Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

<u>Examen du lundi 5 mars 2018 14h30-16h30</u>

Subordinateur

Les processus de Lévy p.s. positifs (i.e. $(X_t, t \geq 0)$ tel que p.s. $X_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$) sont appelés des subordinateurs.

1. Vérifier qu'il existe des processus de Lévy p.s. positifs.
2. Montrer qu'un subordinateur est p.s. croissant.

L'objectif du problème est d'identifier les triplets caractéristiques des subordinateurs.

On se donne une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que $h(x) = x$ sur un voisinage de 0. Soit X une variable aléatoire infiniment divisible de triplet caractéristique (b, c, F) où $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \ell^2 \, F(d\ell) < +\infty$. On note μ la loi de X et $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier. On rappelle que $\hat{\mu}(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] = \mathrm{e}^{\psi(u)}$ où

$$\psi(u) = ibu - c\frac{u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} F(d\ell) \left(\mathrm{e}^{iu\ell} - 1 - iuh(\ell)\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $(X_k^n, k \in \mathbb{N}^*)$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité μ_n, telles que $\sum_{k=1}^n X_k^n$ a même loi que X. Soit N_n une variable aléatoire indépendante de loi de Poisson de paramètre n. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{N_n} X_k^n$.

3. Montrer que $(Z_n, n \geq 1)$ converge en loi vers X.
4. Montrer, en utilisant le cours, que $\lim_{n\to\infty} n\mu_n(g) = F(g)$ pour toute fonction g continue bornée et nulle sur un voisinage de 0.

On suppose dorénavant que X est positive p.s. : $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.

5. Vérifier que $X = cG + X'$ où G et X' sont indépendants et G de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.
6. En déduire que $c = 0$.
7. Montrer par l'absurde que $\mathbb{P}(X_1^n \leq -a) = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. En déduire, à l'aide de la question 2, que $F(]-\infty, 0]) = 0$.
9. Soit $\lambda > 0$. On pose $g_\lambda(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda Z_n}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}]$. En déduire que la suite $(n\mu_n(g_\lambda), n \in \mathbb{N}^*)$ est bornée par une constante C_λ.
10. En considérant des régularisations des fonctions $f_\varepsilon(x) = x\mathbf{1}_{[\varepsilon,1]}(x)$, déduire de la question précédente que $\int_{\mathbb{R}^+} (1 \wedge \ell) \, F(d\ell) < +\infty$.
11. Déduire de ce qui précède que

$$\psi(u) = ib'u + \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell) \left(\mathrm{e}^{iu\ell} - 1\right). \tag{1}$$

On admet que (1) implique que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}] = \mathrm{e}^{-b'\lambda - \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\ell}\right)}. \tag{2}$$

12. Montrer que la fonction $\varphi(\lambda) = b'\lambda + \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\ell}\right)$ est croissante. Calculer φ' en le justifiant et en déduire que b' est positif.
13. Identifier le triplet caractéristique d'un subordinateur.