Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 10 mars 2014 14h30-16h30

Problème : Lois infiniment divibles à valeurs entières

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les lois infiniment divibles à valeurs entières et de donner quelques exemples.
On rappelle que la suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs entières converge en loi si et seulement si ses fonctions génératrices φ_n convergent vers une fonction φ telle que $\lim_{z \uparrow 1} \varphi(z) = 1$. De plus la limite en loi de la suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une variable aléatoire à valeurs entières de fonction génératrice φ.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ infiniment divible et de fonction génératrice φ définie par $\varphi(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right]$ pour $z \in [0,1]$.

1. Pour $n \geq 1$, soit $(X_{1,n}, \ldots, X_{n,n})$ des variables aléatoires indépendantes de même loi et telles que X a même loi que $X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(nX_{1,n} \in \mathbb{N}) = 1$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_{1,n} = 0)$. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$\mathbb{P}(X = x) \geq n\mathbb{P}(X_{1,n} = x)\mathbb{P}(X = 0).$$
   (c) En déduire que si $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ alors $X_{1,n}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que si $X_{1,n}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.
   (e) Montrer que si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, alors il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_{1,n} - (k_0/n)$ est à valeurs entières.
2. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières et de loi infiniment divisible. Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ des variables aléatoires indépendantes de N, à valeurs entières et de fonction génératrice Q. On pose $S_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k$, avec la convention $S_N = 0$ si $N = 0$.

   (a) Montrer que S_N est de loi infiniment divisible et donner sa fonction génératrice à l'aide des fonctions génératrices de N et Y_1.
   (b) En déduire que si N est de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ alors, si P est la fonction génératrice de S_N, on a $P(z) = \exp(\theta(Q(z) - 1))$ autrement dit :
   $$Q(z) = 1 + \frac{\log(P(z))}{\theta}.$$

   La loi de S_N est appelée loi de Poisson composée de paramètre (θ, Q).
   (c) On suppose que $\mathbb{P}(Y_1 = 0) < 1$. Soit $\theta > 0$ et $p \in]0, 1/(1 - Q(0))]$. Montrer que $(1 - p) + pQ$ est une fonction génératrice. Montrer que les lois de Poisson composée de paramètre (θ, Q) et $(\theta', (1 - p) + pQ)$ sont les mêmes pour une valeur de θ' que l'on déterminera. En déduire que la loi de Poisson composée de paramètre (θ, Q) ne caractérise pas le couple (θ, Q), sauf si on impose que $Q(0) = 0$.
3. On suppose que $0 < \mathbb{P}(X = 0) < 1$.

(a) Déduire de la question 1) que $\varphi(z)^{1/n}$ est une fonction génératrice.

(b) Montrer que :

$$Q_n(z) = 1 - \frac{1-\varphi(z)^{1/n}}{1-\varphi(0)^{1/n}}$$

est la fonction génératrice d'une variable aléatoire que l'on précisera.

(c) Déterminer $Q(z) = \lim_{n\to+\infty} Q_n(z)$.

(d) Montrer en utilisant la question 2) que la loi de X est une loi de Poisson composée dont on précisera les paramètres.

4. Application. Soit Z de loi géométrique décalée de paramètre $p \in (0,1)$: $\mathbb{P}(Z=k) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $q \in (0,1)$. Donner un développement en série entière de la fonction $\log(1-qz)$ en fonction de z pour $z \in [-1,1]$. En déduire que $Q_q(z) = \log(1-qz)/\log(1-q)$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières.
   (b) En déduire que la loi de Z est infiniment divisible.

Exercice : Fonction d'offre sur le marché de l'électricité

On considère un marché simplifié de l'électricité composé d'une centrale au charbon de 500 MW, d'une centrale à gaz de 250 MW et d'une ferme d'éoliennes de 100 MW. Le rendement de la centrale charbon [1] est de 0,5 tC/MWh et le rendement thermique de la centrale à gaz est de 40%. Le coefficient d'émission [2] de la centrale au charbon est de 2,5 tC02/tC et celui de la centrale à gaz de 0,2 tC02/MWh. Le prix du gaz est 24 €/MWh et celui du charbon 100 €/tC. La ferme éolienne a un facteur de charge de 25%. La demande vaut 600 MW. On suppose que le prix spot de l'électricité est donné par le coût marginal.

1. Tracez la fonction d'offre de ce marché (coût en €/MWh *versus* puissance en MW) quand le prix du carbone est à 10 €/tCO2 et quand il est à 40 €/tCO2. Que remarquez vous ?
2. Donnez le prix spot de l'électricité dans chaque cas.

1. tC : tonne de charbon
2. tCO2 : tonne de carbone

Correction

Problème : Lois infiniment divibles à valeurs entières

1. (a) Si $\mathbb{P}(X_{1,n} \in]a,b[) > 0$ alors $\mathbb{P}(X_{1,n} \in]a,b[, \ldots, X_{n,n} \in]a,b[) > 0$ et donc $\mathbb{P}(X \in]na,nb[) > 0$. Par contraposé, en choisissant $a = -\infty$ et $b = 0$ puis $a = k$ et $b = k+1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_{1,n} < 0) = 0$ puis que $\mathbb{P}(X_{1,n} \in]k/n,(k+1)/n[) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci implique que $\mathbb{P}(nX_{1,n} \in \mathbb{N}) = 1$.

   (b) On a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X_{1,n} = \cdots = X_{n,n} = 0) = \mathbb{P}(X_{1,n} = 0)^n$. De plus, les évènements disjoints $\{X_{k,n} = x \text{ et pour } k' \neq k\ X_{k',n} = 0\}$ sont inclus dans $\{X = x\}$. On en déduit donc :

   $$\mathbb{P}(X = x) \geq n\mathbb{P}(X_{1,n} = x)\mathbb{P}(X_{1,n} = 0)^{n-1} \geq n\mathbb{P}(X_{1,n} = x)\mathbb{P}(X = 0).$$

   (c) Pour tout $x \notin \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X_{1,n} = x) = 0$. Donc, comme $X_{1,n}$ est discrète, on en déduit que $X_{1,n}$ est à valeurs entières.

   (d) Si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ alors p.s. $X_{k,n} \geq 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et donc p.s. $X \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ceci étant absurde, on en déduit que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

   (e) Si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, soit $k_0 = \inf\{k; \mathbb{P}(X = k) > 0\}$. La variable aléatoire $X - k_0$ est à valeurs entières et infiniment divisible et on a $\mathbb{P}(X - k_0 = 0) > 0$. On déduit de ce qui précède que pour tout $n \geq 1$, $X_{1,n} - (k_0/n)$ est à valeurs entières.

2. (a) Soit $n \geq 1$. Soit $(N_{1,n}, \ldots, N_{n,n})$ des variables aléatoires indépendantes de même loi et telles que $N = \sum_{k=1}^{n} N_{k,n}$. On pose $M_0 = 0$, et pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ $M_k = \sum_{j=1}^{k} N_{j,n}$ et $T_k = \sum_{j=M_{k-1}+1}^{M_k} Y_j$. Les variables aléatoires $(T_1, \ldots, T_n)$ sont indépendantes de même loi et on a $S_N = \sum_{k=1}^{n} T_k$. La loi de S_N est donc infiniment divisible.

   Soit Q la fonction génératrice de Y_1, R celle de N et P celle de S_N. On a :

   $$P(z) = \mathbb{E}\left[z^{S_N}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[z^{S_N}|N\right]\right] = \mathbb{E}\left[Q(z)^N\right] = R(Q(z)).$$

   (b) Immédiat car $R(z) = \exp(-\theta(1-z))$.

   (c) Soit Y_0 de loi la loi de Y_1 conditionnée par $\{Y_1 > 0\}$. Sa fonction génératrice est :

   $$Q_0(z) = \frac{Q(z) - Q(0)}{1 - Q(0)}.$$

   Soit $p_0 \in [0,1]$. On remarque que $(1-p_0) + p_0 Q_0$ est la fonction génératrice de la variable aléatoire à valeurs entières $U_0 Y_0$ où U_0 est une variable de Bernoulli de paramètre p_0 indépendante de Y_0. En posant $p = p_0/(1-Q(0))$, on en déduit que $(1-p) + pQ = (1-p_0) + p_0 Q_0$ est donc une fonction génératrice.

   De plus, les lois de Poisson composée de paramètres (θ, Q) et $(\theta/p, (1-p)+pQ)$ ont même fonction génératrice. La loi de Poisson composée de paramètre (θ, Q) ne caractérise pas le couple (θ, Q), sauf si on impose que $Q(0) = 0$ (ce qui revient à choisir $Q = Q_0$ et $p_0 = 1$).

3. (a) On déduit de la question 1) que $X_{1,n}$ est à valeurs entières. Soit φ_n sa fonction génératrice. On a $\varphi(z) = \varphi_n(z)^n$ et donc $\varphi_n(z) = \varphi(z)^{1/n}$.

(b) Q_n est la fonction génératrice de la loi de $X_{1,n}$ sachant $\{X_{1,n} > 0\}$. Comme $\mathbb{P}(X = 0) < 1$, on remarque que $\varphi(0) < 1$ et donc la fonction Q_n est bien définie.

(c) En utilisant l'équivalent $1 - x^{1/n} = \frac{1}{n}\log(x) + o(1/n)$, on en déduit que :

$$Q(z) = \lim_{n\to+\infty} Q_n(z) = 1 - \frac{\log(\varphi(z))}{\log(\varphi(0))}.$$

(d) On observe que $\lim_{z\uparrow 1} Q(z) = 1$, donc Q est une fonction génératrice. On déduit de la question 2) que X est de loi de Poisson composée de paramètre $(-\log(\varphi(0)), Q)$.

4. (a) On a $\log(1-qz) = -\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(qz)^n/n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = q^n/(n\log(1/(1-q)))$ et $p_0 = 0$. On a $p_k \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. On en déduit que Q_q est la fonction génératice de la loi de probabilité $(p_k, k \in \mathbb{N})$.

   (b) On déduit de la question 2) que Z est de loi de Poisson composée de paramètre $(-\log(p), Q_{1-p})$. Donc la loi géométrique est infiniment divisible.

Exercice : Fonction d'offre sur le marché de l'électricité

Notation indicative sur 3 points : question 1. courbe d'offre dans le premier cas (1 point) et dans le second cas (1 point), question 2. (1 point)

1. Les coûts proportionnels des différentes technologies sont :

Coût en €/MWh	Quand CO2 = 10 €/tCO2	Quand CO2 = 40 €/tCO2
Éolien	0	0
Centrale charbon	0,5*100 + 0,5*2,5*10 = 62,5	0,5*100 + 0,5*2,5*40 = 100
Centrale gaz	$\frac{1}{40\%}$*24 + $\frac{1}{40\%}$*0,2*10 = 65	$\frac{1}{40\%}$*24 + $\frac{1}{40\%}$*0,2*40 = 80

   Dans le premier cas les paliers sont à 25 MW (100 * 25%) pour le passage de l'éolien au charbon et 525 MW (25 + 500) pour le passage du charbon au gaz. Dans le second cas, le palier éolien/gaz est à 25 MW et le palier gaz/charbon à 275 MW (25 + 250). Les fonctions d'offres sont représentées sur le graphique 1.

   On peut remarquer que les deux technologies charbon et gaz s'inversent dans le *merit order* en fonction du prix du CO2.

2. Le prix spot (obtenu par croisement entre offre et demande) vaut 65 €/MWh dans le premier cas et 100 €/MWh dans le second cas.

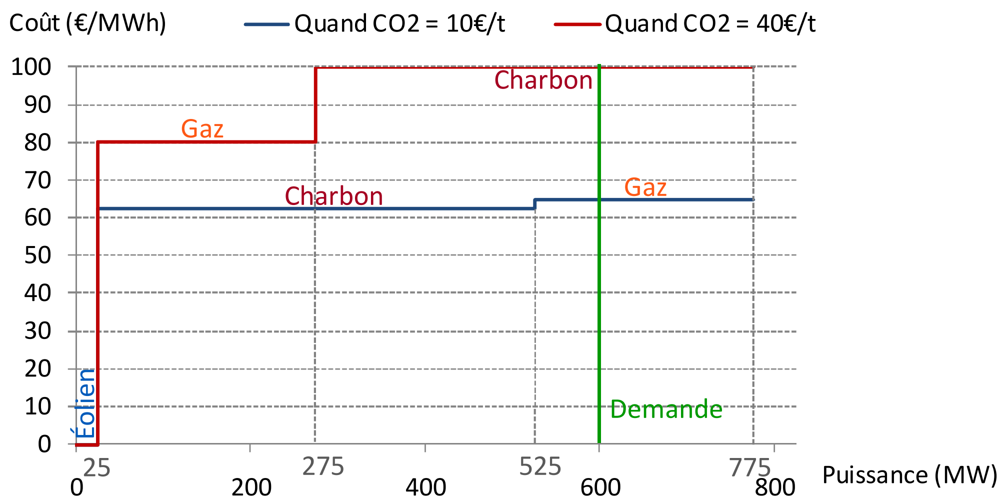

Figure 1 – Fonctions d'offres dans les deux configurations de prix du carbone.