Produits dérivés pour l'énergie

Benoît Alessis
benoit.alessis@edf.fr

Quels problèmes les dérivés structurés essaient de réduire ?

- Réduire les risques financiers liés aux contrats commerciaux (vente aux consommateurs finaux) :
  - Prix du contrat commercial fixé par une moyenne des prix sur une certaine période
  - Options asiatiques
- Réduire les risques liés aux différentiels de prix entre les combustibles et l'électricité :
  - La plupart des acteurs ne sont pas exposés sur des valeurs absolues de prix, mais sur des écarts de prix
  - Options spread
- Réduire les risques liés au manque de flexibilité du système de production (problème de passage des pics de demande) :
  - Le problème est que l'on se sait pas à l'avance où sera le pic
  - Vente de paquets d'options d'effacement par l'opérateur système
  - Options swing (dont les américaines)

Quels problèmes les dérivés structurés essaient de réduire ?

- Réduire les risques liés à la consommation incertaine des consommateurs finaux : exemple en électricité ou gaz : produits hybrides grâce auxquels les consommateurs résidentiels peuvent tirer autant de courant qu'ils veulent jusqu'à la limite de leur disjoncteur. Quelle prix pour un tel droit de tirage ?
- Les électro-intensifs n'ont pas de disjoncteur : comment structurer la livraison d'électricité et à quel prix ? Remarque : la méthodologie de réplication parfaite ne fonctionnera plus ici.
- Valoriser les flexibilités existantes dans les portefeuilles physiques des acteurs : donnera à l'utilisation de méthodes d'options réelles pour décider d'un arbitrage entre production, achat et vente.

Futures

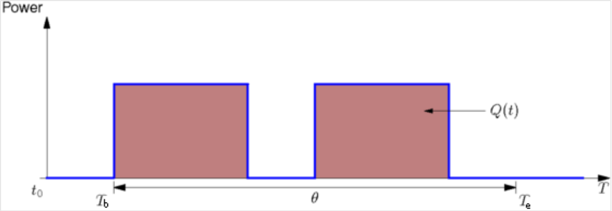
- Contrats très standardisés, pour l'achat ou la vente d'une commodité sous-jacente à un prix spécifié à l'avance pour une certaine période de temps.
- Les échanges de cash se font à la date de settlement.
- Caractéristiques de la livraison :
  - Elle est effectuée sur des périodes prédéfinies : semaine, mois, trimestre, saison ou année calendaire.
  - Elle débute au premier jour de la période.
  - Elle peut inclure un profil (peak ou off peak, par opposition aux contrats base).
- Volume effectif du contrat : nominal $\times$ nombre d'heures de la période de livraison.
- Différents des contrats forwards, qui sont échangés en OTC
- Payoff du contrat livrant 1 MWh en T, signé en t_0 ?

Futures

- Contrats très standardisés, pour l'achat ou la vente d'une commodité sous-jacente à un prix spécifié à l'avance pour une certaine période de temps.
- Les échanges de cash se font à la date de settlement.
- Caractéristiques de la livraison :
  - Elle est effectuée sur des périodes prédéfinies : semaine, mois, trimestre, saison ou année calendaire.
  - Elle débute au premier jour de la période.
  - Elle peut inclure un profil (peak ou off peak, par opposition aux contrats base).
- Volume effectif du contrat : nominal $\times$ nombre d'heures de la période de livraison.
- Différents des contrats forwards, qui sont échangés en OTC
- Payoff du contrat livrant 1 MWh en T, signé en t_0 ?

$$F(T, T) - F(t_0, T)$$

Futures



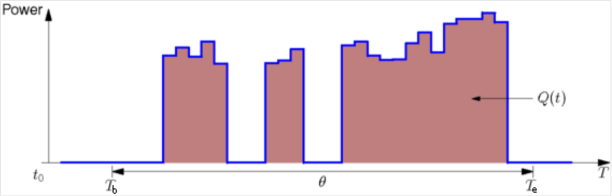
- Généralement, les contrats sont libellés en puissance (MW) plutôt qu'en volume (MWh), mais le prix du contrat se rapporte lui au volume d'énergie.

Contrat	Nombre de jours	Nominal (MWh)
2019 Base	365	8760
2020 Base	366	8784
2019 Peak	260	3120
Août 2020 Base	31	744
Août 2019 Peak	28	336

Forwards

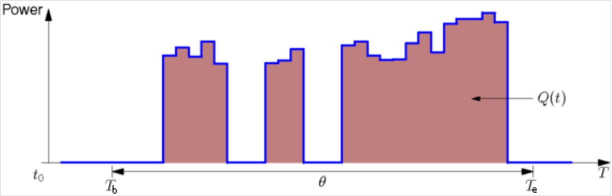
- Contrats bilatéraux échangés OTC (over the counter) : contrat d'achat / de vente ferme, pour une livraison dans le futur, à un prix et sur une période définie par les deux contreparties.
- Le prix peut être donné une formule (par exemple un index) plutôt qu'un simple strike fixe.
- Comme le contrat est fait sur mesure, les détails de la livraison peuvent être assez spécifiques :
  - Elle peut être restreinte à certaines heures peak.
  - Certains jours fériés (normalement off peak) peuvent être inclus dans des contrats peak.
  - Le profil de puissance peut ne pas être constant dans le temps.
  - Les bornes de la période de livraison peuvent ne pas du tout standard.

Forwards



- Le prix du contrat est donné par une relation de non-arbitrage à partir des prix des contrats futures :

Forwards



- Le prix du contrat est donné par une relation de non-arbitrage à partir des prix des contrats futures :

$$\frac{\sum_{t\in\theta} Q(t)B(t_0,t)F(t_0,t)}{\sum_{t\in\theta} Q(t)B(t_0,t)}.$$

Forwards : exemple

- On considère une entreprise de distribution qui, au 1er juillet 2019, veut sécuriser son approvisionnement en gaz pour Q1 2020.

Mois	**Demande journalière (GWh)**	**Prix coté (€ / MWh)**
Janvier 2020	12	52
Février 2020	10	50
Mars 2020	8	48

- Etant donnés sa demande prévisionnelle et les prix cotés sur le marché pour les premiers mois de 2020, quel est le prix du contrat forward qu'elle souhaite signer (en supposant que le taux d'intérêt est nul) ?

Forwards : exemple

- On considère une entreprise de distribution qui, au 1er juillet 2019, veut sécuriser son approvisionnement en gaz pour Q1 2020.

Mois	**Demande journalière (GWh)**	**Prix coté (€ / MWh)**
Janvier 2020	12	52
Février 2020	10	50
Mars 2020	8	48

- Etant donnés sa demande prévisionnelle et les prix cotés sur le marché pour les premiers mois de 2020, quel est le prix du contrat forward qu'elle souhaite signer (en supposant que le taux d'intérêt est nul) ?

$$\frac{372 \times 52 + 290 \times 50 + 248 \times 48}{910} = 50{,}27 \text{ € / MWh}$$

Swaps

- Les swaps sont la généralisation des contrats forwards : les forwards sont essentiellement des swaps à une période. Ils sont similaires aux swaps sur les marchés financiers classiques.
- Ils sont souvent appelés *contract for difference* ou *fixed for floating*.
- L'idée est simplement d'échanger, pour un ensemble de dates, un paiement (ou une livraison physique) fixe contre un indice variable.
- Un swap est simplement un strip de contrats fowards.

Swaps

- Des swaps plus sophistiqués existent, par exemple les swaps différentiels.
- L'idée est d'échanger le spread entre deux commodités contre un prix fixe : équivalent à un strip de différences de forward.
- On les appelle aussi des *margin swaps*, puisqu'ils permettent de sécuriser une marge.
- On les utilise généralement pour gérer le risque lié au différentiel entre une commodité raffinée et un produit raffiné.
  - Crack swap : différence entre pétrole brut et raffiné.
  - Spark swap : différence gaz (énergie primaire) / électricité (énergie secondaire).

Spreads

Spread : différentiel de prix entre deux produits.

- Spread intra-commodité : par exemple le spread entre des bruts de qualités différentes (Brent vs. WTI).
- Spread géographique : différence entre deux produits livrant en deux points différents (par exemple entre les zones Nord et Sud sur le réseau du gaz en France).
- Time spread / calendar spread : différence entre deux produits livrant à deux dates différentes.
- Spread inter-commodités :
  - Spark spread : spread entre le gaz et l'électricité.
  - Dark spread : spread entre le charbon et l'électricité.
  - Clean dark (resp. : spark) spread : spread entre le charbon (resp. : le gaz) et l'électricité en incluant le coût du CO2.

Spreads

- Le clean spark spread, par exemple, permet de représenter de manière assez simple (mais grossière) une centrale brûlant du gaz pour produire de l'électricité.
- On tient compte du rendement de la centrale (*heat rate*) : en effet, toute l'énergie consommée en brûlant le gaz n'est pas convertie en électricité ; une partie est perdue.

$$\text{Spark spread}(h) = S_t^e - hS_t^g$$

- Exemples de rendement :
  - Turbine mono-cycle : 20–30 %
  - Turbine fonctionnant en base : 35–40 %
  - Cycle combiné (CCGT) : 50–60 %
- Pour le clean spark spread, on tient aussi compte du coefficient d'émission de CO2, exprimé en tonnes de CO2 produites par MWh de gaz brûlé :

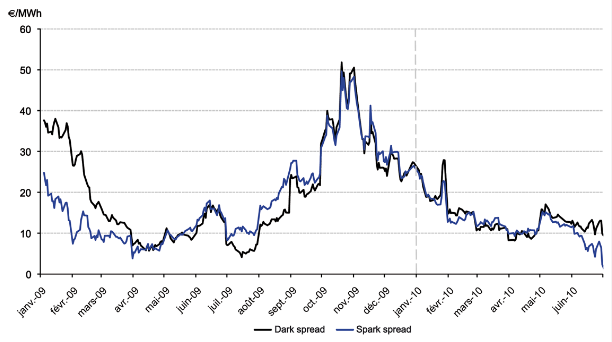
$$\text{Clean spark spread}(h, c) = S_t^e - h(S_t^g + cS_t^{\text{CO2}}).$$

Spreads

- Dans un modèle simplifié, le clean spark spread donne une stratégie de gestion d'une centrale au gaz :
  - Si le spread est positif, le producteur fait fonctionner sa centrale pour approvisionner ses clients.
  - Si le spread est négatif, il éteint sa centrale et se source sur le marché spot à la place.
- Plus généralement, cela permet de gérer un parc de centrales :
  - Si le clean dark spread est supérieur au clean spark spread, on fait fonctionner de préférence les centrales charbon.
  - Dans le cas inverse, on fait d'abord fonctionner les centrales gaz.

Spreads

- Le dark spread et le spark spread fournissent un proxy des coûts des centrales au charbon et au gaz. Ils sont fortement corrélés.
- Leur décorrélation signale la perte de compétitivité d'un des deux moyens de production (par exemple début 2009 pour les centrales charbon).



Spreads

- A partir des deux spreads, on peut obtenir un prix théorique pour le CO2 correspondant à l'annulation de l'avantage du charbon sur le gaz.
- En 2010, la CRE obtenait ainsi (avec en vert le prix spot et en bleu le prix d'équilibre) :

Contexte

- Dans cette partie, on s'intéresse à la valorisation d'un call sur le forward unitaire. La valeur du call est donnée en t par :

$$e^{-r(t_e-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(F(t_e,T)-K\right)_+|\mathcal{F}_t\right]$$

  où l'on note :
  - t_e la date d'exercice de l'option ;
  - $T \geq t_e$ la maturité du forward ;
  - K le strike de l'option ;
  - r, le taux sans risque ;
  - $\mathcal{F}_t$ la filtration (engendrée par le mouvement brownien, que l'on suppose vérifier les hypothèses habituelles) à l'instant t ;
  - $\mathbb{Q}$ la probabilité risque-neutre.

Modèle à 1 facteur long terme

- Dans ce modèle, la dynamique du forward correspond à un brownien géométrique avec un drift nul :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma dW_t.$$

- On peut donc appliquer la formule de Black-Scholes (appelée, pour les forwards, formule de Black) pour le call :

$$e^{-r(t_e-t)}\left[F(t,T)\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}(d-\sigma\sqrt{t_e-t})\right]$$

avec :

$$d = \frac{\ln\Big(F(t,T)/K\Big) + \sigma^2(t_e-t)/2}{\sigma\sqrt{t_e-t}}.$$

Modèle à 1 facteur court terme

- Dans ce modèle, la dynamique du forward est :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW_t.$$

- En utilisant le fait que le prix du forward est toujours log-normal, on peut aboutir à une formule analogue à celle de Black-Scholes en utilisant la volatilité équivalente :

$$\sigma_{\mathrm{eq}}^2 = \int_t^{t_e} \sigma^2 e^{-2\alpha(T-s)} ds = \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha(T-t_e)}}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t_e-t)}).$$

Modèle à 1 facteur court terme

- Dans ce modèle, la dynamique du forward est :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW_t.$$

- En utilisant le fait que le prix du forward est toujours log-normal, on peut aboutir à une formule analogue à celle de Black-Scholes en utilisant la volatilité équivalente :

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \int_t^{t_e} \sigma^2 e^{-2\alpha(T-s)} ds = \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha(T-t_e)}}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t_e-t)}).$$

- Au final :

$$e^{-r(t_e-t)}\left[F(t,T)\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}(d-\sigma_{\text{eq}})\right]$$

avec :

$$d = \frac{\ln\Big(F(t,T)/K\Big) + \sigma_{\text{eq}}^2/2}{\sigma_{\text{eq}}}.$$

Modèle à 2 facteurs

- Dans ce modèle, la dynamique du forward est :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma_S e^{-\alpha(T-t)} dW_t^S + \sigma_L dW_t^L.$$

Modèle à 2 facteurs

- Dans ce modèle, la dynamique du forward est :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma_S e^{-\alpha(T-t)} dW_t^S + \sigma_L dW_t^L.$$

- Comme précédemment, on introduit la volatilité équivalente (en ayant noté ρ tel que $\rho \mathrm{d}s = \mathrm{d} < W^S, W^L >_s$) :

$$\sigma_{\mathrm{eq}}^2 = \int_t^{t_e} \sigma_S^2 e^{-2\alpha(T-s)} ds + \int_t^{t_e} \sigma_L^2 ds + 2\rho \int_t^{t_e} \sigma_S \sigma_L e^{-\alpha(T-s)} ds.$$

Modèle à 2 facteurs

- Dans ce modèle, la dynamique du forward est :

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma_S e^{-\alpha(T-t)} dW_t^S + \sigma_L dW_t^L.$$

- Comme précédemment, on introduit la volatilité équivalente (en ayant noté ρ tel que $\rho \mathrm{d}s = \mathrm{d} < W^S, W^L >_s$) :

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \int_t^{t_e} \sigma_S^2 e^{-2\alpha(T-s)} ds + \int_t^{t_e} \sigma_L^2 ds + 2\rho \int_t^{t_e} \sigma_S \sigma_L e^{-\alpha(T-s)} ds.$$

- Au final :

$$e^{-r(t_e-t)} \Big[F(t,T)\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}(d-\sigma_{\text{eq}}) \Big]$$

avec :

$$d = \frac{\ln\Big(F(t,T)/K\Big) + \sigma_{\text{eq}}^2/2}{\sigma_{\text{eq}}}.$$

Contexte

- Dans cette partie, on s'intéresse à l'option sur différence :

$$e^{-r(t_e-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S^1_{t_e} - S^2_{t_e} - K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]$$

  où l'on note :
  - S^1 et S^2 les deux sous-jacents, qui peuvent correspondre à deux commodités (par exemple électricité et gaz) ou à une commodité en deux points d'un système (par exemple France / Allemagne) ;
  - t_e la date d'exercice de l'option ;
  - $T \geq t_e$ la maturité du forward ;
  - K le strike de l'option.

- Ce type d'option va typiquement permettre de valoriser :
  - Des centrales thermiques (spread entre commodités) ;
  - Le coût du transport (spread géographique).

Formule de Margrabe

- En 1978, W. Margrabe donne une formule fermée pour la valorisation de l'option sur différence avec un strike nul :

$$v(S^1, S^2, t) = e^{-r(t_e - t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S^1_{t_e} - S^2_{t_e}\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]$$

dans le modèle de Black-Scholes.

- La formule est extrêmement analogue à celle de Black-Scholes :

$$v(S^1, S^2, t) = S^1_t \mathcal{N}(d) - S^2_t \mathcal{N}(d - \sigma_{\text{eq}}\sqrt{t_e - t})$$

avec :

$$\sigma^2_{\text{eq}} = \sigma^2_1 + \sigma^2_2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

et :

$$d = \frac{\ln(S^1_t / S^2_t) + \sigma^2_{\text{eq}}(t_e - t)/2}{\sigma_{\text{eq}}\sqrt{t_e - t}}.$$

Formule de Margrabe

Démonstration :

Formule de Margrabe

Démonstration :

- On effectue un changement de numéraire et l'on considère S^2 comme nouveau numéraire. On note $\mathbb{Q}^{S^2}$ la probabilité caractérisée par la densité de Radon-Nikodym suivante : $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{S^2}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} = \frac{S_T^2}{S_0^2 e^{rT}}$.

Formule de Margrabe

Démonstration :

- On effectue un changement de numéraire et l'on considère S^2 comme nouveau numéraire. On note $\mathbb{Q}^{S^2}$ la probabilité caractérisée par la densité de Radon-Nikodym suivante : $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{S^2}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} = \frac{S_T^2}{S_0^2 e^{rT}}$.
- D'après la formule de changement de numéraire, on a donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{v(S^1, S^2, t)}{S_t^2} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(t_e - t)} S_{t_e}^2 \left(\frac{S_{t_e}^1}{S_{t_e}^2} - 1\right)_+ |\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{S^2}}\left[\left(\frac{S_{t_e}^1}{S_{t_e}^2} - 1\right)_+ |\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}
$$

Formule de Margrabe

Démonstration :

- On effectue un changement de numéraire et l'on considère S^2 comme nouveau numéraire. On note $\mathbb{Q}^{S^2}$ la probabilité caractérisée par la densité de Radon-Nikodym suivante : $\dfrac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{S^2}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} = \dfrac{S_T^2}{S_0^2 e^{rT}}$.
- D'après la formule de changement de numéraire, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{v(S^1, S^2, t)}{S_t^2} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(t_e - t)} S_{t_e}^2 \left(\frac{S_{t_e}^1}{S_{t_e}^2} - 1\right)_+ |\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{S^2}}\left[\left(\frac{S_{t_e}^1}{S_{t_e}^2} - 1\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

- On reconnaît alors le prix (avec un taux d'actualisation nul) d'un call de maturité t_e et de strike 1 sur le sous-jacent $\dfrac{S^1}{S^2}$. Ainsi :

$$v(S^1, S^2, t) = S_t^1 \mathcal{N}(d) - S_t^2 \mathcal{N}(d - \sigma_{\text{eq}}\sqrt{t_e - t}).$$

Formule de Margrabe

- **Delta 1 :**

$$\Delta_1 = \frac{\partial v(S^1, S^2, t)}{\partial S_1} = \mathcal{N}(d)$$

- **Delta 2 :**

$$\Delta_2 = \frac{\partial v(S^1, S^2, t)}{\partial S_2} = -\mathcal{N}(d - \sigma_{\text{eq}}\sqrt{t_e - t})$$

- Lorsque les deux sous-jacents ont une volatilité faible, les deltas sont de signe opposé mais sont proches en valeur absolue.
- Lorsque les volatilités sont importantes, $|\Delta_1| \gg |\Delta_2|$.

Formule de Margrabe

- **Sensibilité à la volatilité équivalente :** la valeur augmente avec la volatilité équivalente, comme pour un call classique.

$$\nu = \frac{\partial v(S^1, S^2, t)}{\partial \sigma_{\text{eq}}} \geq 0$$

- **Sensibilité à la corrélation :** la valeur diminue lorsque la corrélation croît (puisque la volatilité équivalente diminue lorsque la corrélation augmente).

$$\frac{\partial v(S^1, S^2, t)}{\partial \rho} = -\nu \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{\text{eq}}} < 0$$

- **Sensibilité à la volatilité d'un des deux actifs :** il peut arriver que la valeur *diminue* lorsque la volatilité d'un des sous-jacents augmente.

$$\frac{\partial v(S^1, S^2, t)}{\partial \sigma_1} = \nu \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma_{\text{eq}}}$$

Prise en compte des strikes

- La formule de Margrabe ne permet pas de prendre en compte de strike dans la valorisation de l'option.
- Même pour une modélisation grossière des centrales, les strikes (qui représentent généralement les coûts de démarrage) ont une grande importance :

	Démarrage (€)	K (€/MWh)	**Spread** (€/MWh)
Charbon (500 MW, 12 h)	50 000	8	4
Gaz (500 MW, 6 h)	15 000	5	-15

Prise en compte des strikes

- Une approche possible est de modéliser directement l'évolution du spread, afin de se ramener au cas Black-Scholes sur un call ou un put.
  - Cependant, cela empêche de calculer un delta différencié par actif, et peut donc amoindrir sensiblement la qualité de la couverture.
- Généralement, on a plutôt recours à des formules approchées, dont la validité est empirique.
  - Formule de Kirk ;
  - Formule d'Eydeland et Wolyniec ;
  - Formule de Bjerksund et Stensland ;
  - Formule de Carmona et Durrleman...

Formule de Kirk

- L'idée de cette formule est d'intégrer le strike K dans l'actif S_t^2, puis d'utiliser la formule de Margrabe.
- On définit dans ce but une volatilité équivalente modifiée :

$$\sigma_K^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{S_t^2}{S_t^2 + K} \right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_t^2}{S_t^2 + K}.$$

- On obtient finalement :

$$v_K(S^1, S^2, t) = e^{-r(t_e - t)} \left[S_t^1 \mathcal{N}(d_K) - (S_t^2 + K)\mathcal{N}(d_K - \sigma_K \sqrt{t_e - t}) \right]$$

avec :

$$d_K = \frac{\ln\left(S_t^1/(S_t^2 + K)\right) + \sigma_K^2 (t_e - t)/2}{\sigma_K \sqrt{t_e - t}}.$$

Formule d'Eydeland et Wolyniec

- L'idée est essentiellement la même que pour la formule de Kirk, mais en faisant intervenir les deux actifs dans la volatilité équivalente :

$$\sigma_E^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{S_t^1}{S_t^2 + K} \right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_t^1}{S_t^2 + K}.$$

- On obtient comme précédemment :

$$v_E(S^1, S^2, t) = e^{-r(t_e - t)} \left[S_t^1 \mathcal{N}(d_E) - (S_t^2 + K)\mathcal{N}(d_E - \sigma_E \sqrt{t_e - t}) \right]$$

avec :

$$d_E = \frac{\ln\left(S_t^1 / (S_t^2 + K) \right) + \sigma_E^2 (t_e - t)/2}{\sigma_E \sqrt{t_e - t}}.$$

- Avec cette formule, si $S_t^2 + K$ est constant, le prix de l'option est constant, ce qui n'est pas le cas avec la formule de Kirk.

Formule de Carmona et Durrleman

- L'approche est assez différente des deux formules précédentes : ici, on suppose que le spread à maturité a une distribution gaussienne, et on cherche à approcher ses deux premiers moments (*moment matching*).

- On définit :

$$m = (S_t^1 - S_t^2)e^{-r(t_e - t)}$$

et :

$$\sigma_M^2 = e^{-2r(t_e-t)}\Big[(S_t^1)^2(e^{\sigma_1^2(t_e-t)} - 1) + (S_t^2)^2(e^{\sigma_2^2(t_e-t)} - 1) - 2S_t^1 S_t^2(e^{\rho\sigma_1\sigma_2(t_e-t)} - 1)\Big].$$

- Au final :

$$v_M(S^1, S^2, t) = (m - Ke^{-r(t_e-t)})\mathcal{N}(d_M) + \sigma_M \mathcal{N}'(d_M)$$

avec :

$$d_M = \frac{m - Ke^{-r(t_e-t)}}{\sigma_M}.$$

Modélisation de centrales

- Une manière simple de modéliser une centrale est de la voir comme un strip d'options spread :
  - Chaque option correspond à journée ou à une tranche horaire ;
  - Les options sont indépendantes les unes des autres.

  La valeur de la centrale est alors :

$$\sum_{T_b \leq T \leq T_e} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(F_1(T,T) - F_2(T,T) - K \right)_+ | \mathcal{F}_t \right].$$

- En faisant cela, cependant, on néglige un large ensemble de contraintes :
  - Coût de démarrage, nombre de démarrages limité, durée minimale d'arrêt / de fonctionnement, nombre d'heures de fonctionnement limité, émissions de polluants limitées...

- Chacune de ces contraintes réduit la valeur de la centrale par rapport à ce qui est obtenu via une simple réplication par des options spread.

Modélisation de centrales

- Ces contraintes sont *couplantes* : elles lient les pas de temps entre eux, et font dépendre les décisions d'exercice de l'ensemble de la durée de vie de l'actif.

- En notant V la valeur de la centrale, on se retrouve donc à devoir résoudre un problème du type :

$$V(t, x, m) = \sup_{u \in \mathcal{U}_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big[\int_t^{T_e} \phi(s, x_s, u_s) ds | \mathcal{F}_t, X_t = x \Big].$$

  où :
  - $\phi(t, x, m)$ est le payoff de l'actif à l'instant t, lorsque celui-ci se trouve dans l'état m et que le prix observé est x ;
  - X_t est le processus de prix à l'instant t ;
  - $\mathcal{U}_t$ est l'ensemble des états futurs admissibles à l'instant t ;
  - $u \in \mathcal{U}_t$ est une stratégie admissible de gestion de la centrale entre t et T_e ($=$ une succession d'états que prendra l'actif entre t et T_e).

- Les actifs de ce type sont en fait des actifs américains, qui nécessitent des méthodes de valorisation spécifiques.

Contexte

- On cherche à résoudre :

$$V(t,x,m) = \sup_{u \in \mathcal{U}_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^{T_e} \phi(s, x_s, u_s) ds | \mathcal{F}_t, X_t = x\right].$$

- Il faut donc être en mesure de déterminer une stratégie de gestion optimale pour l'actif.
  - La difficulté vient du sup.
  - On ne disposera pas de formule fermée et on va être obligé d'avoir recours à une résolution numérique.
- Le problème est identique pour les actifs américains et bermudéens.
  - En pratique, numériquement, on convertit les actifs américains en actifs bermudéens avec des dates d'exercice très rapprochées.

$$V(t_i,x,m) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{t_i}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t_j \geq t_i} \phi(t_j, x_{t_j}, u_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_i}, X_{t_i} = x\right].$$

Principe de la programmation dynamique

- Pour résoudre ce problème de contrôle stochastique, on a le plus souvent recours à la programmation dynamique.
- L'idée est de décomposer le problème en une somme de petits problèmes que l'on va tous résoudre de manière optimale.
- Si on considère un put américain (avec un taux d'intérêt nul) :

$$V(t_i, S_{t_i}) = \sup_{\tau \in \{t_i, \ldots, t_n\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(K - S_\tau)^+ | \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

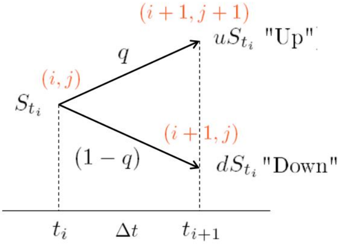
  on va réécrire le problème comme :

$$V(t_i, S_{t_i}) = \max \left((K - S_{t_i})^+ ; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V(t_{i+1}, S_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i} \right] \right)$$

- Sous réserve qu'on sache estimer $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\cdot | \mathcal{F}_{t_i}]$, on n'a plus qu'une simple comparaison à effectuer.
  - On peut utiliser des techniques d'arbres ou l'algorithme de Longstaff-Schwartz pour estimer cette espérance.

Utilisation d'un arbre binomial

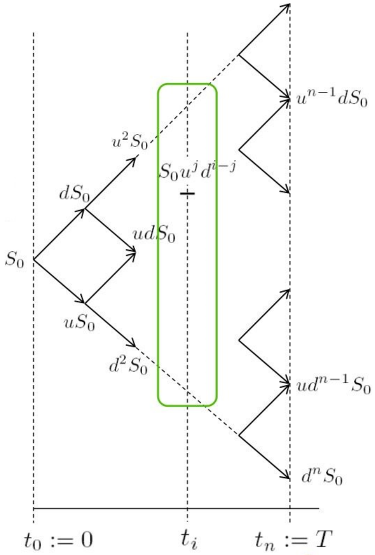
- Une technique pour estimer $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\cdot|\mathcal{F}_{t_i}\right]$ est de représenter les prix via un arbre binomial ou trinomial.
- L'idée est de considérer que, entre t_i et t_{i+1}, le prix du sous-jacent peut :
  - soit monter d'une proportion u ;
  - soit descendre d'une proportion d.
- Ce modèle (dit CRR) converge vers le modèle de Black-Scholes quand le pas de temps entre t_i et t_{i+1} tend vers 0.



Utilisation d'un arbre binomial

- Le modèle peut être étendu à plusieurs pas de temps.
- L'idée est alors d'associer une valeur de l'actif américain à chaque valeur possible du sous-jacent (i.e. : chaque noeud de l'arbre).
- Comme le modèle est discret, l'espérance conditionnelle devient une simple moyenne pondérée :

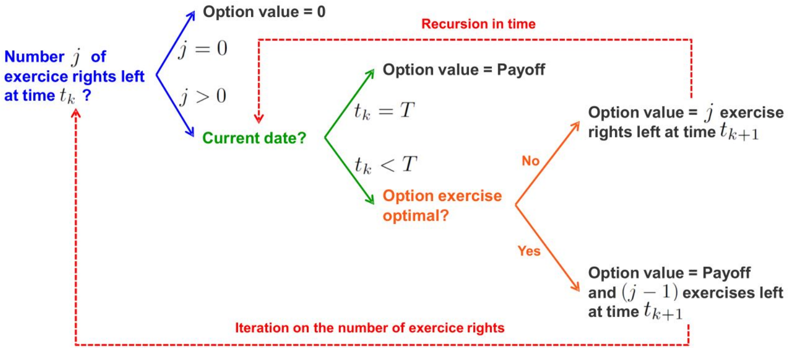
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[V(t_{i+1}, S_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right] = qV(t_{i+1}, uS_{t_i}) + (1-q)V(t_{i+1}, dS_{t_i})$$



Option swing

- Les options swing sont un exemple typique d'actif bermudéen très utilisé dans l'énergie.
  - Une swing correspond au droit d'acquérir (généralement plusieurs fois) une quantité donnée d'énergie à un strike donné.
  - L'utilisation de la swing peut être limitée en nombre d'exercices, en volume d'énergie tirable par exercice ou en volume d'énergie tirable au total.
  - Le strike de la swing peut être fixe ou, plus généralement, construit à partir d'un indice.
- Beaucoup d'actifs correspondent en fait à des swings :
  - Les contrats d'approvisionnement long terme en gaz, via les clauses take-or-pay.
  - Les contrats d'effacement.
  - Les barrages hydrauliques.

Option swing



Stockage gaz

- Un stockage gaz est une cavité qui permet d'entreposer du gaz.
  - D'un point de vue physique, les stockages contribuent à l'équilibre du système gazier.
  - D'un point de vue régulatoire, ils sont obligatoires pour les entreprises qui possèdent un portefeuilles de clients particuliers.
  - D'un point de vue financier, le stockage permet de capter le spread entre les prix du gaz en hiver (prix élevés) et en été (prix bas).
- Un stockage gaz est essentiellement analogue à une option swing, si ce n'est qu'il est possible de soutirer *et* d'injecter.
  - Il fait donc appel aux mêmes techniques de modélisation que l'option swing.

Produits dérivés pour l'énergie

Benoît Alessis
benoit.alessis@edf.fr