Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 6 mars 2017 14h30-16h30

1 Inverse d'une exponentielle de Doléans-Dade

Les questions 7 à 10 portent sur la théorie de la mesure et peuvent être traitées indépendamment des questions précédentes. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale à valeurs réelles et $(Y_t = \mathcal{E}(Z)_t)_{t\geq 0}$ son exponentielle de Doléans-Dade.

1. Donner l'équation différentielle stochastique satisfaite par $(Y_t)_{t\geq 0}$ et expliciter sa solution.

On suppose que $\mathbb{P}(\forall t > 0,\ \Delta Z_t > -1) = 1$, ce qui assure que $\mathbb{P}(\forall t \geq 0,\ Y_t > 0) = 1$ et que l'on peut définir $X_t = 1/Y_t$ et exprimer sa dynamique dX_t en appliquant la formule d'Itô à $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $f(y) = 1/y$.

2. Vérifier que $dX_t = X_{t-}\left(-dZ_t + \frac{(\Delta Z_t)^2}{1+\Delta Z_t} + d\langle Z^c\rangle_t\right)$. Justifier que $\xi_t = \sum_{s\leq t} \frac{(\Delta Z_s)^2}{1+\Delta Z_s}$ est un processus croissant à valeurs finies et que $\forall t \geq 0,\ X_t = \mathcal{E}(-Z + \xi + \langle Z^c\rangle)_t$.

On suppose désormais que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy de triplet (b, c, F) vérifiant $\boxed{F((-\infty,-1]) = 0}$. On note $\tilde{F}$ l'image de la mesure F par l'application $\boxed{\varphi : z \mapsto -\frac{z}{1+z}}$.

3. Donner le triplet caractéristique du processus de Lévy $(\ln(Y_t))_{t\geq 0}$ et en déduire celui de $(\ln(X_t))_{t\geq 0}$.

4. Vérifier que $(-Z_t + \xi_t + \langle Z^c\rangle_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy de triplet caractéristique $\left(c - b + \int_{\mathbb{R}} \left(z 1_{\{|z|\leq 1\}} - \frac{z}{1+z} 1_{\{|\frac{z}{1+z}|\leq 1\}}\right) F(dz), c, \tilde{F}\right)$.
   Retrouver le triplet caractéristique de $(\ln(X_t))_{t\geq 0}$.

5. On suppose que $\tilde{F} = F$. Montrer que les images de F par $z \mapsto \ln(1+z)$ et par $z \mapsto -\ln(1+z)$ sont égales. Lorsque $2b = c + \int_{\mathbb{R}} \left(z 1_{\{|z|\leq 1\}} - \frac{z}{1+z} 1_{\{|\frac{z}{1+z}|\leq 1\}}\right) F(dz)$, retrouver ce résultat en vérifiant que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont même loi.

6. Vérifier que $\forall z > -1,\ \varphi(\varphi(z)) = z$, c'est-à-dire que φ est une involution de $]-1, +\infty[$. Pourquoi cette propriété n'est-elle pas surprenante?

Nous allons maintenant étudier l'égalité $\tilde{F} = F$.

7. Lorsque F possède la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, vérifier que $\tilde{F}$ possède la densité $\tilde{f}(z) = f\left(-\frac{z}{1+z}\right)\frac{1}{(1+z)^2}$.

8. Trouver la constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que pour $f(z) = 1_{\{z>-1\}}|z|^\beta$, $\tilde{f} = f$ et vérifier que $\int_{-1}^{\infty}(z^2 \wedge 1)|z|^\beta dz < \infty$.

9. Soit ν une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\nu(]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz) < \infty$ et $\tilde{\nu}$ son image par φ.
   (a) Vérifier que $\tilde{\nu}(]-\infty, 0]) = 0$.
   (b) Quelle est l'image de $\tilde{\nu}$ par φ? En déduire que si $F = \nu + \tilde{\nu}$, $\tilde{F} = F$.
   (c) Que vaut $\int_{]0,+\infty[} \frac{z^2}{(1+z)^2}\tilde{\nu}(dz)$? Remarquer que $\forall z \in \mathbb{R}_+,\ \frac{z^2}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{4}(z^2 \wedge 1)$ et en déduire que $\int_{]0,+\infty[}(z^2 \wedge 1)\tilde{\nu}(dz) < \infty$ puis que $\int_{\mathbb{R}}(z^2 \wedge 1)(\nu(dz) + \tilde{\nu}(dz)) < \infty$.

10. Inversement, si $\tilde{F} = F$, vérifier que $F = \nu + \tilde{\nu}$ avec $\tilde{\nu}$ l'image par φ de la mesure ν définie par $\nu(dz) = 1_{\{-1<z<0\}}F(dz)$ et que $\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz) < \infty$.

2 Valorisation d'une centrale au gaz

On considère une centrale au gaz, de puissance P (MW), de rendement $1/h$ (pour h MWh de gaz brûlé, on produit 1 MWh d'électricité) et dont le taux d'émission de CO2 pour un MWh de gaz brûlé est c (tCO2/MWh). On se place au temps $t = 0$, et on considère les dates $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ telles que :

- $t_0 = 0$;
- pour $0 \leq i < n$, $t_{i+1} - t_i = 1$ heure.

On gère la centrale à pas horaire entre t_0 et t_n. Pour chaque $t_i < t_n$, on décide donc d'utiliser ou non la centrale :

- si la centrale est éteinte, elle peut soit rester éteinte, soit être allumée ; dans ce cas, il faut alors payer un coût de démarrage $P \times K$ (K est exprimé en €/MWh) ;
- si la centrale est allumée, elle peut soit rester allumée, soit être éteinte.

En-dehors des coûts de démarrage, on suppose qu'il n'existe aucune autre contrainte sur le fonctionnement de la centrale.
On note par ailleurs : $X_t = (S_t^e, S_t^g, S_t^{CO2})$ avec

- S_t^e le prix spot de l'électricité en t, exprimé en €/MWh ;
- S_t^g le prix spot du gaz en t, exprimé en €/MWh ;
- S_t^{CO2} le prix spot du CO2 en t, exprimé en €/tCO2.

1. Donner le payoff de la centrale sur l'heure $[t_{n-1}; t_n]$:
    - d'abord en supposant que la centrale est déjà allumée en t_{n-1} ;
    - puis en supposant que la centrale est éteinte en t_{n-1}.
2. Expliquer pourquoi la valeur de la centrale est inférieure à :
$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big[P \times (S_{t_i}^e - h(S_{t_i}^g + cS_{t_i}^{CO2}))^+\Big]. \tag{1}$$
3. On note $V(t_i, s, x)$ la valeur de la centrale à l'instant t_i, lorsque la centrale est dans l'état s ($s = 0$ si la centrale est éteinte, $s = 1$ si la centrale est allumée) et qu'on observe sur les marchés spot et à terme le vecteur de prix x. Appliquer le principe de la programmation dynamique en t_i pour poser l'équation donnant V.
4. Toutes choses égales par ailleurs, quel serait l'impact en termes de valorisation d'introduire des pics de prix dans le modèle ? En pratique, serait-on capable de sécuriser les revenus ou les pertes liés aux pics de prix ?