Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 07 mars 2016 14h30-16h30

Exercice I : Mesure ponctuelle de Poisson et fluctuations

Soit f une fonction mesurable positive définie sur $]0,1]$. On pose pour $t \in [0,1]$:

$$g(t) = \int_{]t,1]} x f(x)\, dx \quad \text{et} \quad F(t) = \int_{]0,t]} x^2 f(x)\, dx.$$

On suppose que $g(0) = +\infty$ et $F(1) < +\infty$.

Soit $\mathcal{N}(dx) = \sum_{i\in I} \delta_{x_i}(dx)$ une mesure ponctuelle de Poisson sur $]0,1]$ d'intensité $f(x)\mathbf{1}_{]0,1]}(x)\, dx$. Pour $t \geq 1$, on pose :

$$G_t = \sum_{i\in I} x_i \mathbf{1}_{\{x_i \geq 1/t\}} \quad \text{et} \quad M_t = G_t - g(1/t).$$

1. Montrer que : M_t est intégrable, $\mathbb{E}[M_t] = 0$ et $\mathbb{E}[M_t^2] = F(1) - F(1/t)$.
2. Vérifier que le processus $(M_t, t \geq 1)$ est continu à droite avec une limite à gauche en tout $t > 1$.

On considère la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sum_{i\in I} \delta_{x_i}(dx)\mathbf{1}_{\{x_i \geq 1/t\}}\right)$ engendrée par la mesure aléatoire $\mathbf{1}_{[1/t,1]}(x)\mathcal{N}(dx)$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 1)$.

3. Vérifier que $\mathcal{F}$ est une filtration (i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $1 \leq s \leq t$).
4. Vérifier que $(M_t, t \geq 1)$ est une martingale.
5. Montrer que $(M_t, t \geq 1)$ converge p.s. et dans L^2 vers une limite M_∞ quant t tend vers l'infini.
6. Montrer que pour $1 \leq s \leq t$, $u \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iu(M_t - M_s)}\right] = \exp\left(-\int_{1/t}^{1/s} (1 + iux - \mathrm{e}^{iux}) f(x)\, dx\right).$$

7. Déduire de la question précédente la fonction caractéristique de M_∞.
8. On suppose que $f(x) = (1-\alpha)x^{-2-\alpha}$ avec $\alpha \in [0,1[$. Montrer que la suite $(W_t, t \geq 1)$, où :

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{F(1/t)}}(M_t - M_\infty),$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne dont on précisera la variance.

Exercice II : Valorisation d'un stockage gazier

On considère un calendrier simplifié où l'année dure 360 jours et est découpée en 4 trimestres ou "quarters" de 90 jours chacun. Les "quarters" sont eux-mêmes découpés en 3 mois de 30 jours. On se place au temps $t = 0$, et on considère les dates $(t_i, 0 \leq i \leq 360)$ telles que : $t_0 > 0$ et $t_{i+1} - t_i = 1$ jour pour tout $0 \leq i \leq 359$.

Description du stockage

On se donne un stockage gazier de volume V, que l'on gère à pas journalier entre t_0 et t_{360}. À chaque date t_i, pour $i \in \{0, \dots, 359\}$, étant donné v le volume en stock en t_i, on peut ajouter un volume $z \in [-a; a]$ au stockage, sous réserve que $0 \leq v + z \leq V$. Le stockage est tel que $a = V/100$. Il faut donc 100 jours pour remplir (resp. vider) le stockage. Enfin, le volume en stock est nul à t_0.

Description du marché

À la date $t = 0$, le marché du gaz cote les trois produits suivants (en plus du spot) :

— le "quarter" couvrant la période $[t_0; t_{90}[$, de prix Q_0^1 ;

— le "quarter" couvrant la période $[t_{90}; t_{180}[$, de prix Q_0^2 ;

— le "season" couvrant la période $[t_{180}; t_{360}[$, de prix S_0^2.

On notera X_{t_i} l'ensemble des prix (spot et forwards) observés sur le marché à la date t_i.

1. Montrer que la valeur du stockage est supérieure ou égale à :

$$\max_{(u,v)\in[-90a;90a]^2;\, u+v=100} \Big(-u \times Q_0^1 - v \times Q_0^2 + 100 \times S_0^2 \Big). \tag{1}$$

2. On note $P(t_i, v, x)$ la valeur du stockage à l'instant t_i avec le volume v en stock, lorsqu'on observe les prix x sur le marché du gaz. Appliquer le principe de la programmation dynamique en t_i pour poser l'équation donnant P.
3. Donner un exemple de méthode pour calculer le terme d'espérance conditionnelle dans l'équation de la question précédente.
4. Quel serait l'avantage d'une valorisation par réplication du type de l'équation (1) par rapport à une valorisation par programmation dynamique ?

Correction

Exercice I : Mesure ponctuelle de Poisson et fluctuations

1. On remarque que $G(t) = \int h_t(x)\mathcal{N}(dx)$ où $h_t(x) = \mathbf{1}_{[1/t,1]}(x)$. Comme la fonction h est positive, on a $\mathbb{E}[G_t] = \int_{]0,1]} h_t f = g(1/t)$. Comme g est finie sur $]0,1]$ on en déduit que M_t est intégrable pour tout $t \geq 1$. On a aussi $\mathbb{E}[M_t] = g(1/t) - g(1/t) = 0$.
   On déduit de la "master formula" que $\mathbb{E}[M_t^2] = \int_{]0,1]} h_t^2 f$, soit $\mathbb{E}[M_t^2] = F(1) - F(1/t)$.
2. Les temps de discontinuité du processus $M = (M_t, t \geq 1)$ sont $\{1/x_i, i \in I\}$. De plus comme la mesure d'intensité est finie sur tout ensemble $[1/t, 1]$ pour $t \geq 1$, on en déduit que $\mathcal{N}([1/t,1])$ est fini pour tout $t \geq 1$. Autrement dit le processus M a un nombre fini de sauts sur tout intervalle borné de $[1, +\infty[$. La continuité à droite et la limite à gauche sont alors évidentes en tout point de $]1, +\infty[$.
3. On pose $N_t(dx) = \mathbf{1}_{[1/t,1]}(x)\mathcal{N}(dx)$. Pour $1 \leq t$, on a $N_t(dx) = N_s(dx) + N'(dx)$ avec $N'(dx) = \mathbf{1}_{[1/s,1/t[}(x)\mathcal{N}(dx)$. Les supports des mesures aléatoires N_s et N' sont distincts donc $\sigma(N_t) = \sigma(N_s, N')$. Comme $\mathcal{F}_t = \sigma(N_t)$, on en déduit que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Donc $\mathcal{F}$ est une filtration.
4. On a M_t intégrable d'après la question 1. De plus M_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable. En reprenant les notations de la réponse à la question précédente, on a que les propriétés des mesures de Poisson impliquent que les mesures aléatoires N_s et N' sont indépendantes (car les ensembles $[1/s, 1/t[$ et $[1/t, 1]$ sont disjoints). On en déduit que pour toute fonction ℓ :

$$\mathbb{E}[N_t(\ell)|\mathcal{F}_s] = N_s(\ell) + \mathbb{E}[N'(\ell)] = N_s(\ell) + \int_{1/t}^{1/s} \ell(x) f(x)\, dx.$$

   En prenant $\ell(x) = x$, on obtient : $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$. Donc M est une martingale.
5. D'après la question 1, on a $\mathbb{E}[M_t^2] \leq F(1) < +\infty$ pour tout $t \geq 1$. La martingale $M = (M_t, t \geq 1)$ est bornée dans L^2, elle est continue à droite et limitée à gauche donc elle converge p.s. et dans L^2 quand t tend vers l'infini.
6. On utilise la "master formula".
7. Pour $s = 1$, on a $M_s = 0$. Par convergence dominée, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuM_t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuM_\infty}\right].$$

   Comme $\int_{]0,1]} x^2 f(x)\, dx$ est fini et que $|1 + iux - \mathrm{e}^{iux}| \leq u^2x^2$. On obtient par convergence dominée que :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{1/t}^{1} (1 + iux - \mathrm{e}^{iux}) f(x)\, dx = \int_{]0,1]} (1 + iux - \mathrm{e}^{iux}) f(x)\, dx.$$

   On déduit alors de la question précédente que :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuM_\infty}\right] = \exp\left(-\int_{]0,1]} (1 + iux - \mathrm{e}^{iux}) f(x)\, dx\right).$$

8. On calcule la fonction caractéristique de W_t. En utilisant la question 6 et en faisant tendre t vers l'infini, par convergence dominée, on obtient avec $u = v/\sqrt{F(1/s)}$ et $v \in \mathbb{R}$:
$$\mathbb{E}\left[e^{-ivW_s}\right] = e^{-A_s(v)},$$
avec
$$A_s(v) = \int_0^{1/s} \left(1 + \frac{ivx}{\sqrt{F(1/s)}} - e^{ivx/\sqrt{F(1/s)}}\right) f(x)\, dx.$$
On a $F(1/s)) = s^{\alpha-1}$. Avec le changement de variable $y = sx$, il vient avec $\beta = (1+\alpha)/2$:
$$A_s(v) = (1-\alpha)\int_0^1 g_s(v,y) y^{-2-\alpha}\, dy.$$
avec
$$g_s(v,y) = s^{2\beta}\left(1 + ivys^{-\beta} - e^{ivys^{-\beta}}\right).$$
On a $\lim_{s\to+\infty} g_s(v,y) = -v^2y^2/2$. Comme $|g_s(v,y)| \le v^2y^2$ et que $\int_0^1 v^2y^2y^{-2-\alpha}\, dy$ est finie, on a par convergence dominée que :
$$\lim_{s\to+\infty} A_s(v) = -\frac{(1-\alpha)v^2}{2}\int_0^1 y^{-\alpha}\, dy = -\frac{v^2}{2}.$$
On en déduit donc que $(W_s, s \ge 1)$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite quand s tend vers l'infini.

Exercice II : Valorisation d'un stockage gazier

1. Le stockage permet de reproduire n'importe quelle combinaison de forwards correspondant à l'équation (1) : sa valeur est donc au minimum le résultat de l'équation (1).
2. En t_i, la valeur du stockage est donnée par l'équation :
$$P(t_i,v,x) = \sup_{n\in[-a,a];\, 0\le v+z\le V} \left(- zvS + \mathbb{E}\left[P(t_{i+1}, v+z, X_{t_{i+1}}) \middle| X_{t_i} = x\right]\right) \quad (2)$$
en notant S le prix spot associé au vecteur des prix x. La décision de gestion est la valeur de z qui maximise le second membre de l'équation (2).
On peut aussi remarquer que la gestion du stockage est bang-bang puisque le coût des opérations dépend linéairement du volume ; l'équation ci-dessus devient alors :
$$P(t_i,v,x) = \max_{z\in\{-\min(a;v);\min(a;V-v)\}} \left(-zvS + \mathbb{E}\left[P(t_{i+1}, v+z, X_{t_{i+1}}) \middle| X_{t_i} = x\right]\right). \quad (3)$$
3. On peut par exemple utiliser un modèle de prix par arbre, l'algorithme de Longstaff-Schwartz, ou la quantification.
4. La valorisation par réplication statique de l'équation (1) permet d'obtenir un prix que l'on peut couvrir parfaitement. À l'inverse, dans le cadre d'un marché incomplet à cause du risque de base (c'est-à-dire de l'absence de produits de couverture à la granularité du produit à couvrir), il n'est pas possible de sécuriser la valorisation obtenue par programmation dynamique.