Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 4 mars 2019 14h30-16h30

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

I Intégrabilité

1. Soit Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que $Y+Z$ est intégrable si et seulement si Y et Z sont intégrables. Pour la réciproque, on pourra considérer $\mathbb{E}[|Y+Z||Z]$.
2. Soit $N(dr,dv) = \sum_{i\in I} \delta_{(r_i,V_i)}(dt,dv)$ une mesure ponctuelle de Poisson sur $[0,t]\times\mathbb{R}$ d'intensité $dr \times \mu(dv)$, où μ est une mesure finie. On définit la fonction f sur $[0,t]\times\mathbb{R}$ par $f(r,x) = x$ et on a $N(f) = \sum_i V_i$.
   (a) On suppose $\mu(]-\infty,0[) = 0$. Montrer que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{[0,+\infty[} x\ \mu(dx) < +\infty$.
   (b) Déduire des questions précédentes que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |x|\ \mu(dx) < +\infty$.
   (c) (Facultatif). On ne suppose plus μ finie mais simplement que μ est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$: Il existe une partition $(E_n, n\in\mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |x|\ \mu(dx) < +\infty$.

Soit h une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que $h(x) = x$ sur un voisinage de 0. Soit $(X_t, t\geq 0)$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) de caractéristique (b,c,F) où $b\in\mathbb{R}$, $c\geq 0$ et F est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1\wedge \ell^2\ F(d\ell) < +\infty$. On rappelle que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX_t}] = \mathrm{e}^{t\psi(u)}$ où

$$\psi(u) = ibu - c\frac{u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} F(d\ell)\left(\mathrm{e}^{iu\ell} - 1 - iuh(\ell)\right).$$

3. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur (b,c,F) pour que X_t soit intégrable.
4. (Facultatif). Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur (b,c,F) pour que X_t soit de carré intégrable.

II II Dualité Call-Put dans un modèle exponentiel de Lévy

On s'intéresse à un sous-jacent de valeur initiale $x>0$ qui évolue comme l'exponentielle $X_t^x = xe^{Z_t}$ d'un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$. On note $b\in\mathbb{R}$, σ^2 où $\sigma\in\mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1\wedge z^2 F(dz) < +\infty$ le triplet tel que

$$\forall t\geq 0,\ \forall u\in\mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = e^{t\psi(u)} \text{ où } \psi(u) = ibu - \frac{\sigma^2u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuz} - 1 - iuz1_{\{|z|\leq 1\}})F(dz).$$

On se donne une maturité $T\in]0,+\infty[$ et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s^x, s\leq t)$.

1. Montrer que $(-Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy sous $\mathbb{P}$ et donner son triplet de caractéristiques.
2. Rappeler la représentation de Lévy-Itô du processus $(Z_t)_{t\geq 0}$.

3. On suppose d'abord que F **est la mesure nulle, que** $\sigma > 0$ **et que** $b = r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}$. On note $C_e(x,y,r,\delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right)$, $C_a(x,y,r,\delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right)$, $P_e(x,y,r,\delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(y - X_T^x)^+\right)$ et $P_a(x,y,r,\delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(y - X_\tau^x)^+\right)$ les prix des Calls et Puts européens et américains de strike $y > 0$ et de maturité T lorsque r désigne le taux d'intérêt sans risque, δ le taux de dividendes versé par l'actif et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$.
   (a) Vérifier que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.
   (b) Vérifier que sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{(\delta-r)T+Z_T}$ par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(-Z_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy et donner son triplet de caractéristiques ? En déduire que
   $$C_e(x,y,r,\delta) = P_e(y,x,\delta,r).$$
   (c) Pour $t \geq 0$, on pose $Y_t^y = ye^{-Z_t}$. Montrer que pour $\tau \in \mathcal{T}$,
   $$\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\left(X_\tau^x - y\right)^+\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\delta\tau}\left(x - Y_\tau^y\right)^+\right).$$
   Vérifier que $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s^y, s \leq t)$ et en déduire que $C_a(x,y,r,\delta) = P_a(y,x,\delta,r)$.
4. On suppose désormais que $\int_{\mathbb{R}} e^z F(dz) < +\infty$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{Z_t})$ et en déduire b pour que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\leq T}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.

   Dans la suite, c'est cette valeur que l'on fixe pour b.
   (b) Montrer que pour un processus de Lévy $(\zeta_t)_{t\leq T}$ dont on précisera le triplet de caractéristiques $\mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}(x - ye^{\zeta_T})^+\right)$. Vérifier que $(e^{(r-\delta)t+\zeta_t})_{t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ pour la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(\zeta_s, s \leq t)$. Montrer que si $\tilde{\mathcal{T}}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$
   $$\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right) = \sup_{\tau\in\tilde{\mathcal{T}}} \mathbb{E}\left(e^{-\delta\tau}(x - ye^{\zeta_\tau})^+\right).$$
   (c) À quelle condition sur la mesure de Lévy F le marché est-il symétrique au sens où la mesure de Lévy de $(\zeta_t)_{t\leq T}$ est égale à F ? Comment cette condition s'écrit-elle dans le cas où F possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

Correction

I Intégrabilité

1. Si Y et Z sont intégrables alors $Y+Z$ est intégrable.
   On suppose que $Y+Z$ est intégrable. Alors $\mathrm{P}_Z(dz)$-p.p. $\mathbb{E}[|Y+Z|\,|Z=z]$ est fini. Comme Y et Z sont indépendants, on a $\mathrm{P}_Z(dz)$-p.p. $\mathbb{E}[|Y+Z|\,|Z=z]=\mathbb{E}[|Y+z|]$. On en déduit que $\mathbb{E}[|Y|]$ est fini et donc Y est intégrable et $Z=(X+Y)-Y$ aussi.
2. (a) On a
   $$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda N(f)}\right]=\mathrm{e}^{-t\int \mu(dx)\,\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda f(x)}\right)}.$$
   Comme $N(f)\geq 0$ et $f(x)\geq 0$ $\mu(dx)$-p.p., on peut dériver cette égalité par rapport à λ, et faire tendre λ vers 0. Il vient :
   $$\mathbb{E}[N(f)]=t\int f(x)\,\mu(dx).$$
   Donc $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{[0,+\infty]} x\,\mu(dx)$ est fini.

   (b) On a $N(f)=N_+(f)+N_-(f)$ où N_+ et N_- sont des mesures ponctuelles de Poisson indépendantes d'intensité $dr\times \mathbf{1}_{\{v\geq 0\}}\mu(dv)$ et $dr\times \mathbf{1}_{\{v<0\}}\mu(dv)$. La question 1 assure que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $N_+(f)$ et $N_-(f)$ sont intégrables. La question 2-(a) assure que ceci est vrai si et seulement si $\int_{[0,+\infty]} x\,\mu(dx)$ et $\int_{]-\infty,0[} x\,\mu(dx)$ sont finis.

   (c) Les démonstrations des questions 2-(a) et 2-(b) ne changent pas si μ n'est pas finie.
3. Quitte à considérer $X_t+t\int(h(x)-x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}})\,dx$, on peut supposer que $h(x)=\mathbf{1}_{||x|\leq 1\}}$. On pose pour $k\in\mathbb{N}^*$, $Z_t^{(k)}=\sum_{s\leq t}\Delta X_s\mathbf{1}_{\{|\Delta X_s|\in]1/k,1/(k-1)]\}}$. On remarque que les processus $(Z^{(k)},k\in\mathbb{N}^*)$ sont des processus de Poissons composés indépendants de paramètres $(\theta_k,F^{(k)}/\theta_k)$ où $\theta_k=\int_{I_k}F(dx)$ et $F^{(k)}(dx)=\mathbf{1}_{I_k}(x)\;F(dx)$, avec $I_k=]1/k,1/(k-1)]$.
   Le théorème de représentation assure que $X_t=bt+cW_t+Z_t^{(1)}+M_t$, où W est un mouvement Brownien standard et $M=\sum_{k\geq 2}M^{(k)}$ avec $M_t^{(k)}=Z_t^{(k)}-\int x\;F^{(k)}(dx)$, et les processus W, $Z^{(1)}$ et M sont indépendants. La variable gaussienne W_t est de carré intégrable. Le théorème de représentation assure que M_t est de carré intégrable. On déduit de la question 1 que X_t est intégrable si et seulement si $Z_t^{(1)}$ est intégrable. La question 2-(b) assure que $Z_t^{(1)}$ est intégrable si et seulement si $|x|\mathbf{1}_{||x|>1\}}$ est F intégrable.
   On en déduit que X_t est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}(|\ell|\wedge\ell^2)\;F(d\ell)<+\infty$.
4. De manière similaire, on montre que :
   - $Y+Z$, où Y et Z sont indépendants, est de carré intégrable si et seulement si Y et Z sont de carré intégrable.
   - La mesure ponctuelle N de la question 2 est de carré intégrable si et seulement si $\int(|x|+x^2)\;\mu(dx)<+\infty$.

   On en déduit alors que X_t est de carré intégrable si et seulement si $Z^{(1)}$ est de carré intégrable et donc si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}\ell^2\;F(d\ell)<+\infty$.