier que 0 est un état absorbant. et que p.s. $\inf\{n; X_n = 0\} < \infty$.

2. Se donner une stratégie revient à se donner un temps $T$ aléatoire auquel on arrête la chaîne $X$. Expliquer intuitivement pourquoi si le jeu n'est pas biaisé, les stratégies acceptables sont des temps d'arrêt.

3. On détermine la valeur de l'état $x$, $v(x)$ comme étant le gain moyen assuré par la

stratégie maximale. Cela revient à dire que

$$v(x) = \sup_{T \in \tau} \mathbb{E}[X_T \mid X_0 = x],$$

où $\tau$ est l'ensemble des temps d'arrêt fini de la chaîne de Markov $X$.

Monter que $v(x) \geq x$ et, en utilisant la propriété forte de Markov, que $v(x) \geq Pv(x) = \sum_{y \in E} p(x,y)v(y)$.

4. En fait on peut montrer que $v(x) = \max\{x, Pv(x)\}$ et que $v(x) = x$ pour tout $x > x_0 = \sup\{x \geq 0; \mathbb{E}[X_1 \mid X_0 = x] > x\}$. Que représente $x_0$. Calculer $v(x_0)$.

5. On note $E_1 = \{x \in E; v(x) > x\}$ et $E_2 = E \cap E_1^c$. On introduit le temps d'arrêt $T_1 = \inf\{n \geq 0; X_n \in E_2\}$ et la fonction $v_1(x) = \mathbb{E}[X_{T_1} \mid X_0 = x]$. En remarquant que sur $\{T_1 \geq 1\}$, $T_1 = 1 + \inf\{n \geq 0; X_{n+1} \in E_2\}$, en déduire que $v = v_1$. Quelle est la signification de $E_2$.

6. Quelle est la stratégie retenue. Quel est le gain moyen du joueur assuré par cette stratégie? □

# Feuille 7

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On note $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ où $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, la filtration engendrée par le mouvement brownien.

**Exercice** 1.

1. Calculer :

$$\text{a) } \mathbb{E}[B_s B_t] \qquad \text{b) } \mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_s\right] \qquad \text{c) } \mathbb{E}[B_t^n], \quad n \geq 1.$$

On pourra utiliser un développement en série entière de l'exponentielle pour calculer c) après avoir démontrer que $\mathbb{E}\left[e^{\lambda |B_t|}\right] < \infty$ .

2. Calculer, en utilisant le fait que $(B_t, B_{t+h}, B_{t+h+s})$ est un vecteur gaussien, la loi conditionnelle de $B_{t+h}$ sachant $(B_t, B_{t+h+s})$. Comparer pour $f$ une fonction positive mesurable

$$\mathbb{E}[f(B_{t+h}) \mid B_t, B_{t+h+s}] \quad \text{et} \quad \int dz\, f(z) p_h(B_t, z) p_s(z, B_{t+h+s}) / p_{h+s}(B_t, B_{t+h+s}).$$

où $p_u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-(x-y)^2/2u}$. Interpréter.

3. Calculer $\mathbb{P}[B_2 > 0, B_1 > 0]$. Les événements $\{B_2 > 0\}$ et $\{B_1 > 0\}$ sont-ils indépendants? □

**Exercice** 2.

Soient $\nu_1$,$\nu_2$ deux mesures finies sur $\mathbb{R}^+$ à support dans $[0, 1]$. On note $X_j = \int_0^1 B_s \nu_j(ds)$.

1. Montrer que p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[B_{(k+1)/n} - B_{k/n}\right] \nu_j([0, k/n)) = X_j.$$

2. Calculer la transformée de Fourier du vecteur $(X_1, X_2)$.

3. En déduire que $(X_1, X_2)$ est un vecteur gaussien dont on déterminera les caractéristiques. □

**Exercice** 3.

Soit $0 \leq a < b < \infty$ fixés. Soit $\tau$ une subdivision finie de $[a, b]$: $\tau = (t_0, \dots, t_n)$ où $a = t_0 < \cdots < t_n = b$. Le pas $\Delta(\tau)$ de la subdivision $\tau$ est $\Delta(\tau) = \sup\{t_{i+1} - t_i, 0 \leq i < n\}$. Enfin on note $X_\tau = \sum_{i=1}^n [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2$. Soit $(\tau_k, k \geq 1)$ une suite de subdivisions dont le pas tend vers zéro.

1. Montrer que la suite $(X_{\tau_k}, k \geq 1)$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $b - a$.

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(k_l, l \geq 1)$ telle que la suite $(X_{\tau_{k_l}}, l \geq 1)$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers $b - a$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déduire de la question précédente que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\sup_{(s,t)\in[a,b]^2,\, s\neq t} \frac{|B_s - B_t|}{(s - t)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = \infty.$$

□

**Exercice** 4.

Soit $a > 0$. On note le temps d'arrêt $T = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$ le premier instant où le mouvement brownien $B$ atteint $a$. On rappelle que $(B_{T+s} - B_T, s \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0 indépendant de $T$.

1. Montrer, en utilisant la propriété forte de Markov à l'instant $T$ que

$$\mathbb{P}\left[T < t, B_t - B_T \leq 0\right] = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left[T < t\right].$$

2. On note $S_t = \sup\{B_u; u \leq t\}$. Calculer $\mathbb{P}[S_t > a, B_t \leq a]$. De la même manière calculer $\mathbb{P}[B_t > a] = \mathbb{P}[S_t > a, B_t > a]$.

3. Calculer $\mathbb{P}[S_t > a]$. En déduire que $S_t$ et $|B_t|$ ont même loi sous $\mathbb{P}$. Les deux processus $(S_t, t \geq 0)$ et $(|B_t|, t \geq 0)$ ont-ils même loi ?

4. Calculer à l'aide d'une intégration par partie la densité de la loi de $T$ sous $\mathbb{P}$. Calculer $\mathbb{E}[T]$. Conclusion. □

**Exercice 5.**

On note $X_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{e}^{-B_t^2/2(1-t)}$ pour $t \in [0, 1)$.

1. Soit $0 < t+s < 1$. Calculer $\mathbb{E}[X_{t+s} \mid \mathcal{F}_t]$. En déduire que $(X_t, t < 1)$ est une martingale.
2. En déduire $\mathbb{E}[X_t]$ pour tout $t < 1$.
3. Montrer que p.s. $\lim_{t \to 1} X_t = 0$.
4. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème d'arrêt? □

**Exercice 6.**

1. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{n \to \infty} B_n/n = 0.$$

2. On rappelle que, à $t$ fixé, sous $\mathbb{P}$, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ a même loi que $|B_t|$. On considère $M_n = \sup\{|B_t - B_n|; n \leq t \leq n+1\}$. Majorer

$$\mathbb{P}[M_n \geq 2\sqrt{\ln n}].$$

En déduire que $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n \to \infty} M_n/n = 0$.

3. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{t \to \infty} B_t/t = 0.$$

4. On note $Z_0 = 0$ et $Z_t = tB_{1/t}$. Montrer que le vecteur $(Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}})$, où $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, est un vecteur gaussien dont on déterminera les caractéristiques. En déduire que $(Z_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien. □

**Exercice 7.**

On désire évaluer $\mathbb{P}[\forall s \in [1, t], B_s \neq 0]$.

1. On rappelle que, à $t$ fixé, sous $\mathbb{P}$, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ a même loi que $|B_t|$. Soit $t > 1$. En déduire en utilisant la propriété de Markov à l'instant 1, que

$$\mathbf{1}_{\{B_1 \leq 0\}}\mathbb{P}[\exists s \in [1, t],\ \text{tel que } B_s = 0 \mid B_1] = \mathbf{1}_{\{B_1 \geq 0\}}\mathbb{P}[\left|B'_{t-1}\right| \leq B_1 \mid B_1],$$

où $(B'_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $(B_t, t \geq 0)$.

2. Montrer que

$$\mathbb{P}[\exists s \in [1,t], \text{ tel que } B_s = 0] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{z/\sqrt{t-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{-(z^2+y^2)/2} \, dy.$$

3. Utiliser les coordonnées polaires pour calculer

$$\mathbb{P}[\forall s \in [1,t], B_s \neq 0]$$

□

# Feuille 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ où $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, la filtration engendrée par le mouvement brownien. On rappelle la formule d'Itô pour $F \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$: pour tout $t > s \geq 0$, p.s.

$$F(t, B_t) = F(s, B_s) + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, B_u) dB_u + \int_s^t \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(u, B_u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, B_u) \right] du;$$

**Exercice** 1.

1. Montrer en utilisant le calcul d'Itô que les processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(Z_t, t \in [0, 1))$ sont des $\mathcal{F}$-martingales, où

$$\text{a) } X_t = \mathrm{e}^{\lambda B_t - t\lambda^2/2}, \qquad \text{b) } Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{e}^{-B_t^2/2(1-t)} \, .$$

2. Soit $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Montrer que $(M_t, t \geq 0)$, où

$$M_t = f(t, B_t) - \int_0^t \left( \frac{1}{2} \Delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (s, B_s) ds.$$

est une $\mathcal{F}$-martingale.

On définit la fonction sgn $(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0} - \mathbf{1}_{x<0}$.

3. Ecrire la formule d'Itô pour la fonction $f(B_t) = \mathrm{e}^{i\lambda \int_0^s \mathrm{sgn}\,(B_s) dB_s}$.
4. En déduire une équation aux dérivées partielle satisfaite par $\mathbb{E} f(B_t)$.
5. Résoudre cette e.d.p. et trouver ainsi la valeur de $\mathbb{E} f(B_t)$.
6. Montrer à l'aide de la formule d'Itô que $f(B_t)/\mathbb{E}[f(B_t)]$ est une $\mathcal{F}$-martingale.
7. On note $Z_t = \int_0^t \mathrm{sgn}\,(B_s) dB_s$. Montrer que $(Z_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien. □

**Exercice** 2.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux mouvements browniens indépendants définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{G}_t, t \geq 0), \mathbb{P})$. On note $Z_t = X_t^2 + Y_t^2$ et $R_t = Z_t^{1/2}$.

1. Calculer $dZ_t$. Calculer $\langle Z \rangle_t$.

On désire montrer la formule suivante : pour tout $t \geq 0$,

$$R_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s} + \int_0^t \frac{ds}{2R_s}. \tag{1}$$

2. Quel est le problème?
3. On considère les fonctions $f(x) = \sqrt{x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$ et $g_\varepsilon(x) = \sqrt{x} \mathbf{1}_{x \geq \varepsilon} + \left[a + b \, \mathrm{e}^{-cx}\right] \mathbf{1}_{x<\varepsilon}$. Calculer $a$, $b$ et $c$ pour que $g_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$.
4. Calculer $g_\varepsilon(Z_t)$ à l'aide de la formule d'Itô.
5. Montrer que $\mathbb{E} \int_0^t |f'(Z_s)| \, ds < \infty$ et que $\mathbb{E} \int_0^t |f''(Z_s)| \, d\langle Z \rangle_s < \infty$.
6. Montrer que $2 \int_0^t g'_\varepsilon(Z_s)[X_s dX_s + Y_s dY_s]$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s}$.
7. Montrer que $\int_0^t g'_\varepsilon(Z_s) ds$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t f'(Z_s) ds$ et que $\int_0^t g''_\varepsilon(Z_s) ds$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t f''(Z_s) d\langle Z \rangle_s$
8. Justifier (**??**). Calculer $\langle R \rangle_t$. □

**Exercice** 3.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux mouvements browniens indépendants définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{G}_t, t \geq 0), \mathbb{P})$. On note $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$, $Q_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s}$ et $N_t = \int_0^t \frac{-Y_s dX_s + X_s dY_s}{R_s}$

1. Montrer que $Q_t$ et $N_t$ sont bien définis.
2. Calculer $\langle Q \rangle_t$, $\langle N \rangle_t$ et $\langle Q, N \rangle_t$.
3. Calculer $\exp\left[i\lambda N_t + t\lambda^2/2\right]$ à l'aide de la formule d'Itô.
4. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{[i\lambda N_t + t\lambda^2/2]} \mid \mathcal{F}_s\right].$$

5. En déduire que $(N_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien adapté à la filtration $\mathcal{G}$.
6. Calculer à l'aide du calcul d'Itô pour tout $t > s \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{[i\lambda N_t + i\mu Q_t + t(\lambda^2 + \mu^2)/2]} \mid \mathcal{F}_s\right].$$

7. En déduire que $(N_t, t \geq 0)$ et $(Q_t, t \geq 0)$ sont deux mouvements browniens indépendants.
8. On pose $U_t = X_{t/5} + X_{2t/5}$ et $V_t = -3X_{t/5} + 2X_{2t/5}$. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\lambda U_t + i\mu V_t + t(\lambda^2 + \mu^2)/2}\right].$$

9. Après avoir calculer $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\lambda(U_{2t} - U_t)}\right]$, montrer que $(U_t, t \geq 0)$ n'est pas un mouvement brownien, même par rapport à la filtration $\mathcal{H}_s = \sigma(U_u, u \leq s)$.
10. Quelle est la propriété cruciale utilisée pour résoudre la question 6 qui n'est pas vérifiée par le processus $(U_t, t \geq 0)$. □

**Exercice** 4.

On reprend les notations de l'exercice précédent. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère $dA_t$, le double de l'aire balayée par le segment $[(0,0), (X_s, Y_s)]$ entre les instants $s$ et $s + ds$. Intuitivement $dA_s = R_s dN_s = -Y_s dX_s + X_s dY_s$. On désire étudier la loi de $A_t$ à un instant $t > 0$ fixé.

Soit $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ deux fonctions $C^1$. On pose

$$V_t = iuA_t - \frac{\alpha(t)}{2}[X_t^2 + Y_t^2] + \beta(t).$$

1. Calculer $dV_t$ et $\langle V \rangle_t$.
2. Calculer formellement $d\,\mathrm{e}^{V_t}$.
3. En déduire une condition nécessaire sur les fonctions $\alpha$ et $\beta$ pour que $\mathrm{e}^{V_t}$ soit une martingale.
4. Soit $t_0 > 0$ fixé. Montrer que $\alpha(t) = u \tanh[u(t_0 - t)]$ et $\beta(t) = -\log\cosh[u(t_0 - t)]$ satisfont les conditions ci-dessus.
5. Montrer que avec le choix ci-dessus, pour $t \in [0, t_0]$, $\left|\mathrm{e}^{V_t}\right| \leq 1$.
6. Justifier la formule obtenu à la question 2 pour $t \in [0, t_0]$.
7. En déduire que $\mathrm{e}^{V_t}$ est une martingale pour $t \in [0, t_0]$.
8. Calculer $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{V_{t_0}}\right]$, et en déduire $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuA_t}\right]$ pour tout $t > 0$.

Remarque. En fait on montre que la loi de $A_t$, à $t > 0$ fixé, possède une densité $f_t$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: $f_t(x) = [2t\cosh(\pi x/2t)]^{-1}$. □

# Feuille 8-bis

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ où $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, la filtration engendrée par le mouvement brownien. On rappelle la formule d'Itô pour $F \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$: pour tout $t > s \geq 0$, p.s.

$$F(t, B_t) = F(s, B_s) + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, B_u) dB_u + \int_s^t \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(u, B_u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, B_u) \right] du;$$

**Exercice** 1.

Soit $V(0)$ une v.a.r. gaussienne centrée de variance $\alpha > 0$, indépendante de $(B_t, t \geq 0)$. Soit $\beta > 0$. On considère le processus

$$V_t = \mathrm{e}^{-t\beta} V(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)\beta} \sigma dB_s.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[V(t)]$ et Cov $[V(s)V(t)]$.
2. Que peut-on dire de $V(t)$ quand $t \to \infty$ (convergence en loi, dans $L^2(\mathbb{P})$)?
3. Quelle condition faut-il imposer sur $V(0)$ pour que Cov $[V(s)V(t)]$ ne dépende que de $t - s$. Que peut-on dire de la loi de $V(t)$.
4. On définit alors le nouveau processus $Y_t = \int_0^t V_u du$. Montrer que si $\beta \to \infty$ et si $\alpha/\beta \to 1/2$, alors pour tout $0 = t_0 < \cdots < t_n$, le vecteur aléatoire $(Y_{t_1} - Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})$ converge en loi vers $(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$. □

**Exercice** 2.

Soit $\lambda > 0$. On note $\mathcal{E}_t^\lambda = \mathrm{e}^{i\lambda B_t + t\lambda^2/2}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}_t^\lambda$ est solution de

$$X_t = 1 + i\lambda \int_0^t X_t dB_s. \tag{2}$$

2. Soit $F \in C_b^{1,2}([0, T] + \times \mathbb{R})$ ($F$ est bornée et possède des dérivées bornées). On considère $Y_t = F(t, B_t)$. On suppose que $Y$ est solution de l'équation (**??**) pour $t \in [0, T]$. Calculer $Y_t (\mathcal{E}_t^\lambda)^{-1}$ à l'aide de la formule d'Itô.
3. Conclusion. □

**Exercice** 3.

On considère une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact. On désire montrer que pour $t > 0$, p.s.

$$f(B_t) - \mathbb{E}[f(B_t)] = \int_0^t \mathbb{E}[f'(B_t) \mid \mathcal{F}_s] dB_s. \tag{3}$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale du membre de droite.
2. Calculer $\mathbb{E}[f'(B_t) \mid \mathcal{F}_s]$ à l'aide de $f'(y) G(t - s, B_s - y)$ où $G(t, x) = \sqrt{2\pi t}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2/2t}$.
3. Justifier une intégration par partie en $dy$ pour $s \in [0, t - \varepsilon]$, où $\varepsilon \in (0, t)$.
4. On note $F(s, B_s) = G(t - s, B_s - y)$. Calculer $dF(s, B_s)$ pour tout $s \in [0, t - \varepsilon]$.
5. Calculer

$$\mathbb{E}\left[ \left( \int_0^{t-\varepsilon} \mathbb{E}[f'(B_t) \mid \mathcal{F}_s] dB_s - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, f(y) [F(t - \varepsilon, B_{t-\varepsilon}) - F(0, 0)] \right)^2 \right].$$

6. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)G(\varepsilon, B_{t-\varepsilon} - y) = f(B_t)$.

7. En déduire le (**??**). En déduire que $\int_0^t \mathbb{E}[f'(B_t) \mid \mathcal{F}_s]dB_s$ n'est pas une martingale si $f \neq 0$. $\square$

**Exercice** 4.

On note $L_t^0 = 1$. On construit par récurrence la suite de processus $L^n, n \geq 0)$, où pour tout $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 0$, $L_t^{n+1} = (n+1)\int_0^t L_s^n dB_s$.

1. Montrer par récurrence que $L_t^n$ a bien un sens pour tout $n \geq 1$ et $t \geq 0$. Calculer $\mathbb{E}[(L_t^n)^2]$.

2. Calculer $L^2$, $L^3$ et $L^4$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $L_t^n = L_t^{n-1}B_t - (n-1)L_t^{n-2}t$.

3. Calculer $\mathbb{E}[L_t^n L_t^m]$ pour tout $n > m \geq 0$..

4. Montrer que à $t$ fixé, la série $\sum_{n\geq 0} L_t^n \lambda^n/n!$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$. En fait on peut montrer quelle converge p.s. (cf la feuille 1).

5. On note $\mathcal{E}_t^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda B_t - t\lambda^2/2}$. Montrer en utilisant le calcul d'Itô que

$$\mathcal{E}_t^\lambda = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} L_t^n + J_N.$$

où $J_N$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{P})$.

8. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $\lambda > 0$, p.s.

$$\mathcal{E}_t^\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} L_t^n.$$

9. Montrer que l'on peut écrire

$$\mathrm{e}^{\alpha u - \frac{\alpha^2}{2}t} = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(u,t).$$

Calculer $H_0$, $H_1$ et $H_2$. Montrer par récurrence que $H_n(u,t) = uH_{n-1}(u,t) - (n-1)tH_{n-2}$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

$\square$

# Feuille 9

**Exercice** 1.

On désire résoudre
$$dX_t = \sigma(X_t)\left[dB_t + \frac{1}{2}\,\sigma'(X_t)dt\right]. \tag{4}$$
On suppose que la fonction $\sigma$ définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $(0,\infty)$, est de classe $C_b^1$ et que $\int_0^\infty dy/\sigma(y) = \int_{-\infty}^0 dy/\sigma(y) = \infty$. On note $f(t,x) = \mathrm{e}^{ct}\int_0^x dy/\sigma(y)$ et $g(t,\cdot)$ l'inverse de $f(t,\cdot)$.

1. Vérifier que $g$ est bien définie.

2. Montrer que $X_t = g(t,Y_t)$ où $Y_t = Y_0 + \rho\int_0^t \mathrm{e}^{cs}\,ds + \int_0^t \mathrm{e}^{cs}\,dB_s$ est solution de $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$. Calculer l'expression de la fonction $b$.

3. Résoudre (**??**). Que peut-on imposer pour que la solution de l'équation soit p.s. unique?

□

**Exercice** 2.

On considère l'équation
$$dX_s = \delta X_s dB_s + [1 + \delta\mu X_s]ds.$$

1. Unicité et existence de la solution.

2. Vérifier que la solution est de la forme $X_t = X_0 + M_t^{-1}\int_0^t M_s ds$ où $M_t = \exp \alpha B_t + \beta t$.

□

**Exercice** 3.

On considère l'équation
$$dX_t = \sqrt{1+X_t^2}\,dB_t + \left[\sqrt{1+X_t^2} + \frac{1}{2}\,X_t\right]dt$$

1. Unicité et existence de la solution.

2. Résoudre l'équation différentielle ordinaire $dh(x) = \sqrt{1+h(x)^2}dx$ pour $x \geq 0$.

3. Résoudre l'équation différentielle stochastique. □

**Exercice** 4.

On suppose que les fonctions $\sigma$, $b_1$ et $b_2$ définies sur $\mathbb{R}$, sont lipschitziennes et que $b_1(x) \leq b_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $X_i$ la solution de
$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \sigma(X_i(s))dB_s + \int_0^t b_i(X_i(s))ds.$$

1. On note $\varphi_\varepsilon$ la fonction de classe $C^2$ telle que $\varphi_\varepsilon = 0$ pour $x \leq 0$, $\varphi_\varepsilon$ est un polynôme de degré 4 pour $x \in [0,\varepsilon]$ et $\varphi_\varepsilon$ est affine pour $x \geq \varepsilon$. Remarquer que la fonction $\varphi_\varepsilon$ converge en croissant vers $x\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Montrer en utilisant le calcul d'Itô qu'il existe une constante $K$ indépendante de $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$,
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\varphi_\varepsilon(X_1(t) - X_2(t))\right]\\ &\qquad \leq \mathbb{E}\left[\varphi_\varepsilon(X_1(0) - X_2(0))\right] + Kt\varepsilon + K\int_0^t \mathbb{E}\left[(X_1(s) - X_2(s))\mathbf{1}_{X_1(s)-X_2(s)\geq 0}\right] ds.\end{aligned}$$

2. En déduire en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, que

$$X_1(0) \leq X_2(0) \text{ p.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(t) \leq X_2(t) \quad \forall t \geq 0 \text{ p.s.}$$

(Faire attention à la permutation $\forall t \geq 0$ p.s. et p.s. $\forall t \geq 0$.) $\square$

**Exercice** 5.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux mouvements browniens indépendants définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t, t \geq 0), \mathbb{P})$.

1. On suppose que $dV_t = \sigma(V_t)dB_t + b(V_t)dt$, où les fonctions réelles $\sigma$ et $b$ sont lipschitziennes. Calculer $d\langle V\rangle_t$. On suppose que $b = 0$ et que $d\langle V\rangle_t = 0$. En déduire que $V_t$ est constant.

2. Calculer $d\langle X + iY\rangle_t$ et $\mathbb{E}[(X_t + iY_t)^2]$. Quelle est la différence avec la question 1?

On note $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ et

$$d\theta_t = \frac{-Y_t dX_t + X_t dY_t}{R_t^2}.$$

3. Remarquer que $\theta_t = \int_0^t d\theta_s$ n'est pas bien défini. Néanmoins on peut donner un sens à cette intégrale dans un cadre plus général.

4. Calculer formellement $dR_t$ (cf la feuille 8 pour une démonstration précise), $d\langle R\rangle_t$, $d\langle\theta\rangle_t$ et $d\langle R, \theta\rangle_t$.

5. On note $Z_t = R_t \,\mathrm{e}^{i\theta_t}$. Calculer formellement $dZ_t$, $d\langle Z\rangle_t$ et $d\langle Z, X + iY\rangle_t$.

6. Calculer formellement $d\dfrac{Z_t}{X_t + iY_t}$. En fait ces calculs peuvent être justifiés. Conclure. $\square$

**Exercice** 6.

1. Résoudre l'équation différentielle ordinaire $dh(x) = \alpha h(x)dx$ pour $x \geq 0$.

2. On considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \alpha X_t dB_t + \beta X_t \left[1 - \delta X_t\right] dt \ \text{ et } X_0 = 1.$$

Chercher une solution sous la forme $X_t = g(t)h(B_t)$. On remarquera que si $g'(t)/g(t) = f(t)$ alors $g_1'(t)/g_1(t) = f(t) - \gamma$ où $g_1(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$. $\square$