Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 2 mars 2020 14h30-16h30

1 Fonction caractéristique, martingales et exponentielles

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un procesus de Lévy de triplet caractéristique (b, c, F) avec $c > 0$ (pour la fonction de troncature $h(x) = x1_{\{|x|\leq 1\}}$) et de filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. On note $(X_t^c)_{t\geq 0}$ sa partie martingale locale continue, $N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$ sa mesure de sauts et $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - dtF(dx)$ sa mesure de sauts compensée.

1. Que peut-on dire de N et de $(W_t = \frac{1}{\sqrt{c}}X_t^c)_{t\geq 0}$? Comment la décomposition
$$dX_t = bdt + \sqrt{c}dW_t + \int_{x\in\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}N(dt, dx) + \int_{x\in\mathbb{R}} x1_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(dt, dx)$$
s'appelle-t-elle?

2. Que vaut $\mathbb{E}[e^{iuX_t}]$ pour $u \in \mathbb{R}$?

Pour $u \in \mathbb{R}$, on note

$$M_t^u = e^{iuX_t - t\Psi_{b,c,F}(u)} \text{ où } \Psi_{b,c,F}(u) = ibu - \frac{cu^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)$$
$$Z_t^u = iu\sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\tilde{N}(ds, dx)$$

3. Remarquer que pour $x \in \mathbb{R}$, $|e^{iux} - 1| \leq (|u| \vee 2)(|x| \wedge 1)$. En déduire que Z_t^u est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable. Exprimer ΔZ_t^u en fonction de ΔX_t. Que vaut $[Z^u, Z^u]_t$?

4. Vérifier que $\forall T > 0$, $\sup_{t\in[0,T]} |M_t^u| \leq e^{T(-\Re(\Psi_{b,c,F}(u))\vee 0)}$ où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

5. Vérifer que
$$de^{iuX_t} = e^{iuX_{t-}} \left(iudX_t - \frac{cu^2}{2}dt + \int_{x\in\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)N(dt, dx) \right).$$
En prenant garde à ce que toutes les intégrales que l'on écrira contre $N(dt, dx)$, $\tilde{N}(dt, dx)$ et $dtF(dx)$ soient bien définies, en déduire que
$$de^{iuX_t} = e^{iuX_{t-}} (dZ_t^u + \Psi_{b,c,F}(u)dt).$$

6. En déduire dM_t^u. Conclure que $M_t^u = \mathcal{E}(Z^u)_t$ et justifier que ce processus est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

7. Pour $v, w \in \mathbb{R}$, vérifier que
$$d[M^v, M^w]_t = M_{t-}^v M_{t-}^w \left(\int_{x\in\mathbb{R}} (e^{ivx} - 1)(e^{iwx} - 1)N(dt, dx) - cvwdt \right).$$
Écrire $m_t^{v,w} := [M^v, M^w]_t + (\Psi_{b,c,F}(v) + \Psi_{b,c,F}(w) - \Psi_{b,c,F}(v + w)) \int_0^t M_{s-}^v M_{s-}^w ds$ comme une intégrale contre $\tilde{N}$ et conclure que ce processus est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

8. En déduire que $M_t^v M_t^w e^{t\left(\Psi_{b,c,F}(v)+\Psi_{b,c,F}(w)-\Psi_{b,c,F}(v+w)\right)}$ est également une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable. Pour quel choix de u dans la question 6, ce résultat est-il une conséquence de cette question?

2 Modèle à 2 facteurs

On s'intéresse ici à la modélisation des prix du forward sur électricité par un modèle à deux facteurs. On en dégage quelques propriétés.
Pour cela, on note $F(t,T)$ la valeur en $t \in [0,T]$ du forward unitaire livrant en T. On suppose qu'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ sous laquelle la dynamique du forward est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}F(t,T)}{F(t,T)} = \sigma_S e^{-\alpha(T-t)}\mathrm{d}W_t^S + \sigma_L \mathrm{d}W_t^L \tag{1}$$

où l'on a noté :

- $\sigma_S > 0$ et $\sigma_L > 0$ les volatilités court-terme et long-terme,
- $\alpha > 0$ le coefficient de retour à la moyenne,
- W^S et W^L deux mouvements browniens standards sous $\mathbb{Q}$ corrélés avec une corrélation ρ.

On note de plus $\mathcal{F}_t = \sigma((W_s^S, W_s^L), s \in [0,t])$. On suppose enfin donnée la courbe initiale $(F(0,T), T > 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
On admet que la solution de (1) s'écrit sous la forme :

$$F(t,T) = F(0,T)\exp\left(\int_0^t \sigma_S e^{-\alpha(T-u)}\mathrm{d}W_u^S + \sigma_L W_t^L - \frac{1}{2}\int_0^t v(u,T)^2 \mathrm{d}u\right)$$

où $[0,T] \ni t \mapsto v(t,T)$ est une fonction déterministe que nous allons calculer.

1. Calculer $d\phi(t, X_t, Y_t)$ pour $X_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_S e^{-\alpha(T-u)}\mathrm{d}W_u^S$, $Y_t = \sigma_L W_t^L$ et
$$\phi(t,x,y) = F(0,T)\exp\left(x + y - \frac{1}{2}\int_0^t v(u,T)^2\mathrm{d}u\right).$$
2. En utilisant le fait que $F(t,T)$ est solution de (1), déduire l'expression de $v(t,T)$.
3. Pour $0 \le s \le t \le T$, écrire $F(t,T)$ à l'aide $F(s,T)$ et de $\displaystyle\int_s^t \sigma_S e^{-\alpha(T-u)}\mathrm{d}W_u^S + \sigma_L W_t^L$ et en déduire que $(F(t,T), t \in [0,T])$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{Q}$.
4. Quelles sont les caractéristiques observées sur le marché pour les produits spot et forward que le modèle 2 facteurs permet de reproduire? Quels effets ne permet-il pas de représenter?