Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 12 mars 2012 14h30-16h30

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

I Loi biaisée par la taille et loi infiniment divisible

La notation $Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ signifie que les variables aléatoires Z et Y ont même loi. On note φ_Z la fonction caractéristique de Z.

Soit X une variable aléatoire réelle p.s. positive et intégrable. On note $a = \mathbb{E}[X]$. La loi de X biaisée par la taille est la loi de la variable aléatoire X^* définie de la manière suivante : pour toute fonction mesurable bornée g :

$$\mathbb{E}[g(X^*)] = \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\left[Xg(X)\right].$$

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Steutel[1] [2] : $X^* \stackrel{\mathcal{L}}{=} X + Y$, où Y est une variable aléatoire positive indépendante de X, si et seulement si la loi de X est infiniment divisible.

1. Préliminaires.
   (a) Vérifier que la fonction F^* définie par :
   $$F^*(x) = \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X\leq x\}}\right]$$
   est une fonction de répartition *i.e.* une fonction croissante contininue à droite telle que $\lim_{x\to+\infty} F^*(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F^*(x) = 0$. En déduire que la loi de X biaisée par la taille est bien définie.

   (b) Soit $(X_k, k \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que pour g mesurable bornée, on a : $\mathbb{E}[g(S_n^*)] = \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_n\, g(S_{n-1} + X_n)]$. En déduire que :
   $$S_n^* \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_{n-1} + X^*,$$
   où X^* est choisi indépendant de $(X_k, k \in \mathbb{N}^*)$.

2. On suppose que X est infiniment divisible. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite de variables aléatoires $(X_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}^*)$ indépendantes et de même loi telle que :
   $$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_n^{(n)}, \quad \text{où} \quad S_m^{(n)} = \sum_{k=1}^m X_k^{(n)}.$$
   On rappelle que X étant p.s. positive et intégrable, alors $X_k^{(n)}$ est également p.s. positive et intégrable.

   (a) Déduire de la question I.1b que :
   $$X^* \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_n^{(n)} - X_n^{(n)}) + Y_n,$$
   où Y_n est indépendante $(X_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}^*)$ et dont la loi est la loi de $X_1^{(n)}$ biaisée par la taille.

[1] W. F. Steutel. Some recent results in infinite divisibility. *Stoch. Pr. Appl.* Vol. 1, pp. 125-143 (1973).
[2] R. Arratia and L.Goldstein. Size bias, sampling, the waiting time paradox, and infinite divisibility : when is the increment independent ? `http://arxiv.org/abs/1007.3910` (2010).

(b) Montrer que $(X_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers 0 dans L^1. En déduire que $(S_n^{(n)} - X_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi et identifier la limite.

(c) Montrer que pour tout $K \geq 0$, $\mathbb{P}(Y_n \geq K) \leq \mathbb{P}(X^* \geq K)$. En déduire que la suite $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est tendue et qu'il existe une sous-suite $(Y_{n_k}, k \in \mathbb{N}^*)$ qui converge en loi vers une limite Y p.s. positive.

(d) Montrer que

$$X^* \overset{\mathcal{L}}{=} X + Y,$$

où Y est une variable aléatoire p.s. positive indépendante de X.

3. On suppose que $X^* \overset{\mathcal{L}}{=} X+Y$, où Y est une variable aléatoire p.s. positive indépendante de X. On note μ la loi de Y : $\mu(A) = \mathbb{P}(Y \in A)$.

(a) Montrer que :

$$\varphi_{X^*}(u) = \frac{1}{ia}\,\varphi_X'(u).$$

(b) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, $\log(\varphi_X(u))$ est bien défini et que pour $u \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\frac{d}{du}\log(\varphi_X(u)) = ia\varphi_Y(u).$$

(c) Montrer que pour $u \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\varphi_X(u) = \exp\left(iua\mu(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} (\mathrm{e}^{iuy} - 1)\frac{a}{y}\mu(dy) \right).$$

(d) En déduire que X est infiniment divisible et donner son triplet caractéristique.

4. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit Y une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On rappelle que :

$$\mathbb{P}(Y = k) = pq^{q-1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \varphi_Y(u) = \frac{p\,\mathrm{e}^{iu}}{1 - q\,\mathrm{e}^{iu}}.$$

Soit X une variable aléatoire indépendante de Y et de loi géométrique décalée : $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, autrement dit $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y - 1$. Montrer que $X^* \overset{\mathcal{L}}{=} X + Y$. En déduire que la loi géométrique décalée est infiniment divisible et donner son triplet caractéristique.

II Générateur infinitésimal d'un processus de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)F(dx) < +\infty$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. On note

$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s \neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus, $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - F(dx)dt$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien qui apparaît dans sa décomposition de Lévy-Itô.
On se donne également $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et C^2 nulles en 0.

1. Justifier que pour $T > 0$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $\mathbb{P}(\int_0^T |h(X_s)|ds < +\infty) = 1$, $\mathbb{P}\left(\forall t \in [0, T],\ \int_0^t h(X_{s^-})ds = \int_0^t h(X_s)ds\right) = 1$. Vérifier que la continuité de h suffit à assurer que $\mathbb{P}(\int_0^T |h(X_s)|ds < +\infty) = 1$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} \left| f(x+y) - f(x) - f'(x)y1_{\{|y|\leq 1\}} \right| F(dy) < +\infty$ et que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \left(f(x+y) - f(x) - f'(x)y1_{\{|y|\leq 1\}} \right) F(dy)$ est une fonction continue.

On note $M_t^f = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ où

$$Lf(x) = bf'(x) + \frac{c}{2}f''(x) + \int_{\mathbb{R}} \left(f(x+y) - f(x) - f'(x)y1_{\{|y|\leq 1\}} \right) F(dy).$$

3. Justifier que $M_t^f = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_{s^-})ds$ puis que

$$M_t^f = \sqrt{c} \int_0^t f'(X_s)dW_s + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \left(f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-}) \right) \tilde{N}(ds, dy).$$

4. Montrer que si f' est bornée,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x))^2 \leq (\|f'\|_\infty^2 \vee 4\|f\|_\infty^2)(1 \wedge y^2)$$

et en déduire que M_t^f est alors une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

5. Vérifier que

$$[L(fg) - fLg - gLf](x) = cf'g'(x) + \int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x))(g(x+y) - g(x))F(dy).$$

6. Calculer $[M^f, M^g]_t$. Vérifier que $[M^f, M^g]_t - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est une martingale locale.
Lorsque g' est bornée, vérifier que $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f(x+y) - f(x))(g(x+y) - g(x))| \leq 2\|f\|_\infty (2\|g\|_\infty \vee \|g'\|_\infty)(1 \wedge |y|)$$

et en déduire que $[M^f, M^g]_t - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est alors une martingale de carré intégrable.

7. Exprimer $M_t^f M_t^g - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ sous forme d'une somme d'intégrales stochastiques. En déduire que ce processus est une martingale locale. Vérifier que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (M_{s^-}^g)^2 (f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-}))^2 F(dy)ds \right) \\ &\qquad \leq 4\mathbb{E}((M_t^g)^2) t (\|f'\|_\infty^2 \vee 4\|f\|_\infty^2) \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge y^2) F(dy). \end{aligned}$$

En déduire que lorsque f' et g' sont bornées $M_t^f M_t^g - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est une martingale de carré intégrable.

Correction

I Loi biaisée par la taille et loi infiniment divisible

1. (a) Par croissance de l'espérance, on a que F^* est croissante. Par convergence dominée, on obtient que F^* est une fonction contininue à droite telle que $\lim_{x\to+\infty} F^*(x) = \mathbb{E}[X]/a = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F^*(x) = 0$. On en déduit que F^* est bien une fonction de répartition. La loi de X biaisée par la taille est donc bien définie.

   (b) Soit g une fonction mesurable bornée. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(S_n^*)] = \frac{1}{na}\,\mathbb{E}[S_n g(S_n)] &= \frac{1}{na}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k g(X_k + \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\{i\neq k\}})\right] \\ &= \frac{1}{a}\,\mathbb{E}[X_n g(S_{n-1} + X_n)] \\ &= \mathbb{E}[g(S_{n-1} + X^*)],\end{aligned}$$

   où on a utilisé que $(X_k, \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\{i\neq k\}})$ a même loi que (X_n, S_{n-1}) pour la 4ème égalité, puis que X_n (et X^*) est indépendant de S_{n-1} pour la dernière égalité. On en déduit le résultat.

2. (a) C'est une application directe de la question I.1b.

   (b) On a :

$$\mathbb{E}[|X_n^{(n)}|] = \mathbb{E}[X_n^{(n)}] = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[S_n^{(n)}] = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[X].$$

   On en déduit que $(X_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers 0 dans L^1 et donc en loi. Comme $(S_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers X, on déduit du théorème de Slutski que $(S_n^{(n)} - X_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers X.

   (c) Comme X^* a méme loi que $(S_n^{(n)} - X_n^{(n)}) + Y_n$ et que $(S_n^{(n)} - X_n^{(n)})$ est positif, on en déduit que pour tout $K \geq 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq K) \leq \mathbb{P}(X^* \leq K)$. Comme Y_n et X^* sont positifs, on en déduit que :

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(|Y_n| \geq K) = 0.$$

   Ceci assure que la suite $(\mu_n, n \in \mathbb{N}^*)$, où μ_n est la loi de Y_n, est tendue. Le théorème de Prohorov assure que cette suite est relativement compacte. Donc il existe une sous-suite $(Y_{n_k}, k \in \mathbb{N}^*)$ qui converge en loi vers une limite Y. Comme Y_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que Y est positif.

   (d) On a par indépendance :

$$\varphi_{X^*}(u) = \varphi_{S_{n_k}^{(n_k)} - X_n^{(n_k)}}(u)\,\varphi_{Y_{n_k}}(u) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi_X(u)\,\varphi_Y(u).$$

   Ceci démontre le résultat.

3. (a) La fonction φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ car $X \in L^1$ et $\varphi_X'(u) = \mathbb{E}[iX\,\mathrm{e}^{iuX}]$. Il vient :

$$\varphi_{X^*}(u) = \frac{1}{a}\,\mathbb{E}[X\,\mathrm{e}^{iuX}] = \frac{1}{ia}\,\varphi_X'(u).$$

   (b) Comme φ_X est continue et $\varphi_X(0) = 1$, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que φ_X ne s'annulle pas sur I. En particulier on a sur I : $\varphi_X(u) = \mathrm{e}^{\psi(u)}$

et $\psi(0) = 0$, et ψ ainsi déterminé est unique. On note $\psi(u) = \log(\varphi_X(u))$ pour $u \in I$. Enfin, comme φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que ψ est également de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, on a $\varphi'_X(u) = \psi'(u)\varphi_X(u)$ soit :

$$\psi'(u) = ia\varphi_Y(u) \quad \text{pour } u \in I.$$

(c) Comme $\psi(u) = 0$, on déduit de la question précédente et du théorème de Fubini que, pour $u \in I$:

$$\begin{aligned}\psi(u) = ia\int_0^u dv \int \mathrm{e}^{ivy}\ \mu(dy) &= ia\int \mu(dy)\int_0^u dv\ \mathrm{e}^{ivy} \\ &= iua\mu(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} (\mathrm{e}^{iuy} - 1)\frac{a}{y}\mu(dy).\end{aligned}$$

(d) L'égalité ci-dessus est valable sur tout intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel φ_X ne s'annule pas. En particulier elle est valable sur $I =]u_-, u_+[$, où $u_+ = \inf\{u \geq 0; \varphi_X(u) \neq 0\}$ et $u_- = \sup\{u \leq 0; \varphi_X(u) \neq 0\}$ avec les conventions $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. En particulier ψ est défini sur $]u_-, u_+[$.

On remarque que $|\psi(u)| \leq a|u|$. Si u_+ est fini, on a $\lim_{u\uparrow u_+} \varphi_X(u) = 0$ mais $\limsup_{u\uparrow u_+} |\psi(u)| < +\infty$. Ceci est absurde car $\varphi_X(u) = \exp(\psi(u))$. On en déduit que u_+ est infini. De même on montre que $-u_-$ est infini. Donc la formule

$$\varphi_X(u) = \exp\left(iua\mu(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} (\mathrm{e}^{iuy} - 1)\frac{a}{y}\mu(dy)\right).$$

est vraie sur $\mathbb{R}$. Ceci assure que la loi de X est infiniment divisible et son triplet caractéristique est $\left(a\mu(\{0\}), 0, \frac{a}{y}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)\,\mu(dy)\right)$ (avec la fonction de troncature nulle).

4. On a $a = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] - 1 = q/p$ ainsi que $\varphi_X(u) = \varphi_{Y-1}(u) = \mathrm{e}^{-iu}\varphi_Y(u) = p/(1 - q\,\mathrm{e}^{iu})$. On en déduit que :

$$\varphi_{X^*}(u) = \frac{1}{i}\ \frac{p}{q}\,\varphi'_X(u) = \frac{p^2\,\mathrm{e}^{iu}}{(1 - q\,\mathrm{e}^{iu})^2} = \varphi_X(u)\varphi_Y(u).$$

On en déduit que $X^* \stackrel{\mathcal{L}}{=} X + Y$ avec X intégrable p.s. positive et Y p.s. positive indépendante de X. D'après la question I.3, on obtient que la loi de X est infiniment divisible. Comme la loi de Y ne charge par $\{0\}$, on en déduit que son triplet caractéristique (avec la fonction de troncature nulle) est, en utilisant la notation δ_x pour la masse de Dirac en x :

$$\left(0, 0, \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}\,q^k\delta_k(dy)\right).$$