Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 9 mars 2015 14h30-16h30

1 Equation integro-différentielle satisfaite par la densité marginale d'un processus de Lévy

Soit $(Z_s)_{s\geq 0}$ un processsus de Lévy de triplet caractéristique (b,c,F) (pour la fonction de troncature $h(x)=x1_{\{|x|\leq 1\}}$) tel que $\int_{\mathbb{R}}|y|F(dy)<+\infty$. On pose $\boxed{\tilde{b}=b-\int_{\mathbb{R}}y1_{\{|y|\leq 1\}}F(dy)}$.
On admet que la condition d'intégrabilité satisfaite par F entraîne que pour tout $s>0$, $\mathbb{E}[|Z_s|]<+\infty$. On fixe $t>0$ et on suppose (propriété vérifiée lorsque $c>0$) que la variable aléatoire Z_t possède une densité $p_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1 et telle que $\lim_{|z|\to\infty}p_t(z)=0$.

1. Donner la fonction $\psi_{b,c,F}(u)$ telle que $\forall u\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{iuZ_t}]=e^{t\psi_{b,c,F}(u)}$.
2. Vérifier que $\frac{d}{du}\mathbb{E}[e^{iuZ_t}]=i\mathbb{E}[Z_te^{iuZ_t}]$ et en déduire que
$$\forall u\in\mathbb{R},\ \mathbb{E}[Z_te^{iuZ_t}]=t\left(\tilde{b}+\int_{\mathbb{R}}ye^{iuy}F(dy)\right)e^{t\psi_{b,c,F}(u)}+ictu\mathbb{E}[e^{iuZ_t}].$$
3. Vérifier que $iu\mathbb{E}[e^{iuZ_t}]=-\int_{\mathbb{R}}e^{iuz}p_t'(z)dz$.
4. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}}ye^{iuy}F(dy)e^{t\psi_{b,c,F}(u)}=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}yp_t(z-y)F(dy)\right)e^{iuz}dz$.
5. En déduire que pour tout $u\in\mathbb{R}$,
$$\int_{\mathbb{R}}\left((\frac{z}{t}-\tilde{b})p_t(z)+cp_t'(z)-\int_{\mathbb{R}}yp_t(z-y)F(dy)\right)e^{iuz}dz=0.$$
6. Conclure que p_t satisfait l'équation intégro-differentielle
$$\forall z\in\mathbb{R},\ (\frac{z}{t}-\tilde{b})p_t(z)+cp_t'(z)-\int_{\mathbb{R}}yp_t(z-y)F(dy)=0.$$
7. Retrouver la densité de Z_t dans le cas particulier $F\equiv 0$ et $c>0$.

2 Planning de production en présence d'un risque de panne

On considère un producteur d'électricité qui s'est engagé à satisfaire la courbe de charge suivante :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Demande (MWh)	150	250	150	350	150

Pour ce faire, le producteur dispose de trois centrales, P1, P2 et P3, de caractéristiques suivantes :

	Coût proportionnel (€/MWh)	Volume maximal produit sur une journée (MWh)
P1	10	200
P2	20	100
P3	50	200

L'objectif du producteur est de satisfaire la demande en minimisant ses coûts. S'il ne respecte pas le contrat (i.e. : défaut de production), il doit payer une pénalité de 100 € par MWh non fourni.

1. Donner le planning de production du producteur, c'est-à-dire les niveaux de production (en MWh) pour chaque centrale pour chaque jour. Quel est le coût de la production (en €) pour la semaine entière ?

2. On considère désormais que le producteur a accès à l'option suivante : recevoir 100 MWh entre lundi et vendredi (inclus), en deux livraisons journalières de 50 MWh chacun. Quel est le prix maximal que le producteur est prêt à payer pour l'option ? S'il achète cette option, quels jours va-t-il l'exercer ?

3. On considère maintenant que la centrale P1 est susceptible d'être en panne dans les jours qui viennent :

   - il y a 1/4 de chances que la centrale tombe en panne une fois dans la semaine ;
   - en cas de panne, le jour d'occurrence de la panne est uniformément réparti sur la semaine et la centrale est arrêtée ce jour et le lendemain ;
   - enfin, il y a au maximum une panne dans la semaine.

   Par exemple, si la centrale tombe en panne mardi, elle sera arrêtée mardi et mercredi, et pourra fonctionner jeudi et vendredi.

   (a) Énumérer les différentes configurations possibles pour la semaine en fonction du jour de panne, les plannings de production correspondants et le coût de la production dans chaque cas. Y a-t-il un risque que le producteur fasse défaut ?

   (b) Quel prix le producteur est-il prêt à payer pour l'option de la question 2 ?

3 Sauts d'un processus càdlàg

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite avec des limites à gauche à valeurs réelles sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'objectif de cet exercice est de montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \{t > 0 : \mathbb{P}(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$ est au plus dénombrable.

1. Que peut-on dire de $\mathcal{T}$ lorsque $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy?

2. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction càdlàg, que peut-on dire de $\{t \in]0, q] : |\Delta f(t)| \geq \frac{1}{q}\}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$ et de $\{t > 0 : \Delta f(t) \neq 0\}$? En déduire que $\int_0^{+\infty} 1_{\{\Delta f(t)\neq 0\}} dt = 0$.

3. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $\int_0^{+\infty} 1_{\{t\in\mathcal{T}\}} dt = 0$. Cela suffit-il à établir le résultat souhaité?

4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Que peut-on dire de la suite $(\bigcup_{m\geq n} A_m)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

5. Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{T}_{p,q} = \{t \in]0, q] : \mathbb{P}(|\Delta X_t| \geq \frac{1}{q}) \geq \frac{1}{p}\}$.

   (a) Lorsque $\mathcal{T}_{p,q} \neq \emptyset$, pour $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_{p,q}$, on note $A_n = \{|\Delta X_{t_n}| \geq \frac{1}{q}\}$. Avec la question 4, montrer que

   $$\mathbb{P}\left(\{n \in \mathbb{N}^* : |\Delta X_{t_n}| \geq \frac{1}{q}\} \text{ est infini}\right) \geq \frac{1}{p}$$

   et en déduire avec la question 2 que $\mathcal{T}_{p,q}$ est fini.

   (b) Conclure que $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable.