Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 11 mars 2013 15h15-17h15

Cumulants et moments d'un processus de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)F(dx) < +\infty$ associé à la fonction de troncature $h(x) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. On note

$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s \neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus, $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - F(dx)dt$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard qui apparaît dans sa décomposition de Lévy-Itô.

1. Écrire la décomposition de Lévy-Itô du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à l'aide de W_t, N et $\tilde{N}$.
2. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|1_{\{|x|>1\}}F(dx) < +\infty$.
   (a) Que peut-on dire du processus $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}N(ds, dx) - t\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)_{t\geq 0}$?
   (b) En déduire que pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable et calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
   (c) Pour $u \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t}1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)$ lorsque $t \to \infty$.
   (d) En étudiant $\mathbb{E}(e^{iu\frac{X_t}{t}})$, en déduire que $\frac{X_t}{t}$ converge en probabilité vers une limite à préciser lorsque $t \to \infty$.
3. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} x^2F(dx) < +\infty$.
   (a) Exprimer $X_t - \mathbb{E}(X_t)$ à l'aide de W_t et de $\tilde{N}$. En déduire $\mathrm{Var}(X_t)$ puis $\mathbb{E}(X_t^2)$. Que peut-on dire du processus $(X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$?
   (b) Calculer dX_t^2 par la formule d'intégration par parties. Calculer $\mathbb{E}([X, X]_t)$ puis $\mathbb{E}(\int_0^t X_{s^-}d\mathbb{E}(X_s))$ et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X_t^2)$.
   (c) Pour $u \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{t}})F(dx)$ lorsque $t \to \infty$.
   (d) En étudiant $\mathbb{E}(e^{iu\frac{X_t-\mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}})$, vérifier que $\frac{X_t-\mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance à préciser lorsque $t \to \infty$.

On suppose l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\int e^{\varepsilon|x|}1_{\{|x|>1\}}F(dx) < +\infty$ et on admet qu'alors

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left(e^{\varepsilon|X_t|}\right) < +\infty \text{ et } \forall\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_t}\right) = e^{t\left(\lambda b+\frac{c\lambda^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\lambda x}-1-\lambda x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)\right)}.$$

On appelle cumulant (resp. moment) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de X_t le coefficient $\kappa_n(t)$ du terme $\frac{\lambda^n}{n!}$ dans le développement en série entière de $\lambda \mapsto \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}))$ (resp $\mu_n(t) = \mathbb{E}(X_t^n)$) : $\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^n\kappa_n(t)}{n!}$.

4. Que valent les cumulants de X_t ?
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^n\mathbb{E}(|X_t|^n)}{n!} < +\infty$. En déduire que les moments de X_t sont bien définis et que $\forall\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = 1 + \sum_{n\geq 1} \mu_n(t)\frac{\lambda^n}{n!}$.
6. Montrer que $\mu_n(t) = n!\sum_{l\geq 1}\sum_{(n_1,\ldots,n_l)\in(\mathbb{N}^*)^l:n_1+\ldots+n_l=n} \frac{1}{l!}\prod_{k=1}^l \frac{\kappa_{n_k}(t)}{n_k!}$.

7. À un l-uplet $(n_1, \ldots, n_l) \in (\mathbb{N}^*)^l$, on associe $m = \max\{j \geq 1 : \exists k \text{ t.q. } n_k = j\}$ et le vecteur $(r_1, \ldots, r_m)$ où $r_j = \operatorname{Card}\{k : n_k = j\}$.
   (a) Que valent $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ et $r_1 + 2r_2 + \ldots + mr_m$?
   (b) Combien un vecteur $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^{m-1} \times \mathbb{N}^*$ a-t-il d'antécédents ?
   (c) Conclure que $\mu_n(t) = n! \sum_{m=1}^{n} \sum_{(r_1,\ldots,r_m)\in\mathbb{N}^{m-1}\times\mathbb{N}^*: r_1+2r_2+\ldots+mr_m=n} \prod_{j=1}^{m} \frac{\kappa_j^{r_j}(t)}{(j!)^{r_j} r_j!}$.
   (d) Retrouver $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$.

Correction

Cumulants et moments d'un processus de Lévy

1. $X_t = bt + \sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x1_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}N(ds,dx)$.
2. (a) C'est une $\mathcal{F}_t$-martingale càdlàg à variation finie.

   (b) On en déduit que $(X_t - (b+\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx))t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale nulle en 0. Donc X_t est intégrable et $\mathbb{E}(X_t) = (b+\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx))t$.

   (c) Lorsque $t\to\infty$, $t(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t}1_{\{|x|\leq 1\}}) \to iux1_{\{|x|>1\}}$ et comme les dérivées premières et seconde de $y\in\mathbb{R}\mapsto e^{iy}$ ont pour module 1, par la formule de Taylor,

   $$|t(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t}1_{\{|x|\leq 1\}})| \leq |ux|1_{\{|x|>1\}} + \frac{u^2x^2}{2t}1_{\{|x|\leq 1\}}$$

   en distinguant les cas $|x|>1$ et $|x|\leq 1$. Le théorème de convergence dominée assure que $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t}1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx) \to iu\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)$.

   (d) D'après la formule de Lévy-Khintchine, $\mathbb{E}\left(e^{iu\frac{X_t}{t}}\right) = e^{t\left(i\frac{u}{t}b - \frac{cu^2}{2t^2} + \int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t}1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)\right)}$.
   D'après la question précédente, $\mathbb{E}\left(e^{iu\frac{X_t}{t}}\right) \to e^{iu(b+\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx))}$ qui est la fonction caractéristique de la constante $b+\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)$. Par le théorème de Paul Lévy, on conclut que $\frac{X_t}{t}$ converge en probabilité vers $b+\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx) = \frac{\mathbb{E}(X_t)}{t}$.
3. (a) $X_t - \mathbb{E}(X_t) = \sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\tilde{N}(ds,dx)$. Donc

   $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) &= \mathbb{E}\left(\left(\sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right) = c\mathbb{E}(W_t^2) + 0 + \mathbb{E}\left(\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right)\\ &= \left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right)t\end{aligned}$$

   en utilisant l'indépendance du Brownien et de la mesure de sauts pour la seconde égalité puis la propriété d'isométrie pour l'intégrale par rapport à $\tilde{N}$.

   $$\mathbb{E}(X_t^2) = \mathrm{Var}(X_t) + (\mathbb{E}(X_t))^2 = \left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right)t + \left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)^2 t^2.$$

   Le processus $(M_t = X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est une martingale càdlàg de carré intégrable.

   (b) $dX_t^2 = 2X_{t^-}dX_t + d[X,X]_t = 2X_{t^-}dM_t + 2X_{t^-}d\mathbb{E}(X_t) + d[X,X]_t$. On a

   $$[X,X]_t = < X^c, X^c >_t + \sum_{0<s\leq t}(\Delta X_s)^2 = < \sqrt{c}W, \sqrt{c}W >_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x^2N(ds,dx).$$

   On en déduit que $\mathbb{E}([X,X]_t) = \left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right)t$ en utilisant la propriété d'isométrie pour l'intégrale par rapport à N.
   Par ailleurs $\int_0^t X_{s^-}d\mathbb{E}(X_s) = \left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)\int_0^t X_sds$ si bien que

   $$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_{s^-}d\mathbb{E}(X_s)\right) = \left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)\int_0^t \mathbb{E}(X_s)ds = \left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)^2\frac{t^2}{2}.$$

Enfin, comme $\int_0^t \mathbb{E}(X_{s^-}^2)ds < +\infty$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_{s^-}dM_s\right) = \sqrt{c}\mathbb{E}\left(\int_0^t X_{s^-}dW_s\right) + \mathbb{E}\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} xX_{s^-}\tilde{N}(ds,dx)\right) = 0.$$

En prenant l'espérance dans l'égalité $X_t^2 = 2\int_0^t X_{s^-}dM_s + 2\int_0^t X_{s^-}d\mathbb{E}(X_s) + [X,X]_t$, on retrouve la valeur de $\mathbb{E}(X_t^2)$ obtenue à la question précédente.

(c) Lorsque $t \to +\infty$, $t(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{t}}) \to -\frac{u^2x^2}{2}$ avec $|t(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{t}})| \leq \frac{u^2x^2}{2}$. Par convergence dominée, $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{t}})F(dx) \to -\frac{u^2}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)$.

(d) Par la formule de Lévy-Khintchine et la valeur de $\mathbb{E}(X_t)$,

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\frac{X_t-\mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}}\right) = e^{t\left(-\frac{cu^2}{2t}+\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}}-1-\frac{iux}{\sqrt{t}})F(dx)\right)}$$

où le second membre converge vers $e^{-\frac{u^2}{2}(c+\int_{\mathbb{R}} x^2F(dx))}$ d'après la question précédente. Ainsi, $\frac{X_t-\mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0, c+\int_{\mathbb{R}} x^2F(dx))$ où la variance limite est égale à $\frac{\mathrm{Var}(X_t)}{t}$.

4. En prenant le logarithme de la formule pour $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})$ et en y développant $e^{\lambda x}$ en série entière, on obtient

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})) = \lambda t\left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right) + \frac{\lambda^2 t}{2}\left(b + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right) + \sum_{n\geq 3}\frac{\lambda^n t}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^nF(dx).$$

Ainsi $\kappa_1(t) = t\left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)$, $\kappa_2(t) = t\left(b + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right)$ et pour $n \geq 3$, $\kappa_n(t) = t\int_{\mathbb{R}} x^nF(dx)$.

5. Par le théorème de Fubini, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^n}{n!}\mathbb{E}(|X_t|^n) = \mathbb{E}(e^{\varepsilon|X_t|}) < +\infty$. Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|X_t^n| = |X_t|^n$, on en déduit que X_t^n est intégrable et les moments de X_t sont bien définis.
Comme $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = \mathbb{E}\left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\lambda^n X_t^n}{n!}\right)$ avec $|\lambda^n X_t^n| \leq \varepsilon^n|X_t|^n$, le théorème de Fubini permet d'échanger espérance et somme sur n.

6. Le résultat découle de

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = e^{\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}))} = \sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})))^l}{l!} = 1 + \sum_{l\geq 1}\frac{1}{l!}\sum_{n_1,\ldots,n_l\geq 1}\prod_{k=1}^{l}\frac{\kappa_{n_k}(t)\lambda^{n_k}}{n_k!}$$

et de l'identification du coefficient de λ^n.

7. (a) $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = l$ et $r_1 + 2r_2 + \ldots + mr_m = n_1 + \ldots + n_l$.

(b) Le vecteur $(r_1, \ldots, r_m)$ a $\frac{(r_1+\ldots+r_m)!}{r_1!\times\ldots\times r_m!}$ antécédents (choix multinomial des positions des r_j indices $k \in \{1, \ldots, r_1 + \ldots + r_m\}$ tels que $n_k = j$ pour $1 \leq j \leq m$).

(c) Comme $\frac{1}{l!}\prod_{k=1}^{l}\frac{\kappa_{n_k}(t)}{n_k!} = \frac{1}{(r_1+\ldots+r_m)!}\prod_{j=1}^{m}\frac{\kappa_j^{r_j}(t)}{(j!)^{r_j}}$, la contribution des $\frac{(r_1+\ldots+r_m)!}{r_1!\times\ldots\times r_m!}$ antécédents est identique et on en déduit l'expression de $\mu_n(t)$.

(d) Pour $n = 1$, $n! = 1$, la double somme se restreint au cas $m = 1 = r_1$ et le produit correspondant vaut $\kappa_1(t)$. Donc $\mu_1(t) = \kappa_1(t) = t\left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right)$.
Pour $n = 2$, $n! = 2$, la double somme se réduit aux cas $m = 1$, $r_1 = 2$ pour lequel le produit vaut $\frac{\kappa_1^2(t)}{2}$ et $m = 2$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ pour lequel le produit vaut $\frac{\kappa_2(t)}{2}$.
Ainsi $\mu_2(t) = \kappa_1^2(t) + \kappa_2(t) = t^2\left(b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}F(dx)\right) + t\left(b + \int_{\mathbb{R}} x^2F(dx)\right)$.