Test d'adéquation à une loi

On vous propose de jouer avec un dé et cinq partenaires. Tout le monde mise 1F, on lance le dé. La face exposé détermine le gagnant qui empoche toutes les mises. Calculer votre gain moyen au bout de n coups. Pour accepter de jouer, il vous faut savoir si le dé est biaisé ou non. Notre but est d'établir une procédure simple pour déterminer si le dé est non-biaisé. On parle de test d'adéquation à une loi.

On note $(X_i, i \geq 1)$ des v.a.r. i.i.d à valeurs dans $\{x_1, \cdots, x_k\}$, dont la loi est caractérisée par $p_j = \mathbb{P}[X_1 = x_j] > 0$ et $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. (Dans l'exemple ci-dessus $k = 6$.) On note

$$N_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i = x_j} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}.$$

1) Déterminer la loi de N_j.

Le cas d'une pièce: $k = 2$

2) Déterminer la loi du couple (N_1, N_2).
3) Déterminer le comportement de la suite $(N_1/n, n \geq 1)$.
4) Déterminer le comportement de la suite $(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{n}}, n \geq 1)$.

La loi du χ^2

5) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a.vect. qui converge en loi vers X. Soit f une fonction continue. Déterminer le comportement de la suite $(f(X_n), n \geq 1)$.

6) Calculer T_n. Comportement de $(T_n, n \geq 1)$.

7) Donner la densité de la loi limite. Identifier la loi limite comme une loi Gamma: $\Gamma(1/2, d/2)$. Rappeler sa fonction caractéristique. On parle également de loi du χ^2 à d degré de liberté. Ces lois sont tabulées.

8) En déduire un test pour déterminer si une pièce est non-biaisée.

9) Donner la loi de la somme de deux χ^2 indépendant à k_1 et k_2 degrés de liberté. En déduire la loi de $\sum_{j=1}^k X_j^2$, où $X_1, \cdots, X_k$ sont k gaussiennes indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$.

Le cas général

On pose

$$Z_n = \left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1}}, \cdots, \frac{N_k - np_k}{\sqrt{np_k}} \right).$$

10) Donner la limite Z de $(Z_n, n \geq 1)$ quand $n \to \infty$. Déterminer la matrice de covariance Σ.

11) Calculer $\sum_{j=1}^k \sqrt{p_j} Z_n(j)$. En déduire que Σ est de rang $< k$.

12) Montrer que $\Sigma^2 = \Sigma$. Montrer que Σ est de rang $k-1$. En déduire qu'il existe une matrice unitaire U telle que $U^* \Sigma U$ est diagonale.

13) Donner la loi de $U^* Z$. En déduire la loi de $\sum_{j=1}^k Z(j)^2$.

14) Donner la limite de $(T_n, n > 1)$. En déduire un test pour savoir si un dé est non-biaisé.

Simulation d'un vecteur gaussien

Soit Y un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$ de loi $\mathcal{N}(B,\Sigma)$. On rappelle que Σ est une matrice symétrique positive.

0) Rappeler comment on simule une variable $\mathcal{N}(0,I_k)$.

1) Soit A un vecteur (déterministe) de $\mathbb{R}^d$ et T une matrice (déterministe) de taille $d\times k$. Donner la loi de $Y = A + TZ$.

2) En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(B,\Sigma)$.

Le filtre de Kalman

Loi conditionnelle de vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$

Soit (X, Y) un vecteur gausssien de $\mathbb{R}^2$. On pose $X = \alpha Y + Z$.
1) Que peut-on dire de (Y, Z)?
2) Trouver α pour que Y et Z soient indépendants.
3) Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$. Montrer que $X - \mathbb{E}[X \mid Y]$ et Y sont indépendants.

Le cas général

Soit (X, Y) un vecteur gausssien de $\mathbb{R}^{p+k}$ ($X \in \mathbb{R}^p$ et $Y \in \mathbb{R}^k$).
4) Calculer $E[X \mid Y]$ et montrer que $X - \mathbb{E}[X \mid Y]$ et Y sont indépendants.
5) Montrer que

$$E[X \mid Y] - \mathbb{E}[X] = \text{Cov }(X, Y)\text{Var }(Y)^{-1}[Y - \mathbb{E}[Y]].$$

6) Soit (X, Y, W) un vecteur gaussien. Montrer que si Y et W sont indépendants alors

$$\mathbb{E}[X \mid Y, W] = \mathbb{E}[X \mid Y] + \mathbb{E}[X \mid W] - \mathbb{E}[X].$$

En déduire que si on ne suppose plus Y et W indépendants, alors

$$\mathbb{E}[X \mid Y, W] = \mathbb{E}[X \mid Y] + \mathbb{E}[X \mid W - \mathbb{E}[W \mid Y]] - \mathbb{E}[X].$$

Le filtre de Kalman

On considère un système dont l'état à l'instant $n \geq 0$ est caractérisé par $X_n \in \mathbb{R}^p$, qui évolue au cours du temps suivant le modèle suivant:

$$X_{n+1} = AX_n + \varepsilon_n,$$

où A est la matrice de transition (déterministe) et ε_n représente les perturbations que subit le système. Pour connaître le système on fait des mesures à l'instant n: $Y_n \in \mathbb{R}^k$ et on a

$$Y_n = CX_n + \eta_n,$$

où C est la matrice de transfert (déterministe), et η_n représente les erreurs de mesures. On est intéressé par : à l'instant $n-1$ la **prévision** de X_n sachant les mesures jusqu'à l'instant $n-1$ (on la note $\hat{X}_n$) ainsi que, à l'instant n, par **l'état filtré** de X_n c'est-à-dire l'estimation de X_n sachant les mesures jusqu'à l'instant n (on le note $\hat{X}_n^+$).

On fait les hypothèses suivantes sur le modèle: $X_0, (\varepsilon_n, n \geq 0), (\eta_n, n \geq 0)$ sont des variables aléatoires vectorielles gaussiennes indépendantes. La suite $(\varepsilon_n, n \geq 0)$ est i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, Q)$ et la suite $(\eta_n, n \geq 0)$ est i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, S)$.

7) Donner une formule probabiliste pour $\hat{X}_n$ et $\hat{X}_n^+$.

8) Montrer que $(X_0, \cdots, X_n, Y_0, \cdots, Y_n)$ est un vecteur gaussien.

9) On pose $\tilde{Y}_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n \mid Y_0, \cdots, Y_{n-1}]$. Que représente $\tilde{Y}_n$? En utilisant la question 6), montrer que

$$\hat{X}_n^+ = \hat{X}_n + K_n[Y_n - C\hat{X}_n],$$

où

$$K_n = \text{Cov }(X_n, \tilde{Y}_n)\text{Var }(\tilde{Y}_n)^{-1}.$$

10) Montrer que $\hat{X}_n$ est indépendant de $X_n - \hat{X}_n$. En déduire que Cov $(X_n, \tilde{Y}_n) = \Sigma_n C^*$, où Σ_n est la matrice de covariance de l'erreur de prévision $\Sigma_n =$ Var $(X_n - \hat{X}_n)$.

11) Montrer que

$$K_n = \Sigma_n C^* [C \Sigma_n C^* + S]^{-1}.$$

On dit que K_n est le gain du filtre.

12) Montrer que $\hat{X}_{n+1} = A\hat{X}_n^+$.

13) Montrer que $X_n - \hat{X}_n^+$ et $\tilde{Y}_n$ sont indépendants.

14) On note $\Sigma_n^+ =$ Var $(X_n - \hat{X}_n^+)$ la matrice de covariance de l'erreur de filtrage. Montrer que $\Sigma_n^+ = (I - K_n C)\Sigma_n$.

15) Montrer que $\Sigma_{n+1} = A\Sigma_n^+ A + Q$. On remarque que les matrices K_n, Σ_n et Σ_n^+ ne dépendent que de n, A, C, Q, S et $\Sigma_0 =$ Var (X_0). Elles peuvent donc être calculée à l'avance (on dit hors ligne).

16) On suppose que les valeurs propres de A sont en modules strictement inférieres à 1. Calculer la loi de X_n. En déduire que X_n converge en loi.

17) Montrer que Y_n converge en loi.

18) On peut montrer que les matrices K_n, Σ_n et Σ_n^+ convergent vers une limite $\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}^+$. Montrer que $\bar{\Sigma}$ est solution d'une équation ne faisant pas intervenir $\bar{K}, \bar{\Sigma}^+$. Il s'agit d'une équation de Riccati.

Loi des temps de sortie pour la marche aléatoire

Soient $(X_i, i \geq 1)$ des v.a.r. i.i.d. telles que $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ et $\mathbb{P}[X_i = -1] = q = 1 - p$. On suppose $p \in]0,1[$. On note $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$. La suite S_n modélise la richesse d'un joueur à un jeu de pile ou face avec une pièce biaisée. $S_0 = x \in \mathbb{Z}$ est la richesse initiale du joueur. Dans les calculs on notera $\mathbb{P}_x$ pour $\mathbb{P}$ afin de rapeler que l'on part de la condition initiale $S_0 = x$.

Le cas $p = q = 1/2$

1) Montrer que $(S_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

2) Pour $a < b \in \mathbb{Z}$, on note

$$\tau_{a,b} = \inf\{n \geq 0; S_n \geq b \text{ ou } S_n \leq a\}.$$

Que représente $\tau_{a,b}$? Montrer qu'il s'agit d'un temps d'arrêt.

3) Montrer en utilisant le théorème de la limite centrale que $\tau_{a,b}$ est fini p.s. Montrer qu'il n'est pas borné si $a < x < b - 1$ ou si $a + 1 < x < b$.

4) En utilisant le théorème d'arrêt, montrer que

$$\mathbb{E}_x[S_{\tau_{a,b}}] = x.$$

5) On suppose $x \in]a, b[$. Calculer $\mathbb{P}_x[S_{\tau_{a,b}} = a]$.

6) Trouver la suite $(b_n, n \geq 0)$ pour que $((S_n - x)^2 - b_n, n \geq 0)$ soit une $\mathcal{F}_n$-martingale.

7) Calculer $\mathbb{E}_x[\tau_{a,b}]$.

8) Utiliser les martingales exponentielles pour calculer

$$\mathrm{e}^{at}\, \mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}} = a}\right] + \mathrm{e}^{bt}\, \mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}} = b}\right],$$

où $s = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$ et $t \in \mathbb{R}$.

9) Exprimer e^t en fonction de s. En déduire $\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}} = a}\right]$.

10) En deduire la fonction génératrice de $\tau_{a,b}$.

11) On note $\tau_b = \inf\{n \geq 0; S_n \geq b\}$. Vérifier que $(\tau_{-n,b}, n \geq 0)$ converge en croissant vers τ_b. En déduire que

$$\mathbb{P}[\tau_b < +\infty] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[S_{\tau_{-n,b}} = b] = 1.$$

12) Calculer $\mathbb{E}[\tau_b]$. Calculer la fonction génératrice de τ_b. Peut-on appliquer le théorème d'arrêt à S_{τ_b}? En déduire que $\mathbb{E}[\sup_{n \leq \tau_{a,b}} |S_n|] = +\infty$.

Le cas $p \neq q$

On reprend les mêmes notations que ci-dessus.

13) Montrer que $((q/p)^{S_n}, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

14) Montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que $\tau_{a,b}$ est fini p.s. Montrer qu'il n'est pas borné si $a < x < b - 1$ ou si $a + 1 < x < b$.

15) En utilisant le théorème d'arrêt, montrer que

$$\mathbb{E}_x[(q/p)^{S_{\tau_{a,b}}}] = (q/p)^x.$$

16) On suppose $x \in]a,b[$. Calculer $\mathbb{P}_x[S_{\tau_{a,b}} = a]$. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$ (on cherchera une convergence en loi)?

17) Trouver une suite déterministe $(c_n, n \geq 0)$ telle que $(S_n - c_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. En déduire $\mathbb{E}_x[\tau_{a,b}]$.

18) Utiliser les martingales exponentielles pour calculer

$$\mathrm{e}^{at}\,\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}\right] + \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}\right],$$

où $s = p\,\mathrm{e}^t + q\,\mathrm{e}^{-t}$.

19) Exprimer e^t en fonction de s. En déduire $\mathbb{E}_x\left[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}\right]$.

20) En deduire la fonction génératrice de $\tau_{a,b}$. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$?

21) Montrer que τ_b n'est pas toujours fini p.s. Calculer $\mathbb{P}_x[\tau_b < +\infty]$.

22) Calculer la fonction génératrice de τ_b. Que se passe-t-il quand $p \to 1/2$? Peut-on appliquer le théorème d'arrêt à S_{τ_b}? $\square$

Exercice 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, /P)$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B \mid \mathbf{1}_A]$. $\square$

Récurrence et transience pour la marche aléatoire simple

On considère un processus de Markov homogène en temps X à espace d'état dénombrable, issu de $X_0 = j$ sous $\mathbb{P}_j$. On définit les v.a.r.

$$U_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B \in \mathcal{B}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$ et $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$.

1) Montrer que

$$\mathbb{P}_j[(U_{n+1}, \dots) \in B \mid U_n = 1, U_{n-1} = s_{n-1}, \dots, U_1 = s_1] = \mathbb{P}_j[(U_1, \dots) \in B].$$

On dit que U est un processus de renouvellement.

2) On note $F_n = \{U_n = 1, U_{n+k} = 0, \quad \forall k \geq 1\}$ et $F_0 = \{U_k = 0, \quad \forall k \geq 1\}$. Montrer que

$$1 - \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_j[F_n].$$

3) Montrer que $\mathbb{P}_j[F_n] = \mathbb{P}_j[F_0]\mathbb{P}_j[U_n = 1]$.

4) On note $G = \cup_{n \geq 1} \{X_n = j\}$. Déduire de 20 et 3) que

$$\mathbb{P}_j[G] < 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] & = 0 \\ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j[X_n = j] & < \infty. \end{cases}$$

5) Déduire de 2) et 3) que

$$\mathbb{P}_j[G] = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}_j[X_n = j \text{ infiniment souvent}] & = 1 \\ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j[X_n = j] & = \infty. \end{cases}$$

6) Soit la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$: $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, où les v.a.r. $(Y_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1/2.$$

Calculer $\mathbb{P}[S_{2n} = 0]$. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$ pour n grand) les questions 5) et 4), montrer que $\mathbb{P}[S_n = 0 \text{ infiniment souvent}] = 1$.

7) On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^2$: $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où les v.a.r. $(X_n, n \geq 1)$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}[X_1 = (0,1)] = \mathbb{P}[X_1 = (0,-1)] = \mathbb{P}[X_1 = (1,0)] = \mathbb{P}[X_1 = (-1,0)] = 1/4.$$

Calculer $\mathbb{P}[S_{2n} = 0]$. En utilisant la même méthode que pour la question 1, montrer que 0 est récurrent pour la chaîne de Markov S. On pourra utiliser que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ pour calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{[k!(n-k)!]^2}$.

8) On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^3$. Montrer que 0 est transient. On utilisera que pour $n \geq 4$:

$$\sum_{i+j+k=n} \left(\frac{n!}{3^n i! j! k!} \right)^2 \leq \left(\sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{3^n i! j! k!} \right) \max_{i+j+k=n} \left(\frac{n!}{3^n i! j! k!} \right) \leq \frac{n!}{3^n ([n/3]!)^3}.$$

9) En déduire que la marche aléatoire symétrique en dimension $d \geq 3$ est transiente. □

Remarque

Plus généralement, il existe un critère du à Chung et Fuchs (cf Feller tome II p.614) sur la fonction génératrice qui détermine si la marche aléatoire est récurrente ou transiente.

Algorithme de Hastings-Metropolis

Le but est de simuler des lois compliquées à l'aide de chaînes de Markov simples.

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de noyau de transition P sur un espace d'état au plus dénombrable E. On suppose dans un premier temps qu'il existe $\alpha > 0$ et c une mesure de probabilité sur E telle que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$P(x, y) \geq \alpha c(y). \tag{1}$$

1) Montrer que si μ, μ' sont deux mesures de probabilités sur E, alors

$$\left|\mu P - \mu' P\right| \leq (1 - \alpha) \left|\mu - \mu'\right|,$$

où $|\nu| = \sum_{x \in E} |\nu(x)|$ est la norme en variation de la mesure ν. On rappelle que $\nu P(z) = \sum_{x \in E} \nu(x) P(x, z)$.

2) En déduire qu'il existe une unique mesure de probabilité π sur E telle que $\pi P = \pi$. On dit que π est la mesure invariante de la chaîne de Markov.

3) Que se passe-t-il si X_0 a pour loi π?

4) Montrer que quelle que soit la loi initiale de X_0, $(X_n, n \geq 0)$ converge en loi vers la mesure invariante. (On démontre en fait que la convergence pour la norme en variation implique la convergence en loi.) Donner une majoration de la vitesse de convergence.

5) Montrer que le résultat reste inchangé si l'on suppose seulement que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$P^l(x, y) \geq \alpha c(y), \quad \text{où} \quad l \geq 1. \tag{2}$$

On cherche à simuler une loi ν_β, $\beta > 0$, sur E **fini** de la forme

$$\nu_\beta(x) = C\, \mathrm{e}^{-\beta H(x)}, \quad x \in E,$$

où H est une fonction positive connue et C est la constante de normalisation. Dans le cadre de la mécanique statistique H représente l'énergie du système dans la configuration x. En général la constante de normalisation (appelée fonction de partition) est mal connue. On ne peut donc pas simuler directement une variable aléatoire de loi ν_β.

On suppose donné P un noyau de transition d'une chaîne de Markov sur E vérifiant (**??**) tel que

$$P(x, y) = P(y, x), \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in E^2.$$

On choisit une suite $a(x, y) \in]0, 1]$ où $(x, y) \in E^2$. Soit $(Y_{n,x}, n \geq 1, x \in E)$ et $(Z_{n,x,y}, n \geq 1, (x, y) \in E^2)$ des suites de variables aléatoires indépendantes. Leurs lois sont caractérisées par $\mathbb{P}[Y_{n,x} = y] = P(x, y)$ et $\mathbb{P}[Z_{n,x,y} = 1] = 1 - \mathbb{P}[Z_{n,x,y} = 0] = a(x, y)$. On construit la suite de variable aléatoire $(X_n, n \geq 0)$ de la manière suivante. $X_0 = x_0$, et pour $n \geq 1$, on pose $X_n = x$ si $Y_{n, X_{n-1}} = x$ et si $Z_{n, X_{n-1}, x} = 1$; sinon $X_n = X_{n-1}$.

6) Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont on donnera le noyau de transition Q.

7) Montrer que Q vérifie (**??**).

8) Montrer que s'il existe une mesure de probabilité ν sur E telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\nu(x) Q(x, y) = \nu(y) Q(y, x)$, alors ν est la mesure invariante.

9) Quelle valeur peut-on donner à $(a(x,y),(x,y) \in E^2)$ pour que la mesure invariante soit ν_β. Donner une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi ν_β.

10) Que se passe-t-il quand $\beta \to \infty$?

11) Proposer intuitivement une méthode pour obtenir un minimum de H en utilisant un algorithme de Hastings-Métropolis. On parle alors d'algorithme de recuit-simulé. $\square$

Modélisation de l'évolution d'une population

On désire étudier le modèle de population suivant. À l'instant n, la population comporte Z_n individus. Chaque individu i donne naissance à $\zeta_i^{(n)}$ enfant(s) à la génération suivante et meurt. Ainsi la population à l'instant $n+1$ comporte

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_i^{(n)}$$

individus. Si $Z_n = 0$, alors la population est définitivement éteinte et $Z_{n+1} = 0$. On fait les hypothèses suivantes. La suite $(\zeta_i^{(n)}, i \geq 1, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi, caractérisée par la fonction génératrice: $z \in [0,1]$,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad \text{où} \quad p_k = \mathbb{P}[\zeta_i^{(n)} = k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $0 < p_0 < 1$, $\operatorname{Var} \zeta_i^{(n)} = \sigma^2 < \infty$ et on pose $m = \mathbb{E}[\zeta_i^{(n)}]$. On rappelle que la fonction G est sous ces hypothèse de classe C^2 sur $[0,1]$.

On suppose également que la population comporte un seul individu à l'instant $n = 0$ (i.e. $Z_0 = 1$).

1 Des martingales associées à $(Z_n, n \geq 0)$

1) Vérifier que 0 est un état absorbant pour la suite $(Z_n, n \geq 0)$, c'est-à-dire montrer que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+k} = 0\}$ pour tout $k \geq 0$.

2) Montrer que $Z = (Z_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur un espace E que l'on précisera. On ne calculera pas la matrice de transition.

3) On note $T = \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. T est le temps d'extinction de la population. Montrer que T est un temps d'arrêt.

4) Montrer que la suite $(W_n = m^{-n} Z_n, n \geq 0)$ est une martingale.

5) Calculer $\mathbb{E}[Z_n]$.

6) Soit $q \in [0,1]$ tel que $G(q) = q$. Montrer que $(q^{Z_n}, n \geq 0)$ est une martingale.

7) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] \geq \mathbb{P}[Z_n \neq 0]$. En déduire que si $m < 1$, alors presque sûrement $Z_n = 0$ pour n assez grand (cela revient à montrer que $\mathbb{P}[T < +\infty] = 1$).

8) Calculer $\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 \mid Z_n]$. En déduire que pour $m \neq 1$,

$$\operatorname{Var} Z_n = \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

2 Propriétés de G

9) Vérifier que $G'(1) = m$.

10) On définit $G_1 = G$ et pour $n \geq 1$, $G_{n+1}(z) = G_n(G(z))$ pour $z \in [0,1]$. Montrer que pour $z \in [0,1]$, $\mathbb{E}[z^{Z_n}] = G_n(z)$.

<u>On suppose dans toutes les questions suivantes que $m > 1$.</u>

11) Montrer que G est convexe sur $[0,1]$. Tracer l'allure de la fonction $G(z)$ pour $z \in [0,1]$. Vérifier qu'il existe un unique réel $\eta \in]0,1[$, tel que $\eta = G(\eta)$.

3 La martingale $(\eta^{Z_n}, n \geq 0)$

On rappelle le théorème suivant du cours: Si $(Y_n, n \geq 0)$ est une martingale telle que $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[Y_n^2]$ est fini, alors il existe une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(Y_n - Y)^2] = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|Y_n - Y|] = 0$ et $(Y_n, n \geq 0)$ converge presque sûrement vers Y.

12) Vérifier que $(X_n = \eta^{Z_n}, n \geq 0)$ est une martingale bornée par 1 qui converge dans L^2, dans L^1 et presque sûrement vers une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, 1]$.

13) Montrer que si H est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[0, 1]$ alors,

$$\mathbb{P}[H \in]0, 1[\ ] > 0 \Rightarrow \mathbb{E}[H^2] < \mathbb{E}[H].$$

14) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

15) Vérifier que pour $z \in [0, \eta]$, $|G(z) - \eta| \leq \theta\, |z - \eta|$ où $\theta < 1$. En déduire $\mathbb{E}[X^2]$.

16) En déduire la valeur de $\mathbb{P}[X \in]0, 1[\ ]$.

17) Déduire de la question précédente la valeur de $\mathbb{P}[T < +\infty]$.

4 La martingale $(m^{-n} Z_n, n \geq 0)$

18) Vérifier que $(W_n, n \geq 0)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire positive W.

19) Montrer que $G_{n+1}(z) = G(G_n(z))$ pour $z \in [0, 1]$. En déduire que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tZ_{n+1}}] = G(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tZ_n}])$.

20) Montrer que la transformée de Laplace de W définie pour $t \geq 0$ par $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-tW}\right]$, est solution de

$$\varphi(mt) = G(\varphi(t)) \quad t \geq 0.$$

21) Montrer que φ est décroissante, continue et que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \mathbb{P}[W = 0]$. Calculer $\mathbb{E}[W]$ et montrer que $\mathbb{P}[W = 0] = \eta$.

5 Comportement de la population en temps grand

22) En utilisant les résultats précédents, montrer que presque sûrement $Z_n = 0$ pour n assez grand ou bien $\lim_{n\to\infty} m^{-n} Z_n$ existe et est non triviale c'est-à-dire qu'elle est différente de 0 ou $+\infty$. $\square$

Principe de réflexion pour le mouvement brownien et application

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}$ issu de 0 sous la probabilité $\mathbb{P}$. On note $S_t = \sup\{B_u; u \in [0,t]\}$.

6 La loi de S_t

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_t \geq a] &= \mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \geq a] + \mathbb{P}[S_t > a, B_t < a] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq a] + \mathbb{P}[S_t > a, B_t < a].\end{aligned}$$

On note $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$.

1) Montrer, en utilisant la propriété de Markov forte que $\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t < a] = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}[T_a \leq t]$.

2) Vérifier que $\mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[T_a \leq t]$.

3) En déduire que à t fixé S_t et $|B_t|$ ont même loi. Les deux processus $|B|$ et $S = (S_t, t \geq 0)$ ont-ils même loi?

4) Donner un équivalent de $\mathbb{P}[B_s \leq 1; \forall s \leq t]$ quand $t \to \infty$.

7 La loi de (S_t, B_t), ou le principe de réflexion

5) Montrer que le processus

$$\begin{aligned}X_t &= B_t \quad \text{si} \quad t \leq T_a \\ X_t &= 2a - B_t \quad \text{si} \quad t > T_a,\end{aligned}$$

est un mouvement brownien.

6) Pour $a \leq b$ et $b > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}[S_t > b, B_t < a] = \mathbb{P}[B_t < a - 2b].$$

7) En déduire la loi du couple (S_t, B_t).

8) Calculer et reconnaître la loi de $S_t - B_t$ à t fixé.

9) Calculer et reconnaître la loi de $2S_t - B_t$ à t fixé.

8 Quelques propriétés de T_a

10) Montrer que T_a et $a^2 T_1$ ont même loi.

11) Montrer que T_1 a même loi que $\frac{1}{|B_1|^2}$.

12) Calculer la transformée de Laplace de T_a ($\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda T_a}]$ pour $\lambda \geq 0$) en utilisant les martingales exponentielles.