Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 8 mars 2021 14h30-16h30

I Absolue continuité

Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Les mesures considérées sont des mesures positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note λ la mesure de Lebesgue. On dit qu'une mesure μ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesque) s'il existe une fonction mesurable positive f, appelée densité, telle que $\mu = f\lambda$ (*i.e.* $\int_\mathbb{R} g(x)\,\mu(dx) = \int_\mathbb{R} g(x)f(x)\,\lambda(dx)$ pour toute fonction g mesurable positive). On dit qu'une variable aléatoire réelle X de loi μ est à densité si μ est absolument continue. On dit qu'une mesure μ est étrangère (à la mesure de Lebesque) s'il existe un borélien $B \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle (*i.e.* $\lambda(B) = 0$) qui porte la mesure μ : $\mu(B^c) = 0$. Par exemple la mesure de Dirac δ_a en $a \in \mathbb{R}$ est étrangère (choisir $B = \{a\}$). On admet qu'une mesure μ se décompose de manière unique en une partie absolument continue μ_c et en une partie étrangère μ_e :

$$\mu = \mu_\mathrm{c} + \mu_\mathrm{e}.$$

On note X une variable aléatoire réelle de loi indéfiniment divisible de triplet caractéristique (b, c, F). On souhaite établir une condition suffisante [1] [2] pour que X soit à densité.

1. Quelques résultats sur l'absolue continuité. Soit μ une mesure.
   (a) Montrer que μ est absolument continue si et seulement si $\mu(B) = 0$ pour tout borélien B de mesure de Lebesgue nulle.
   (b) On suppose que l'on peut écrire $\mu = \mu'_n + \mu_{n,\mathrm{c}}$ où $\mu_{n,\mathrm{c}}$ est une mesure absolument continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \mu'_n(\mathbb{R}) = 0$ alors μ est absolument continue.
2. Soit μ et ν deux mesures finies. La mesure $\mu \star \nu$ (appelé produit de convolution) est définie par :
$$\int_\mathbb{R} g(x)\,(\mu \star \nu)(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)\,\mu(dx)\nu(dy).$$
   (a) On suppose que μ est absolument continue de densité f. Montrer que $\mu \star \nu$ est absolument continue de densité g définie par :
$$g(z) = \int_\mathbb{R} f(z-y)\,\nu(dy), \quad z \in \mathbb{R}.$$
   (b) Montrer que $\hat{\rho}(u) = \hat{\mu}(u)\,\hat{\nu}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ où $\rho = \mu \star \nu$ et $\hat{\kappa}(u) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{iux}\ \kappa(dx)$ est la transformée de Fourier de la mesure κ.
   (c) Vérifier que si Y et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes de loi de probabilités μ et ν, alors $Y + Z$ est de loi $\mu \star \nu$.
3. On suppose $c > 0$.
   (a) Vérifier que la loi gaussienne de variance c est à densité.
   (b) Montrer à l'aide des questions 2-(a,c) que X est à densité.

On note F_c et F_e les parties absolument continue et étrangère de la mesure F : $F = F_\mathrm{c} + F_\mathrm{e}$.

1. P. Hartman and A. Wintner. On the infinitesimal generators of integral convolutions. *Amer. J. Math.*, 64 :273-298, 1942.
2. H. Tucker. On a necessary and sufficient condition that an infinitely divisible distribution be absolutely continuous. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118 :316-330, 1965.

4. Rappeler les hypothèses sur le triplet caractéristique (b, c, F), puis vérifier que le triplet $(0, 0, F_{\mathrm{c}})$ est un triplet caractéristique.
5. On suppose $F_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) = +\infty$. Soit ν la loi indéfiniment divisible de triplet caractéristique $(0, 0, F_{\mathrm{c}})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la mesure $F_n(dx) = \mathbf{1}_{\{|x|>1/n\}} F_{\mathrm{c}}(dx)$ et ν_n la loi indéfiniment divisible de triplet caractéristique $(0, 0, F_n)$.
   (a) Vérifier que ν_n est une loi de Poisson composé et montrer que $\nu_n = a_n\delta_0 + \nu_{n,\mathrm{c}}$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0 et $\nu_{n,\mathrm{c}}$ la partie absolument continue de ν_n.
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   (c) Déduire que, pour une mesure de probabilité κ_n que l'on explicitera :
   $$\nu = \kappa_n \star \nu_n = a_n\kappa_n + \kappa_n \star \nu_{n,\mathrm{c}}.$$
   (d) Déduire des questions 1-(b) et 2-(a,c) que ν est à densité, puis que X est à densité.

Il existe des exemples où la variable aléatoire X est à densité bien que $c = 0$ et $F_{\mathrm{c}} = 0$.

II Planning de production en présence d'un risque de panne

On considère un producteur d'électricité qui s'est engagé à satisfaire la courbe de charge :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Demande (MWh)	150	250	150	350	150

Pour ce faire, le producteur dispose de trois centrales, P1, P2 et P3, de caractéristiques :

	Coût (€/MWh)	Prod. maxi. par jour (MWh)
P1	10	200
P2	20	100
P3	50	200

L'objectif du producteur est de satisfaire la demande en minimisant ses coûts. En cas de défaut de production, il paye une pénalité de 100 € par MWh non fourni.

1. Donner le planning de production du producteur, c'est-à-dire les niveaux de production (en MWh) pour chaque centrale pour chaque jour. Quel est le coût de la production (en €) pour la semaine entière ?
2. On considère désormais que le producteur a accès à l'option suivante : recevoir 100 MWh entre lundi et vendredi (inclus), en deux livraisons journalières de 50 MWh chacun. Quel est le prix maximal que le producteur est prêt à payer pour l'option ? S'il achète cette option, quels jours va-t-il l'exercer ?
3. On considère maintenant que la centrale P1 est susceptible d'être en panne :
   — il y a 1/4 de chances que la centrale tombe en panne une fois dans la semaine ;
   — en cas de panne dans la semaine, le jour de panne est une uniforme ; et la centrale est arrêtée 2 jours (le jour de la panne et le lendemain) ;
   — enfin, il y a au maximum une panne dans la semaine.

   Par exemple, si la centrale tombe en panne mardi, elle sera arrêtée mardi et mercredi, et pourra fonctionner jeudi et vendredi.
   (a) Énumérer les différentes configurations possibles pour la semaine en fonction du jour de panne, les plannings de production correspondants et le côut de la production dans chaque cas. Y a-t-il un risque que le producteur fasse défaut ?
   (b) Dans ces conditions, quel prix le producteur est-il prêt à payer pour l'option de la question 2 ?

Correction

I Absolue continuité

1. (a) On suppose $\mu(B) = 0$ pour tout borélien B de mesure de Lebesgue nulle. Si $\mu_{\mathrm{e}} \neq 0$, il existe un borélien de mesure de Lebesgue nulle ($\lambda(B) = 0$) qui supporte μ_{e} ($\mu_{\mathrm{e}}(B^c) = 0$). On déduit de l'hypothèse et de la décomposition que $0 = \mu(B) = \mu_{\mathrm{c}}(B) + \mu_{\mathrm{e}}(B)$ et donc $\mu_{\mathrm{e}}(B)$, soit $\mu_{\mathrm{e}} = 0$. Donc μ est absolument continue.

   Réciproquement, si μ est absolument continue, on a pour tout borélien B de mesure de Lebesgue nulle, en notant f la densité de μ_{c} :

   $$\mu(B) = \mu_{\mathrm{c}}(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) f(x)\, \lambda(dx) = 0.$$

   (b) Soit B un borélien de mesure de Lebesgue nulle. On a d'après la question précédente que $\mu(B) = \mu'_n(B) \leq \mu'_n(\mathbb{R})$. Ceci étant valide pour tout n, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\mu(B)$. On déduit de la question précédente que μ est absolument continue.

2. (a) Soit g une fonction mesurable bornée. On a :

   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\, (\mu \star \nu)(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x+y) f(x) \lambda(dx) \right) \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) f(z-y) \lambda(dz) \right) \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f(z-y) \nu(dy) \right) \lambda(dz).\end{aligned}$$

   Donc $\mu \star \nu$ a pour densité $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(z-y)\nu(dy)$.

   (b) On a par définition de $\mu \star \nu$, pour $u \in \mathbb{R}$:

   $$\hat{\rho}(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{iu(x+y)}\, \mu(dx)\nu(dy) = \hat{\mu}(u)\, \hat{\nu}(u).$$

   (c) Si Y est Z sont indépendantes, alors

   $$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iu(Y+Z)}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuY}]\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ}] = \hat{\mu}(u)\, \hat{\nu}(u) = \hat{\rho}(u).$$

   Ceci assure que la loi de $X + Y$ est $\rho = \mu \star \nu$.

3. (a) La densité est $f(x) = (2\pi c)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-(x-m)^2/2c}$, où m est la moyenne de la gaussienne.

   (b) On a que X a même loi que $G + X'$ où G est gaussienne centrée de variance $c > 0$ et X' est de loi infiniment divisible associée au triplet $(b, 0, F)$. On déduit de la question 2-(c) que la loi de X est la convolution de la loi (à densité) de G et de X'. Elle est donc continue, d'après la question 2-(a).

4. La mesure $F(dx)$ ne charge pas $\{0\}$ et intègre $1 \wedge x^2$. Comme $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, F(dx) \geq \int_{\mathbb{R}} g(x)\, F_{\mathrm{c}}(dx)$ pour toute fonction g mesurable positive, en prenant $g = \mathbf{1}_{\{0\}}$ et $g(x) = 1 \wedge x^2$, on en déduit que $F_{\mathrm{c}}(dx)$ ne charge pas $\{0\}$ et intègre $1 \wedge x^2$. Ceci assure que $(0, 0, F_{\mathrm{c}})$ est un triplet caractéristique.

5. (a) On a $F_n(\mathbb{R}) < +\infty$. Quitte à prendre n assez grand, on peut supposer que $F_n(\mathbb{R}) > 0$. La mesure de probabilité ν_n est donc une loi de Poisson composé d'intensité $F_n(\mathbb{R})$ et de probabilité de mesure $F_n/F_n(\mathbb{R})$. En particulier, ν_n est la loi de $Z_n = \sum_{k=1}^{N_n} Y_{k,n}$, où N_n est de loi de Poisson de Paramètre $F_n(\mathbb{R})$ et les variables aléatoires $(Y_{k,n}, k \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes de loi $F_n/F_n(\mathbb{R})$. On remarque que la variable aléatoire $Y_{1,n}$ est à densité. On a donc :

$$Z_n = \mathbf{1}_{\{N_n \geq 1\}}(Y_{1,n} + Z'_n), \quad \text{avec} \quad Z'_n = \mathbf{1}_{\{N_n \geq 2\}} \sum_{k=1}^{N_n} Y_{k,n}.$$

On pose $a_n = \mathbb{P}(N_n = 0)$. Comme $Y_{1,n}$ est indépendant de N_n et Z'_n, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ_n}] &= a_n + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuY_{1,n}}\ \mathrm{e}^{iuZ'_n}\, \mathbf{1}_{\{N_n \geq 1\}}] \\ &= a_n + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuY_{1,n}}]\mathbb{E}[\,\mathrm{e}^{iuZ'_n}\, \mathbf{1}_{\{N_n \geq 1\}}] \\ &= a_n + (1 - a_n)\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuY_{1,n}}]\mathbb{E}[\,\mathrm{e}^{iuZ''_n}],\end{aligned}$$

où Z''_n est distribué comme Z'_n conditionnellement à $\{N_n \geq 1\}$. On a obtenu :

$$\nu_n = a_n\delta_0 + (1 - a_n)\kappa'_n \star \nu''_n,$$

où κ'_n est la loi de $Y_{1,n}$ et ν''_n la loi de Z''_n. Comme κ_n est absolument continue, on déduit de la question 2 que la mesure $\nu_{n,\mathrm{c}} = (1 - a_n)\kappa'_n \star \nu''_n$ est absolument continue.

(b) Comme $Y_{1,n}$ est à densité, on en déduit que $Y_{1,n} + Z'_n$ est à densité, et donc :

$$a_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(N_n = 0) = \mathrm{e}^{-F_n(\mathbb{R})}.$$

Comme $F_\mathrm{c}(\mathbb{R}) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Soit X_1 de loi ν. Comme $F_\mathrm{c} = F_n + F'_n$ avec $F'_n(dx) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1/n\}}F_\mathrm{c}(dx)$, on en déduit avec V_n de loi infiniment divisible de triplet caractéristique $(0, 0, F'_n)$, indépendant de Z_n que X_1 a même loi que $V_n + Z_n$. En notant κ_n la loi de V_n, on a donc obtenu :

$$\nu = \kappa_n \star \nu_n = a_n\kappa_n + \kappa_n \star \nu_{n,\mathrm{c}}.$$

(d) Comme la mesure $\nu_{n,\mathrm{c}}$ est absolument continue, on en déduit que la mesure $\kappa_n \star \nu_{n,\mathrm{c}}$ est également absolument continue. Enfin, on a $a_n\kappa_n(\mathbb{R}) = a_n$. On déduit alors de la question 1-(b) et des deux questions précédentes que ν est également absolument continue, soit X_1 est à densité. Enfin, comme X a même loi que $X_1 + X_2$ où X_2 est indépendant de X_1 de loi gaussienne de moyenne b et de variance $c \geq 0$ (en particulier X_2 n'est pas à densité si $c = 0$), on déduit des questions 2-(a,c) que X est à densité.