Introduction aux modèles de prix

Benoît ALESSIS (benoit.alessis@edf.fr)
EDF R&D
Département OSIRIS (Optimisation et Simulation des Risques)

Attention ! Les opinions exprimées dans cette présentation sont celles de l'auteur uniquement et n'engagent que lui. Elles ne reflètent pas nécessairement celles du groupe EDF.

1. **Généralités**

2. Un exemple de modèle structurel

3. Modèles financiers

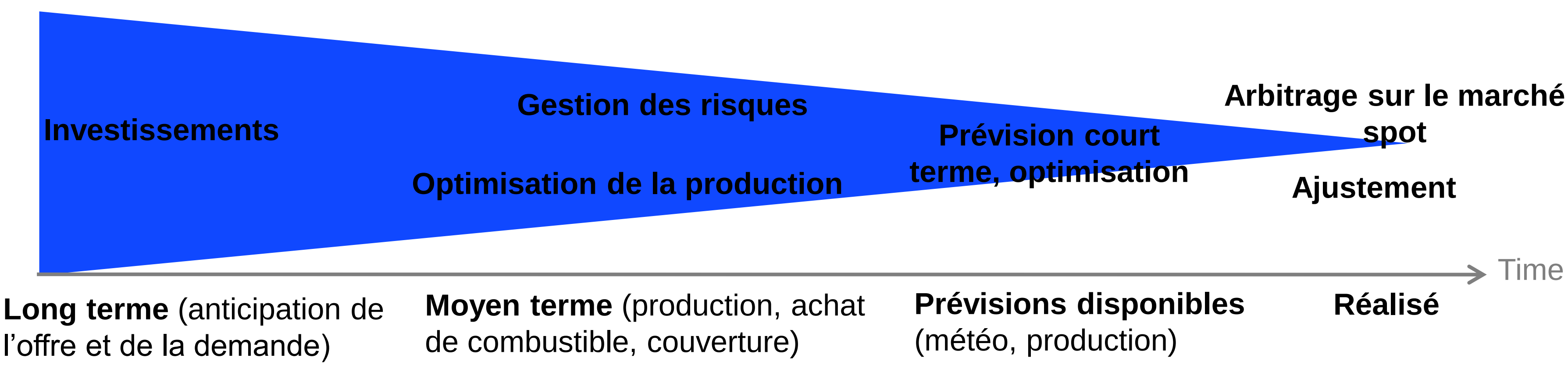
Introduction aux modèles de prix

- Quel est le but d'un modèle de prix ? Dans quelle optique l'utilise-t-on ?

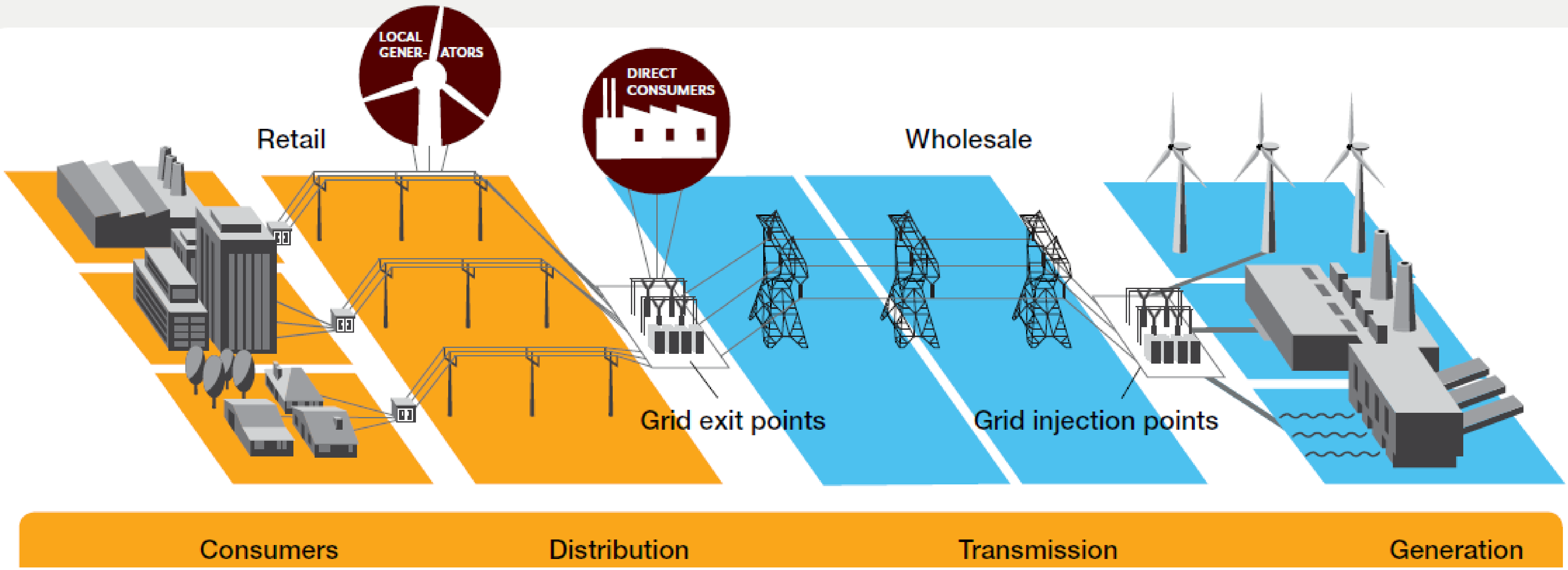
Introduction aux modèles de prix

- Quel est le but d'un modèle de prix ? Dans quelle optique l'utilise-t-on ?
  - Pour prendre des décisions d'investissement de long terme (construire de nouvelles centrales, ou fermer des centrales existantes).
  - Valoriser des dérivées sur l'énergie, que ce soit des actifs physiques ou des contrats financiers structurés.
  - Evaluer et gérer le risque associé à un portefeuille énergie.
  - Proposer / améliorer une offre commerciale : mettre en place des prix compétitifs en limitant le risque.

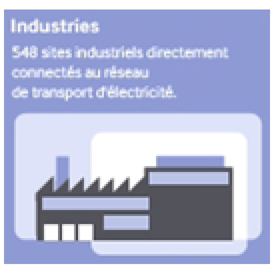
- Il est donc nécessaire de modéliser **le spot et le forward**.

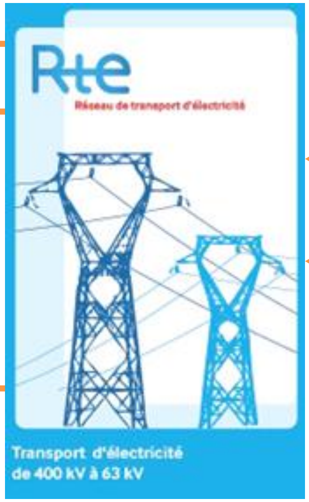


Chaîne de valeur de l’électricité



Exportations via les interconnexions





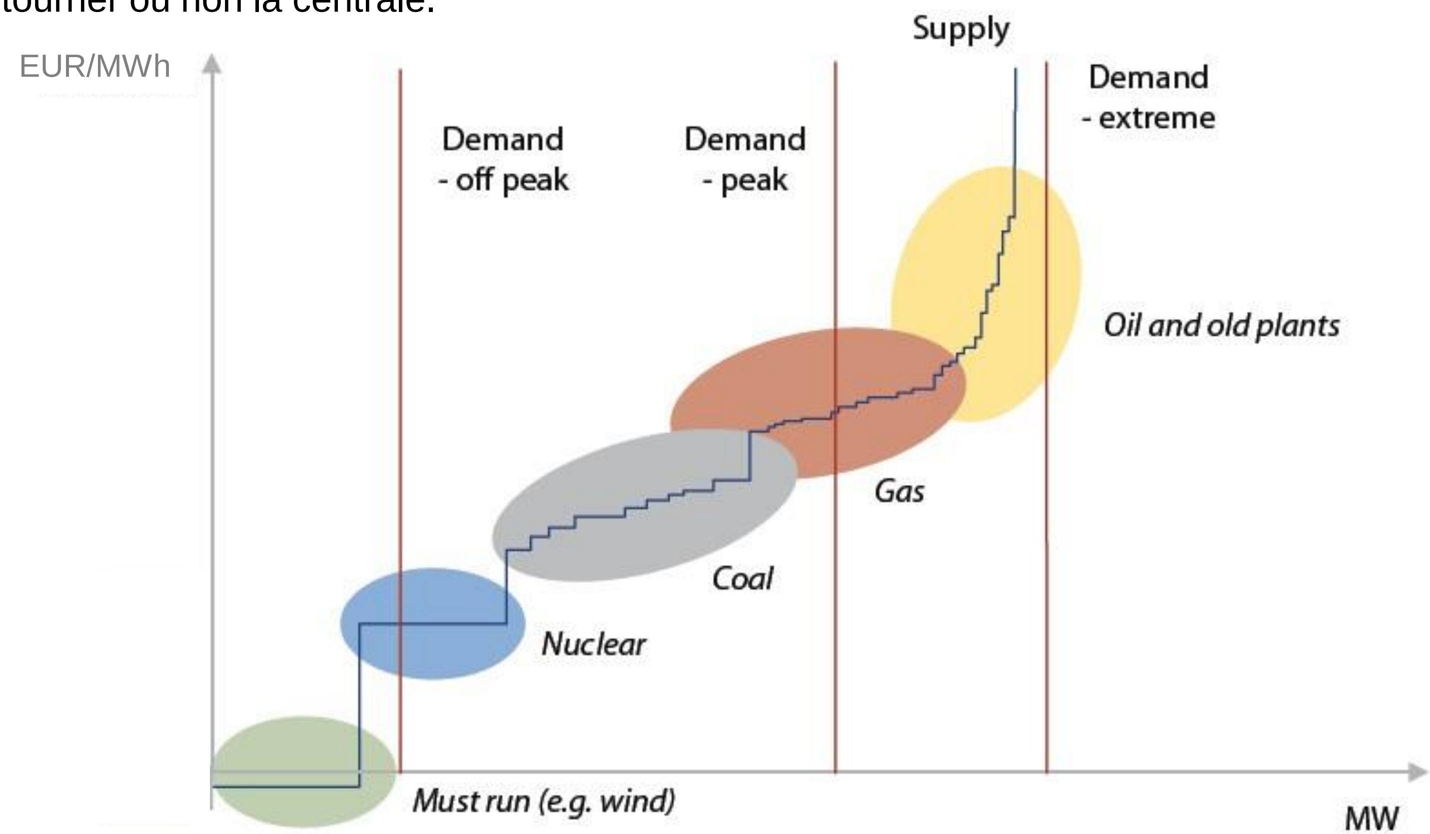
Production d’électricité

Importations via les interconnexions

Professionnels et clients résidentiels

Détermination du prix de marché

- La courbe d'offre est bâtie par **empilement des moyens de production** par *merit order* : les centrales les moins chères sont appelées d'abord.
- Le prix spot correspond à l'**intersection entre la demande et la production**.
- Seul le coût marginal (coût de faire fonctionner la centrale hors investissement) est utilisé : les investissements ont été réalisés une fois pour toutes et n'influent plus sur la décision de faire tourner ou non la centrale.



Détermination du prix de marché

- On considère le parc de production simplifié suivant :

	Capacité	Rendement	Emission	Prix
Gaz	250 MW	40 %	0,2 tCO_2/MWh	24 €/MWh
Charbon	500 MW	0,5 tC/MWh	2,5 tCO_2/tC	100 €/tC

- Construire la courbe d'offre lorsque le CO_2 vaut 10 €/tCO_2.
  - Calculer le prix spot pour une demande de 600 MW.
  - Quel prix faut-il fixer au CO_2 pour inverser l'ordre d'appel des moyens de production ?

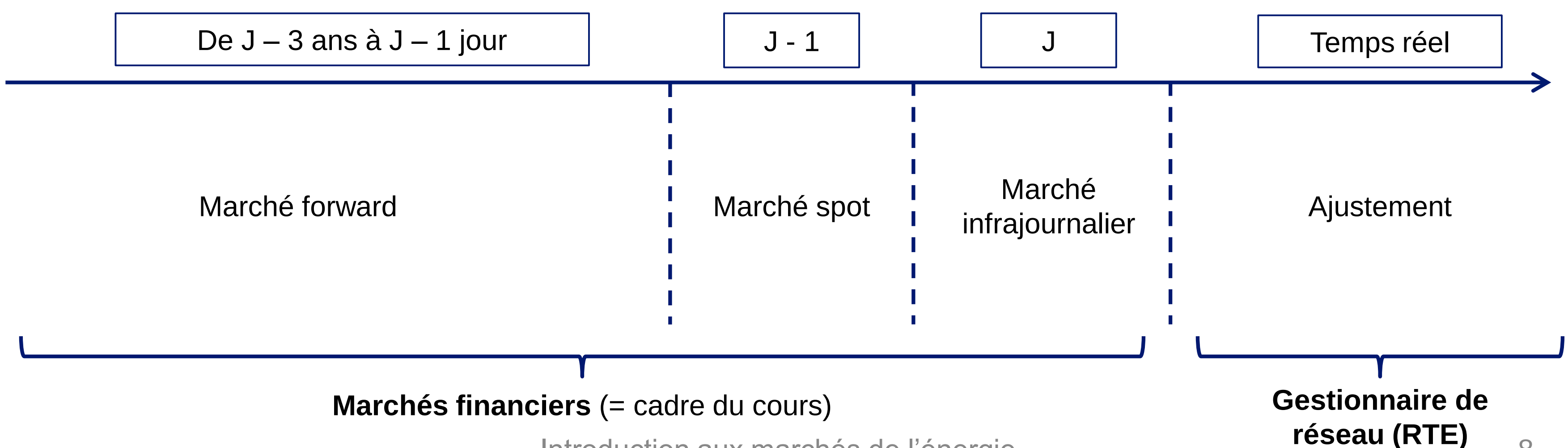
- On ajoute désormais au parc une ferme éolienne.
  - Construire la nouvelle courbe d'offre.
  - Quelle capacité éolienne faut-il installer pour modifier le coût marginal du marché ?

	Capacité	Rendement	Emission	Prix
Eolien	100 MW	25 %	0	0 €/MWh

Echelles de temps sur le marché

- Le marché de l'électricité (mais aussi le marché du gaz) se décline sur plusieurs échelles de temps :
  - Le **marché de très court terme** : spot (pour le lendemain à la même heure) et infrajournalier (pour les prochaines heures de la journée).
  - Le **marché forward** : jusqu'à 3 ans avant la date de livraison.

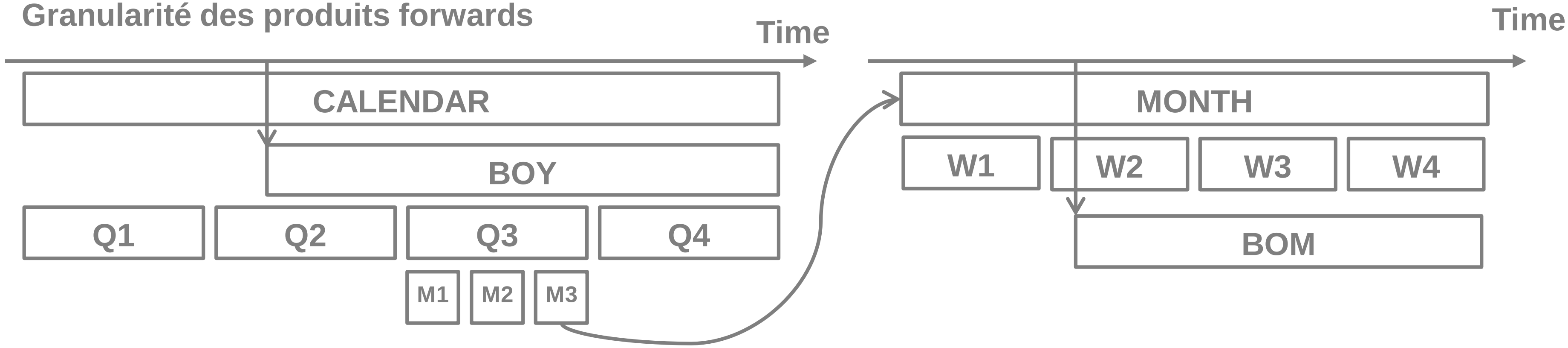
- Par ailleurs, le gestionnaire de réseau réalise :
  - L'**ajustement en temps réel**, de manière à ce que la production soit exactement égale à la demande.
  - Le **règlement des écarts** a posteriori (rémunérer / facturer aux différents acteurs les opérations effectuées par RTE sur leur périmètre).



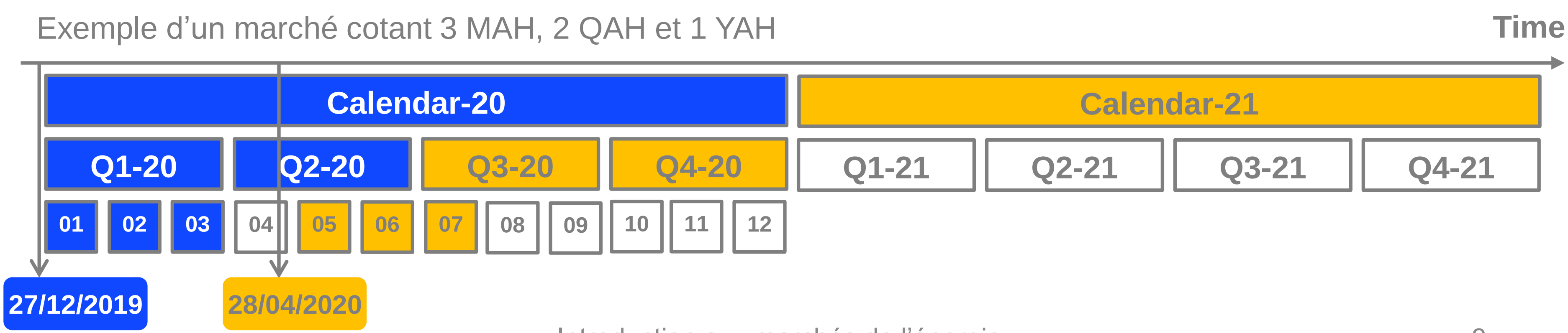
Produits cotés sur le marché forward

- Le marché forward présente une structure imbriquée :
  - Un produit est défini par sa maturité et sa granularité. Généralement, plus la maturité est élevée, plus la granularité est grossière.
  - La disponibilité des différents produits évolue avec le temps.

Granularité des produits forwards



Exemple d'un marché cotant 3 MAH, 2 QAH et 1 YAH



Produits cotés sur le marché forward

- Lorsque des produits se recoupent, leurs prix sont liés par une relation d'absence d'opportunité d'arbitrage.

- On se sert aussi de cette relation pour reconstruire les produits « manquants ».
  - C'est en particulier le cas avec les produits « Base » (toute heure de la journée) et « Peak » (8h-20h) : les produits « Offpeak » (0h-8h, 20h-0h) ne sont pas directement cotés et sont obtenus par différence des produits Base et Peak.

- **Exemple :** quel est le prix du QAH1 sur un marché qui, au 31 décembre 2019, cote
  - MAH1 : 42 €/MWh
  - MAH2 : 41 € / MWh
  - MAH3 : 40 €/MWh

Produits cotés sur le marché forward

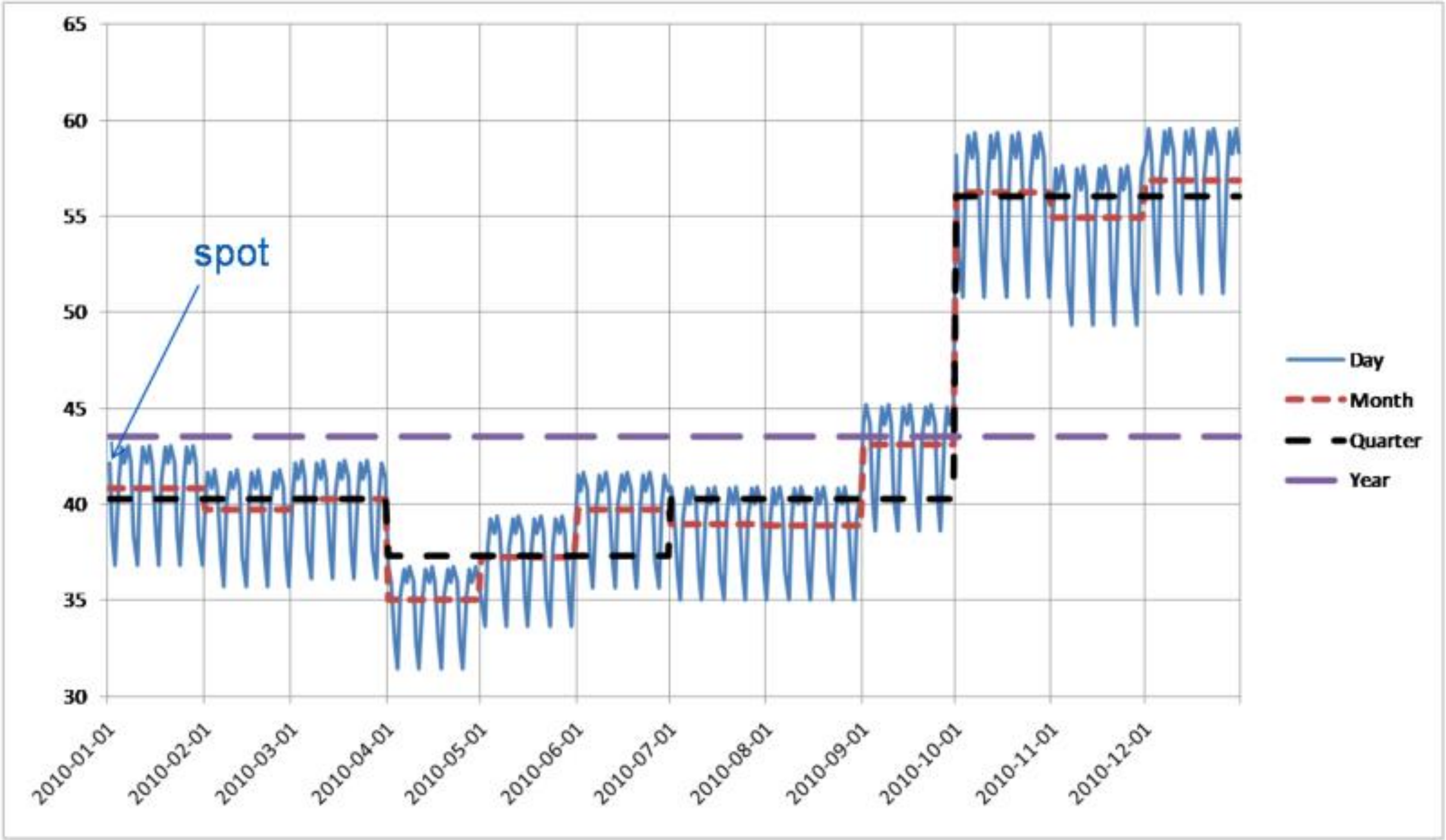
- Lorsque des produits se recoupent, leurs prix sont liés par une relation d'absence d'opportunité d'arbitrage.

- On se sert aussi de cette relation pour reconstruire les produits « manquants ».
  - C'est en particulier le cas avec les produits « Base » (toute heure de la journée) et « Peak » (8h-20h) : les produits « Offpeak » (0h-8h, 20h-0h) ne sont pas directement cotés et sont obtenus par différence des produits Base et Peak.

- **Exemple :** quel est le prix du QAH1 sur un marché qui, au 31 décembre 2019, cote
  - MAH1 : 42 €/MWh
  - MAH2 : 41 € / MWh
  - MAH3 : 40 €/MWh

$$\frac{31 \times MAH1 + 29 \times MAH2 + 31 \times MAH3}{91} = 41$$

Produits cotés sur le marché forward



Caractéristiques majeures des prix de l’électricité

- **Saisonnalité :** les prix varient structurellement en fonction du temps : l’électricité est plus chère en hiver qu’en été, et plus chère en semaine à 19h que le week-end à 23h.

- **Retour à la moyenne :** les prix ont tendance à revenir vers des niveaux d’équilibre, qui sont typiquement dus à l’équilibre offre / demande de long terme.

- **Volatilité :**
  - La volatilité des prix de l’électricité est très élevée (jusqu’à 400 % en spot… à comparer aux 20-40 % des marchés actions).
  - La volatilité décroît avec la période de livraison: les informations de court terme (indisponibilité d’une centrale, pic de froid) ont un impact important pour les quelques jours qui viennent, mais n’ont pas d’effet sur le futur lointain.

- **Pics de prix :** on observe des hausses très importantes et très brèves des prix, parfois jusqu’au maximum technique de 3 000 €/MWh.

- **Prix négatifs :** les prix peuvent parfois être négatifs, par exemple à cause de la production fatale (éolien, solaire) ou parce qu’il est trop coûteux d’éteindre une centrale.

Différents types de modèles de prix

Modèles structurels
- Fondés sur l'équilibre offre/demande
- Intègrent des variables exogènes
-Pour des applications de long terme
- Spot = coût marginal

Modèles statistiques
- Fondés sur des historiques de signaux de prix
-Représentent de manière fine l'évolution du prix

Modèles financiers
- Fondés sur le calcul stochastique
- Inspirés par les modèles bancaires
- Servent au pricing de dérivés
- Servent à la gestion des risques

Hypothèse de convergence

$$S_t = \lim_{T \to t} F(t,T)$$

Modèles spots :
+ Modélisent directement le prix spot
+ Fournissent des formules fermées pour les forwards et certaines options
− Difficile à caler
− Représentation non satisfaisante de la courbe forward

Modèles forwards
+ Modélisent directement la courbe forward
+ Formules fermées pour certaines options
− Nombre de facteurs

$$F(t,T) = \mathbb{E}\left[S_T | \mathcal{F}_t\right]$$

Condition de non arbitrage

1. Généralités
2. **Un exemple de modèle structurel**
3. Modèles financiers

Un exemple de modèle structurel

- On s’intéresse ici au modèle de Aïd et al (2011).
- L’idée est de représenter le prix spot comme une fonction du coût marginal du dernier moyen de production appelé.
  - Le modèle peut être adapté pour tenir compte des pics de prix.
  - Les prix forwards sont déduits des prix spots par la condition de non arbitrage.
- Dans ce modèle, le prix de l’électricité dépend des données suivantes :
  - La demande.
  - Les différentes technologies disponibles pour produire de l’électricité (i.e. : le parc de production national).
  - Un facteur de tension.

Un exemple de modèle structurel

- Dans un premier temps, on se limite au cas où il n'y a que deux types de centrales.

- Les variables utilisées dans cette version du modèle sont :

D_t	Demand (in MW)
C_t^1, C_t^2	Capacities (in MW)
S_t^1, S_t^2	Fuel prices
h_1, h_2	Heat rates with $h_i S_t^i$ in €/MWh

- $h_i S_t^i$ correspond au prix de la quantité de combustible nécessaire pour produire 1 MWh.

- Quitte à permuter les variables, on peut ordonner les coûts de production selon :

$$h_1 S_t^1 \leq h_2 S_t^2$$

- Le prix spot de l'électricité est alors donné par la relation :

$$\boxed{S_t = h_1 S_t^1 \mathbb{1}_{\{D_t \leq C_t^1\}} + h_2 S_t^2 \mathbb{1}_{\{C_t^1 \leq D_t\}}}$$

Un exemple de modèle structurel

- Dans le cas plus général où on dispose de n types de centrales, on utilise les variables :

D_t	Demand (in MW)
n	Fuels available $i = 1, \ldots, n$
C_t^i	Capacity for fuel i (in MW)
S_t^i	Price of fuel i
h_i	Heat rate associated to fuel i with $h_i S_t^i$ in €/MWh

- Là encore, on peut réordonner les moyens de production comme :

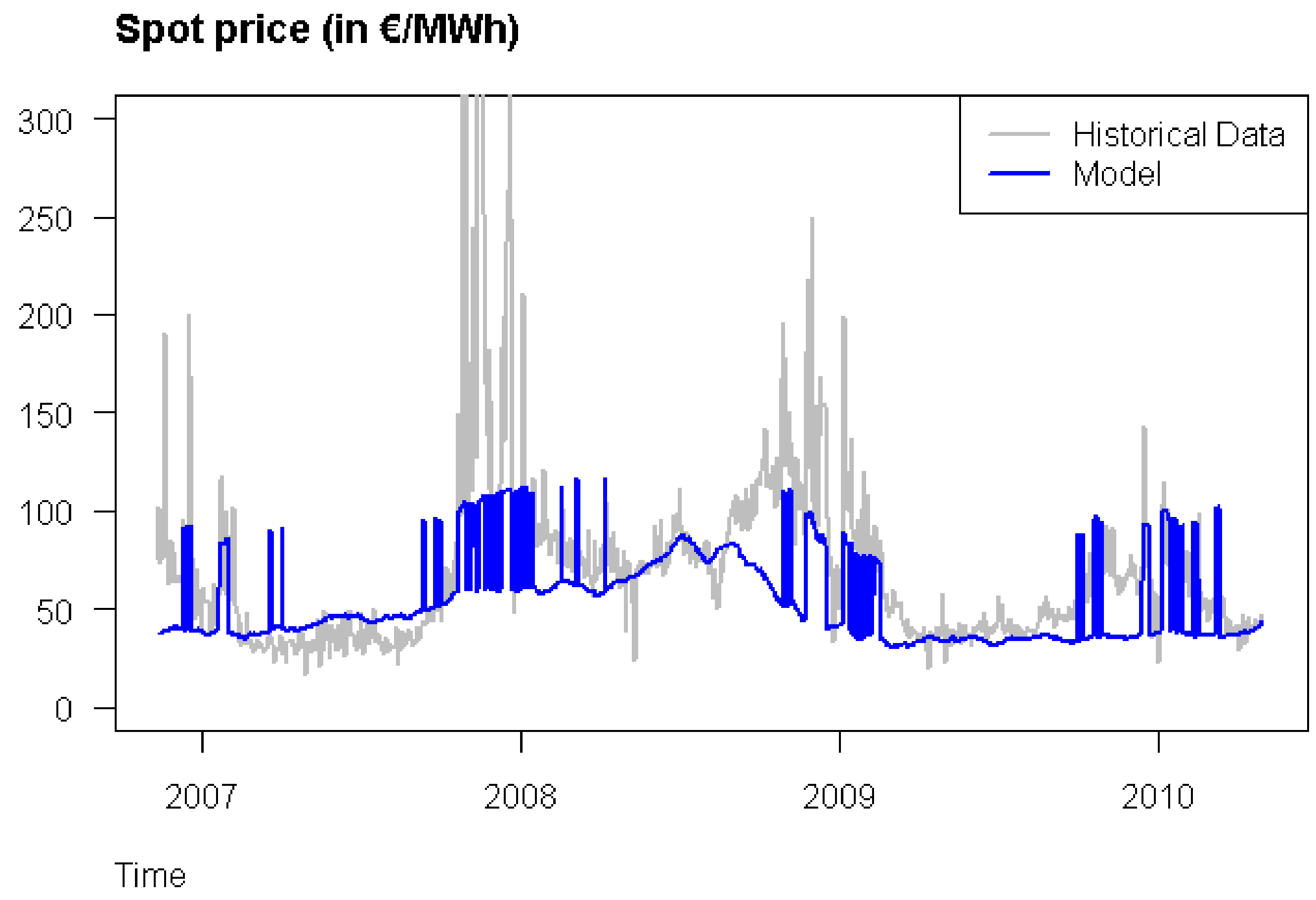
$$h_1 S_t^1 \leq h_2 S_t^2 \leq \ldots \leq h_n S_t^n$$

- Le prix spot de l'électricité est alors donné par le coût du combustible marginal (i.e. : le dernier appelé) :

$$\boxed{S_t = \sum_{i=1}^{n} h_i S_t^i \mathbb{1}_{\{\sum_{k=1}^{i-1} C_t^k \leq D_t \leq \sum_{k=1}^{i} C_t^k\}}}$$

Un exemple de modèle structurel

- En backtestant le modèle sur des données historiques, en se limitant à deux combustibles, on a :



- En l'état, le modèle ne représente pas les pics de prix.

Un exemple de modèle structurel

- Le modèle est bâti sur les fondamentaux du marché de l'électricité :
  - Il assure la cohérence entre la demande, les prix des combustibles et le prix de l'électricité.
  - Toutes les variables utilisées sont observables (mais seuls l'électricité et les combustibles sont échangeables !).

- Mais, en pratique, le prix spot n'est **pas exactement** le coût du dernier moyen de production appelé :
  - A cause de contraintes techniques liées au fonctionnement des centrales.
  - A cause des stratégies qui peuvent être mises en place par les différents acteurs du marché.
  - La **tension** du système joue un rôle important dans les variations du prix.

- On peut donc imaginer d'améliorer le modèle :
  - En incluant un facteur permettant de s'éloigner du prix marginal quand la demande approche des limites de capacité du système.
  - Ce facteur correspond à la tension du système et rend compte du fait que l'électricité n'est pas stockable.

Un exemple de modèle structurel

- Comme précédemment, on calcule le coût du combustible marginal selon :

$$MC_t := \sum_{i=1}^{n} h_i S_t^i \mathbb{1}_{\{\sum_{k=1}^{i-1} C_t^k \leq D_t \leq \sum_{k=1}^{i} C_t^k\}}$$

- De plus, on tient compte de la **capacité maximale installée** :

$$\bar{C}_t = \sum_{k=1}^{n} C_t^k$$

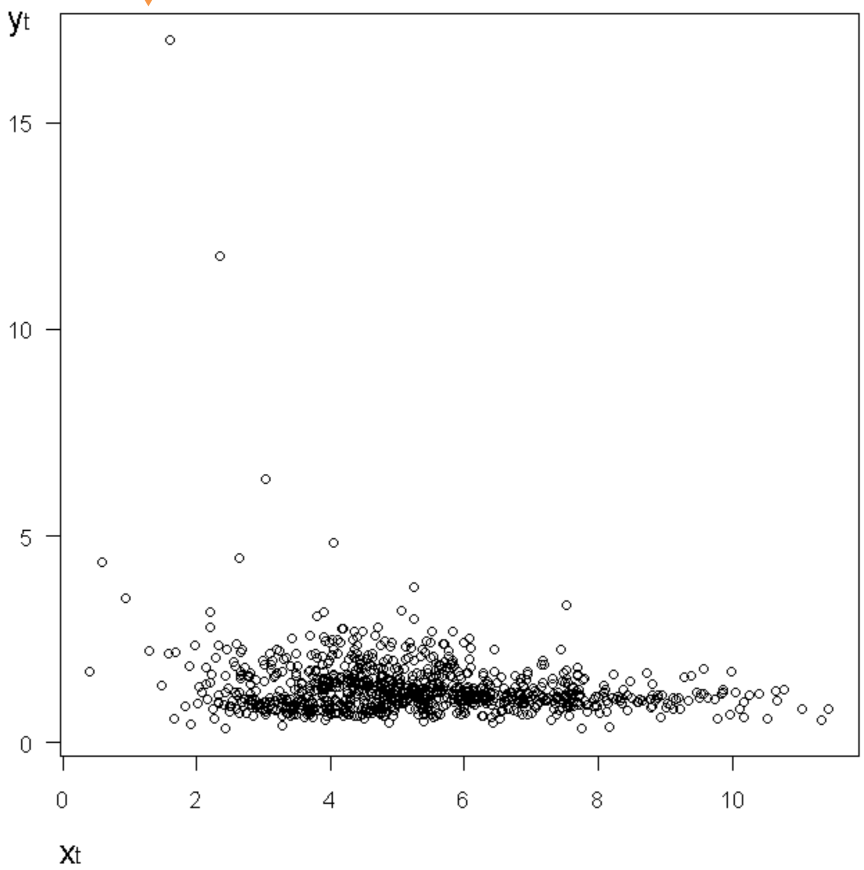
- Les pics de prix surviennent quand le système est tendu, c'est-à-dire quand la demande devient proche de la capacité installée :

$$x_t := \bar{C}_t - D_t$$

- On introduit alors le **facteur de tension**, qu'on va modéliser par une fonction de *x* :

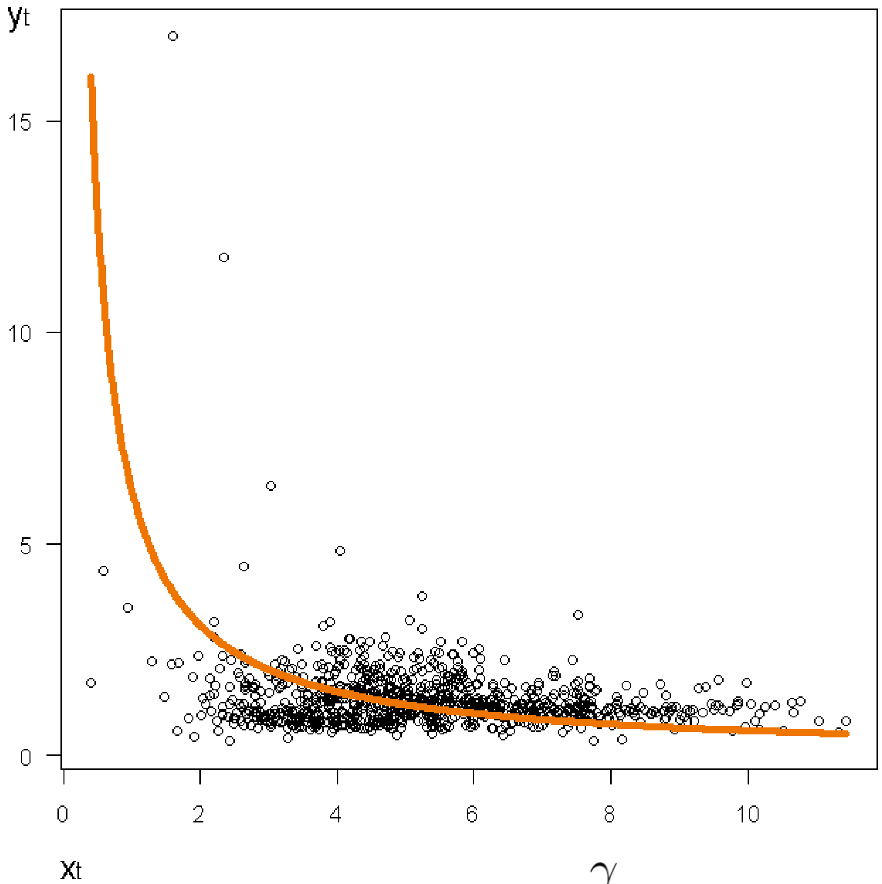
$$y_t := \frac{S_t}{MC_t}$$

Ecarts importants au coût marginal



Un exemple de modèle structurel

- On cale la fonction entre $y_t := \frac{S_t}{MC_t}$ et $x_t := \bar{C}_t - D_t$ par estimation sur historique :



- On peut par exemple utiliser une hyperbole : $y_t = \frac{\gamma}{x_t^{\nu}} \quad \gamma, \nu > 0$

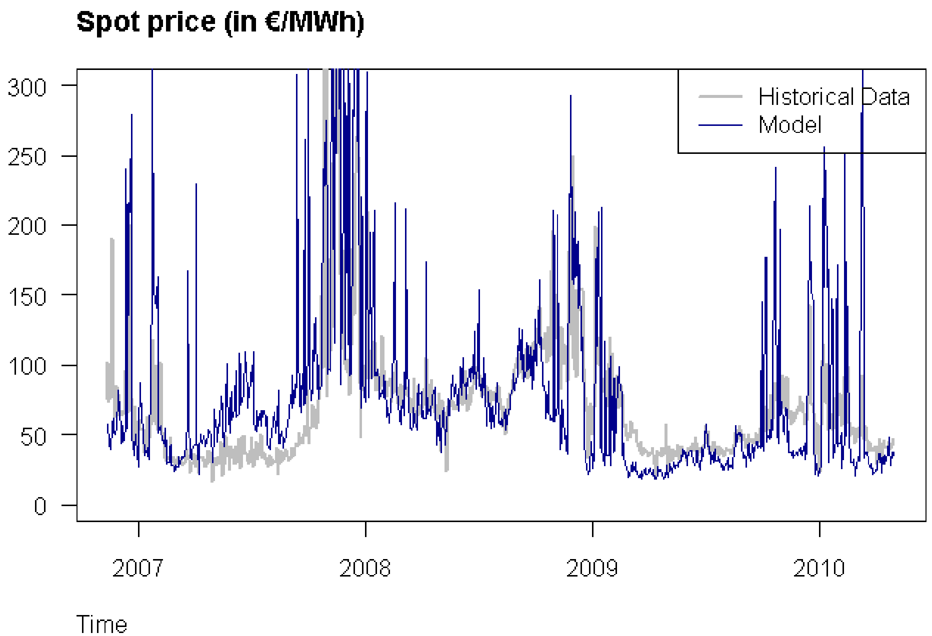
Un exemple de modèle structurel

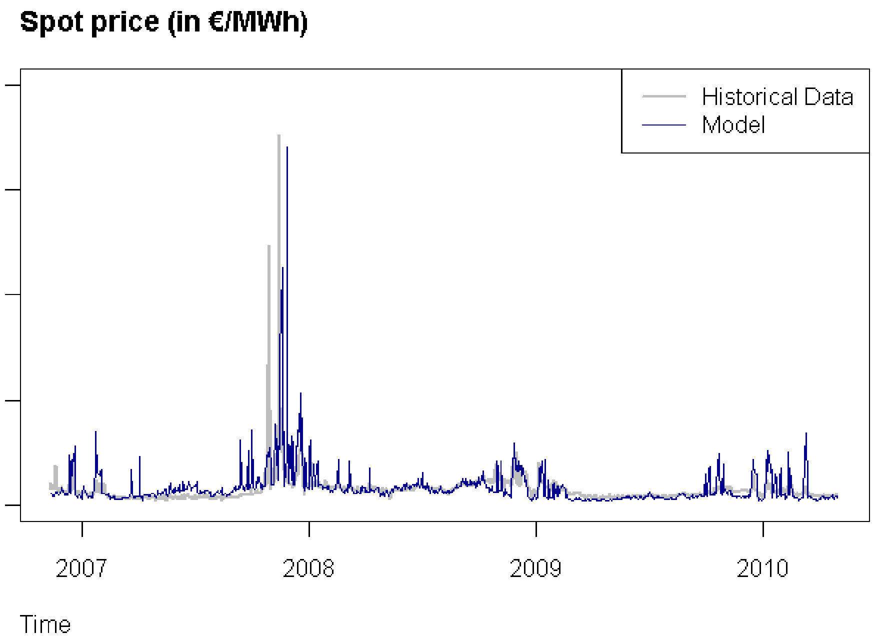
- Au final, on obtient le prix spot comme :

$$\boxed{S_t = g\left(\sum_{k=1}^{n} C_t^k - D_t\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} h_i S_t^i \mathbb{1}_{\left\{\sum_{k=1}^{i-1} C_t^k \leq D_t \leq \sum_{k=1}^{i} C_t^k\right\}}\right)}$$

$$g(x) := \min\left(\frac{\gamma}{x^\nu}, M\right) \mathbb{1}_{\{x>0\}} + M\mathbb{1}_{\{x\leqslant 0\}}$$

- Le paramètre M permet de représenter le fait que le prix sur les marchés est capé (à 3 000 €/MWh).





Un exemple de modèle structurel

- Dans ce modèle, les prix des produits forwards sont obtenus par **absence d'opportunité d'arbitrage**.

- Le prix d'un forward unitaire est donné par :

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} h_i G_i^T(t, C_t, D_t)\, F^i(t,T)$$

En notant *G* l'espérance conditionnel de la fonction de tension.

- Dans ce modèle, un forward correspond donc à un **basket de forwards sur les combustibles** :
  - Les poids des éléments du panier sont stochastiques.
  - Ils sont déterminés par la demande et les capacités de production disponibles.

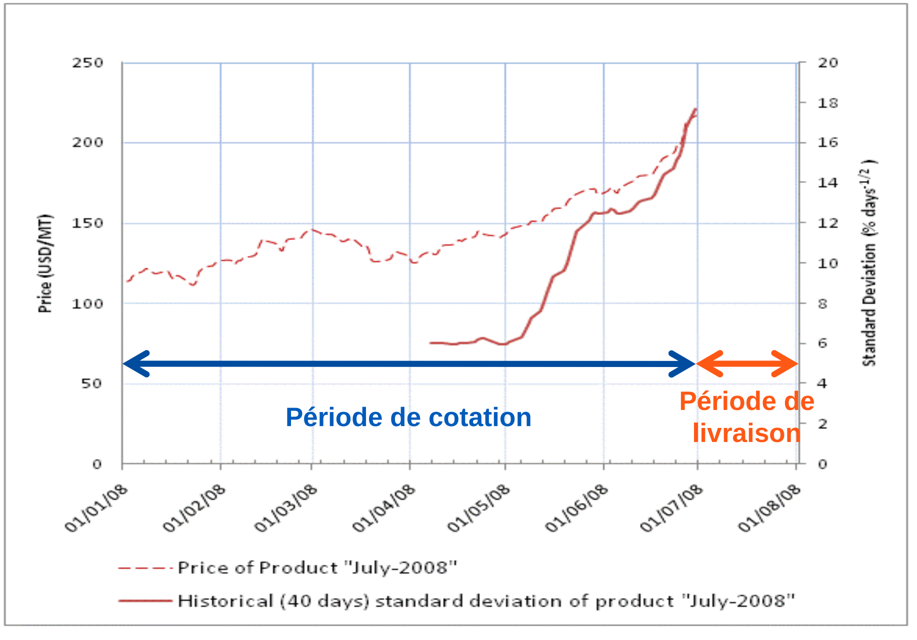
- En rajoutant quelques hypothèses, on peut obtenir des formules quasi analytiques pour les prix des forwards et de certaines options. Par exemple, dans Aïd et al :
  - Les prix des combustibles sont indépendants de la demande en électricité et des capacités de production.
  - Les spreads entre les combustibles sont représentés par des browniens géométriques.
  - La demande et les capacités sont représentées par des processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

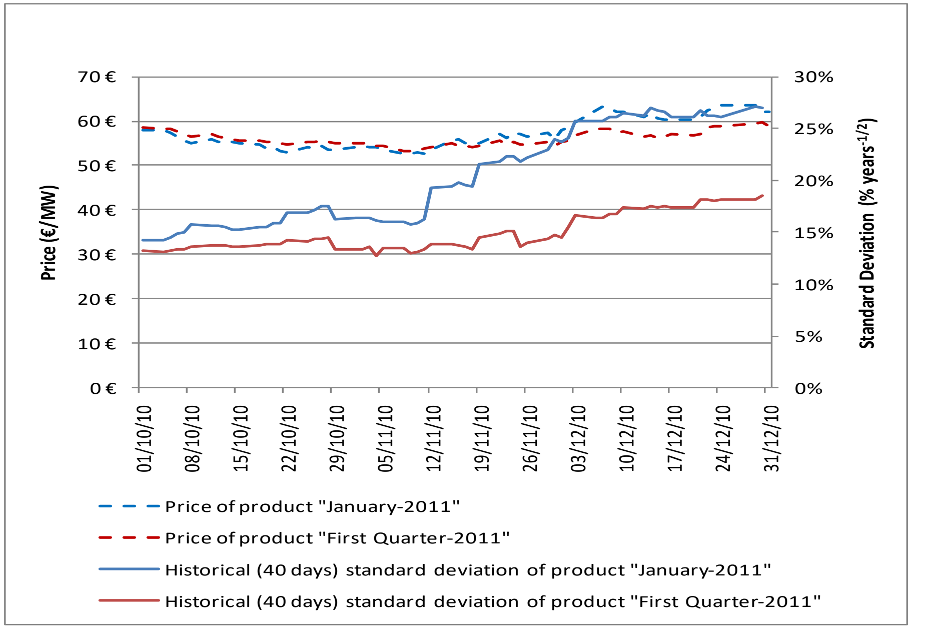
1. Généralités
2. Un exemple de modèle structurel
3. **Modèles financiers**

Structure de volatilité des prix

- La volatilité a une structure par terme de la volatilité : la volatilité des prix à terme décroît quand la période de livraison croît.
  - Une information impactant un mois est diluée sur le trimestre et sur l'année.

- On observe de plus « l'effet Samuelson » : la volatilité des prix à terme croît quand la maturité décroît.





Modèle de Schwartz

- Ce modèle a été introduit par Schwartz en 1997, et est un modèle extrêmement populaire pour la valorisation des options sur les commodités.

- L'idée principale est de transposer au cas de l'énergie un modèle de taux court simple : le modèle de Vasicek.

- L'utilisation de ce modèle permet de représenter deux caractéristiques importantes des prix :
  - Le retour à la moyenne.
  - La dépendance de la volatilité à la maturité.

Modèle de Schwartz

- Ce modèle a été introduit par Schwartz en 1997, et est un modèle extrêmement populaire pour la valorisation des options sur les commodités.

- L'idée principale est de transposer au cas de l'énergie un modèle de taux court simple : le modèle de Vasicek.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

- L'utilisation de ce modèle permet de représenter deux caractéristiques importantes des prix :
  - Le retour à la moyenne.
  - La dépendance de la volatilité à la maturité.

Modèle de Schwartz

- L'évolution du spot *(S_t)* est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\left(\beta - \ln\left(S_t\right)\right)dt + \sigma dW_t$$

- Les paramètres du modèle s'interprètent facilement :
  - β est un facteur d'équilibre de long terme.
  - α est le facteur de retour à la moyenne ; il indique la force avec laquelle on revient vers le niveau d'équilibre. Il est souvent interprété en termes de demie-vie.
  - σ est la volatilité.
  - *(W_t)* est un mouvement brownien standard.

Modèle de Schwartz

- L'évolution du spot (S_t) est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha(\beta - \ln(S_t))dt + \sigma dW_t$$

- Les paramètres du modèle s'interprètent facilement :
  - β est un facteur d'équilibre de long terme.
  - α est le facteur de retour à la moyenne ; il indique la force avec laquelle on revient vers le niveau d'équilibre. Il est souvent interprété en termes de demie-vie.
  - σ est la volatilité.
  - (W_t) est un mouvement brownien standard.

- En posant X_t = ln(S_t), on obtient (θ= β- σ/(2α)) :

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

Modèle de Schwartz

- L'évolution du spot (S_t) est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha(\beta - \ln(S_t))dt + \sigma dW_t$$

- Les paramètres du modèle s'interprètent facilement :
  - β est un facteur d'équilibre de long terme.
  - α est le facteur de retour à la moyenne ; il indique la force avec laquelle on revient vers le niveau d'équilibre. Il est souvent interprété en termes de demie-vie.
  - σ est la volatilité.
  - (W_t) est un mouvement brownien standard.

- En posant $X_t = \ln(S_t)$, on obtient (θ= β- σ/(2α)) :

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

- Puis en posant $Y_t = X_t \exp(\alpha t)$:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0)e^{-\alpha t} + \theta\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

Modèle de Schwartz

- Par absence d'opportunité d'arbitrage, le prix $F(t,T)$ en t du forward unitaire livrant en T est donné par :

$$F(t,T) = E\left[S_T \middle| F_t\right]$$

- On en déduit donc :

$$F(t,T) = S_0 \exp\left(X_t e^{-\alpha(T-t)} + \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)\theta + \frac{\sigma^2}{4\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(T-t)}\right)\right)$$

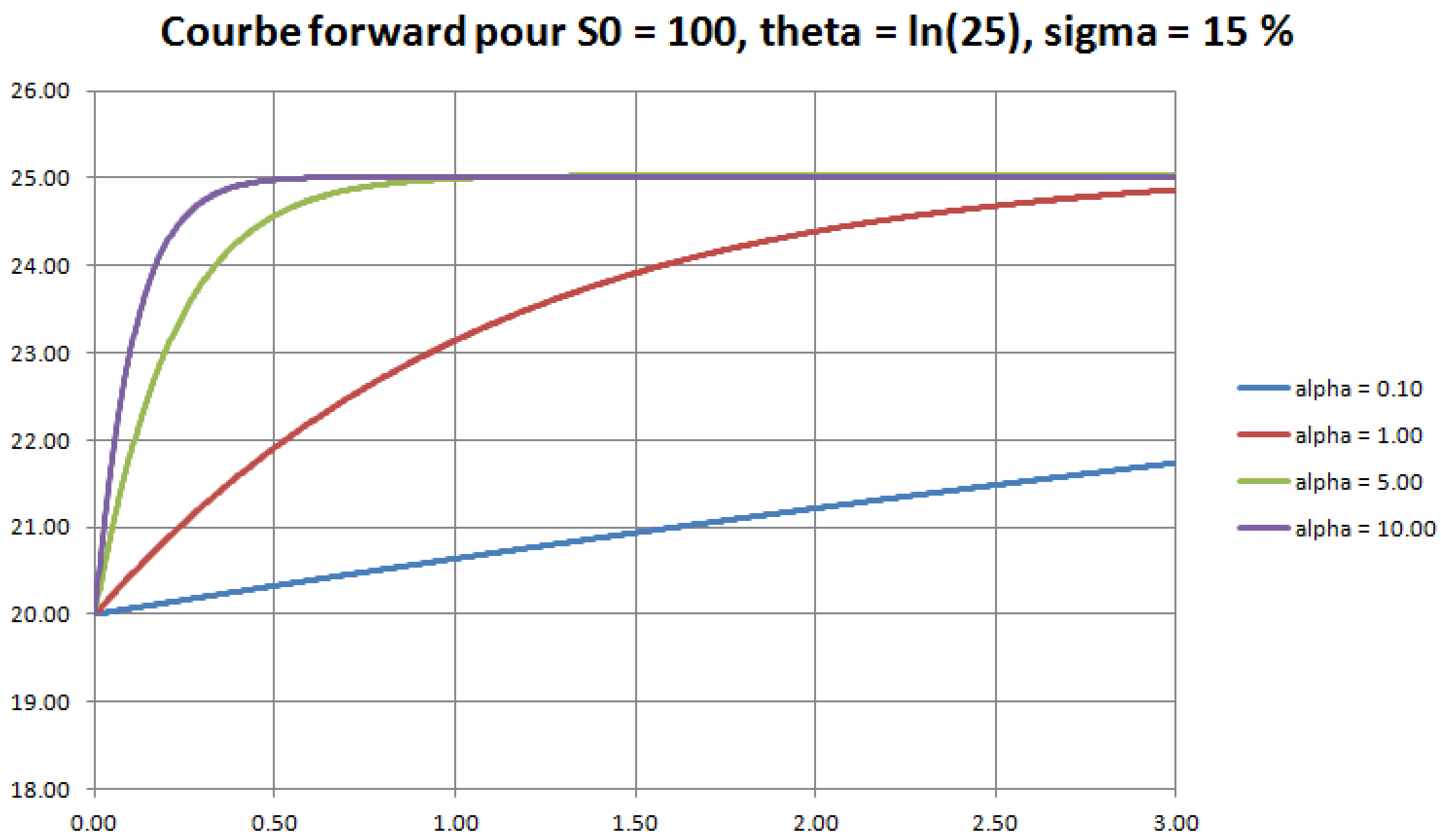
- Les forwards suivent une loi log-normale, et sont martingales sous la probabilité risque neutre.
  - En revanche, le spot ne l'est pas !

- La vitesse à laquelle le forward converge vers la valeur de long terme dépend de α.

- La volatilité décroît en fonction de la maturité (la vitesse de décroissance dépend de α):

$$Var\left(F\left(t,T\right)\right) = \sigma^2 e^{-2\alpha(T-t)}$$

Modèle de Schwartz



- Le forward converge vers la valeur de long terme, mais il est difficile de caler celle-ci pour reproduire la courbe observée sur le marché.

Modèle type HJM

- L'approche Vasicek / Schwartz souffre d'un défaut majeur : la difficulté à calibrer le modèle en adéquation avec la courbe des taux (resp. la courbe forward) observée sur le marché.

- En 1992, Heath, Jarrow et Morton proposent de renverser le paradigme de la modélisation en représentant directement la dynamique du taux forward et en déduisant celle du taux court.

- La première application de ces modèles aux commodités est due à Jamshidian en 1992 pour le pétrole.
  - Cela permet en particulier de représenter facilement la saisonnalité, en l'incluant directement dans la courbe forward.

- En d'autres termes, en notant *F(t,T)* le prix en *t* du forward unitaire de maturité *T*, on cherche à modéliser *dF(t,T)* sous la probabilité risque neutre. De manière assez générale :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\, dW_t^i$$

Modèle type HJM

- Par intégration, on obtient :

$$F(t,T) = F(0,T)\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_i^2(s,T)ds + \int_0^t \sigma_i(s,T)dW_s^i\right)\right)$$

- Le prix spot se déduit simplement par la relation :

$$S_t = \lim_{T\to t} F(t,T)$$

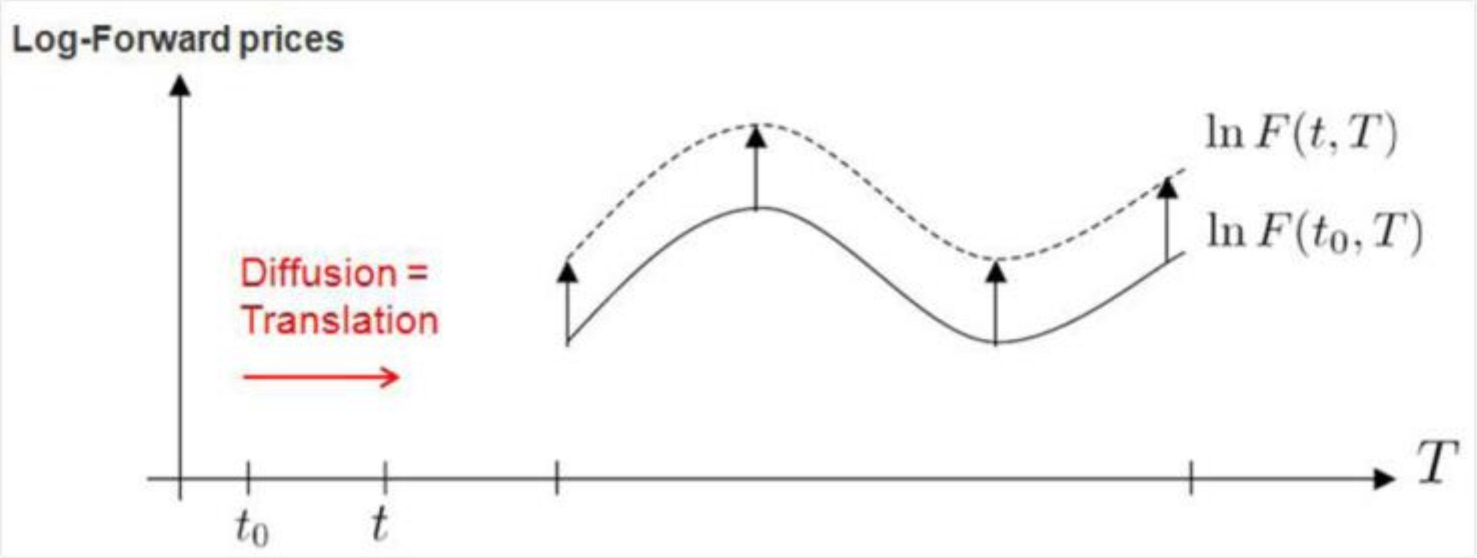
$$S_t = F(0,t)\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_i^2(s,t)ds + \int_0^t \sigma_i(s,t)dW_s^i\right)\right)$$

- Il est important de noter que :
  - Le drift dépend de toute la trajectoire (c'est ce qui assure la cohérence du modèle).
  - Le spot n'est en général pas markovien dans ce cadre.
  - Les produits forwards non-unitaires (i.e. qui portent sur une période et pas sur une date instantanée) ne sont pas markoviens en général dans ce cadre.

Modèle type HJM

- Une première utilisation de ces modèles est le modèle dit « 1 facteur long terme » :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma dW_t$$

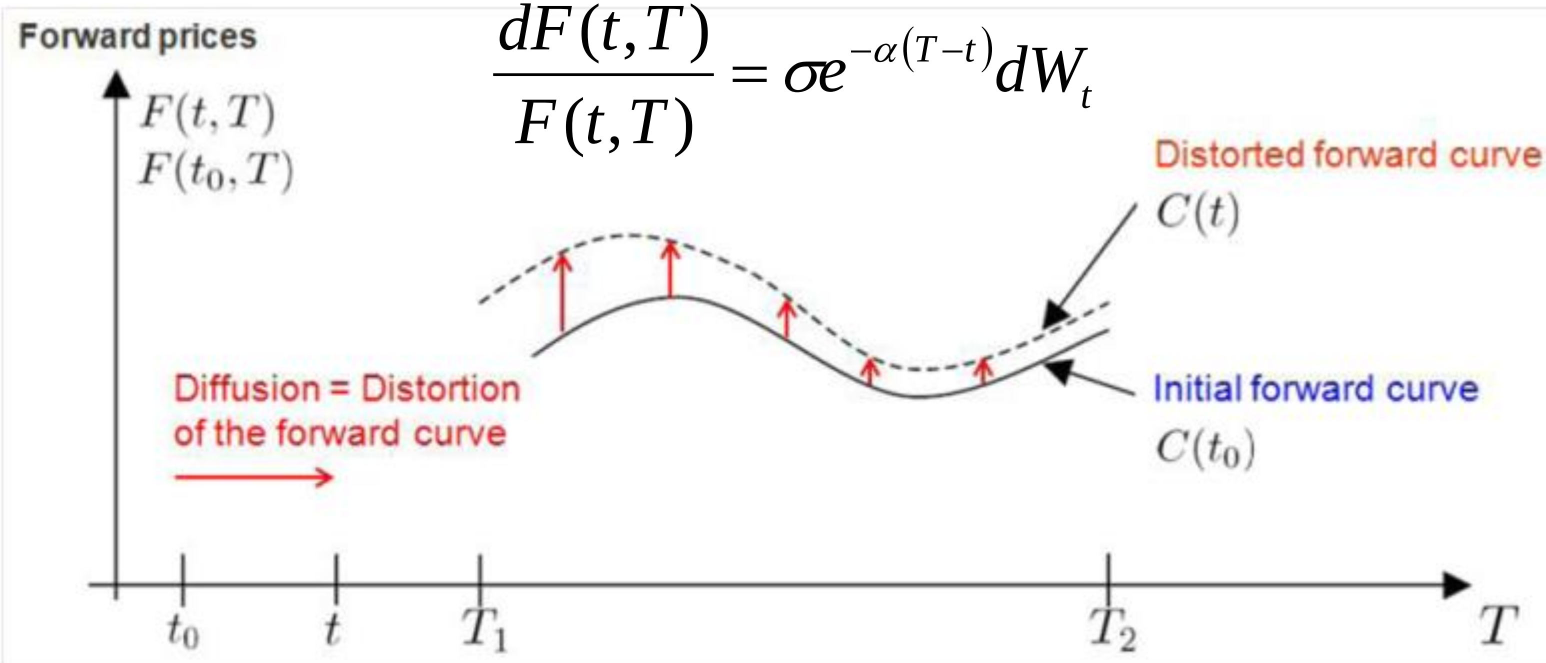


- Dans ce modèle :
  - Le spot est markovien.
  - Les produits forwards sont markoviens.
  - La volatilité ne dépend pas de la maturité.

Modèle type HJM

- Une autre utilisation est le modèle dit « 1 facteur court terme » :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW_t$$



- Dans ce modèle :
  - Les produits forwards ne sont **pas** markoviens.
  - Les produits forwards ne sont **pas** log-normaux.
  - En revanche, le spot est markovien et log-normal.
  - La volatilité dépend de la maturité.

Modèle type HJM

- On peut déduire la dynamique du spot à partir de sa formulation

$$S_t = F(0,t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s\right)$$

- Pour cela, on définit X_t et g tels que :

$$X_t = \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s$$

$$S_t = g(t, X_t)$$

- En appliquant le lemme d'Itô à $g(t,X_t)$, il vient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\left(\mu(t) - \ln(S_t)\right)dt + \sigma dW_t$$

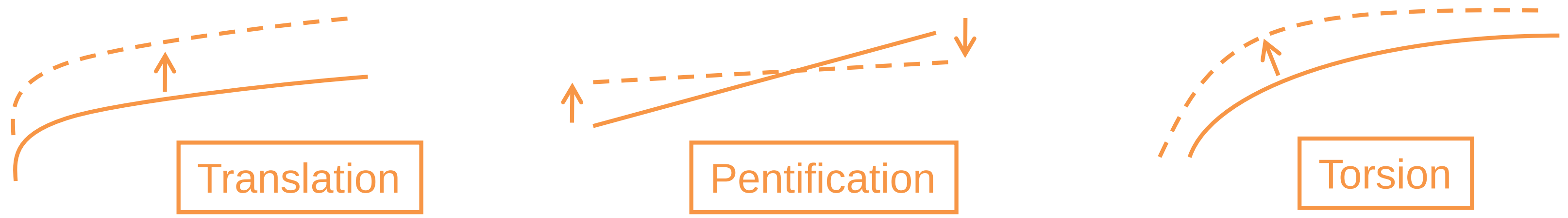
- En posant :

$$\mu(t) = \frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t} + \alpha \ln F(0,t) + \frac{\sigma^2}{4}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)$$

- On retrouve donc le modèle de Schwartz.

Modèle type HJM

- Comme pour les taux, on remarque que la majeure partie des déformations historiques de la courbe forward se décompose selon 3 effets :



- En pratique, on associe donc le plus souvent le modèle « court terme » et le modèle « long terme » pour créer un modèle « à 2 facteurs ».
  - Cela permet d'introduire des bruits dépendant de la maturité (qui affecte la partie proche de la courbe forward)…
  - Et des bruits qui affectent de la même manière l'intégralité de la courbe.
  - Mais le modèle retenu doit aussi dépendre du type de produit que l'on cherche à valoriser !

- Au final, on a donc un modèle :
  - Qui représente : la saisonnalité, le retour à la moyenne, la dépendance de la volatilité à la maturité
  - Mais qui ne représente ni les pics de prix ni les prix négatifs.

Limites des modèles factoriels

	Propriété des prix	Représentation du modèle 2 facteurs
Prix spot	Saisonnalité multi-échelle	✔
	Effets calendaires	✔
	Retour à la moyenne	✔
	Caractéristiques de volatilité	✓
	Pics de prix	
	Prix négatifs	
Prix à terme	Saisonnalité avec la date de livraison T	✔
	Volatilité croissante quand la maturité décroît	✔
	Structure par terme de la volatilité	✔