# Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Jean-François DELMAS

11 mars 2014

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

On souhaite décrire un processus aléatoire $X = (X_t, t \in \mathbb{R}^+)$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ continu à droite avec des limites à gauche (cad-lag) qui modélise un bruit avec les propriétés suivantes :

**Accroissements indépendants.** Pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire $X_{t+s} - X_s$ est indépendante de la tribu engendrée par $(X_u, u \in [0, s])$.

**Accroissement stationnaires** Pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire $X_{t+s} - X_s$ a même loi que $X_t$.

**Mesurabilité.** Le processus $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^+$.

De tels processus sont appelés processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS). Ils interviennent dans de nombreuses modélisations.

Remarquons que si $X$ est un PAIS, alors pour tout $n \geq 2$, on a :

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \ldots + (X_t - X_{(n-1)t/n}). \tag{1.1}$$

En particulier pour tout entier $n$, $X_t$ est égal en loi à la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes. On dit que la loi de $X_t$ est infiniment divisible.

Dans la suite de ce chapitre, paragraphe 1.1, on donne quelques exemples de PAIS. Dans le chapitre 2, on se concentre sur l'étude des lois infiniment divisibles, en donnant en particulier la formule de Lévy-Khintchine. En utilisant ces résultat, on décrit entièrement les PAIS dans le chapitre 3. Enfin, quelques éléments sur la convergence étroite des mesures sont rappelés dans l'annexe, chapitre 4.

Pour la bibliographie, on renvoie aux ouvrages [3, 6, 7, 1, 2], voir aussi l'introduction [5].

## 1.1 Exemples

Nous donnons quelques exemples bien connus de PAIS, avec en particulier la fonction caractéristique du processus à un instant $t$ donné.

### 1.1.1 Mouvement brownien

Soit $B = (B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien réel. Il s'agit d'un processus aléatoire continu à valeurs dans $\mathbb{R}$ à accroissement indépendants et tel que $B_t$ est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t)$ de moyenne nulle et de variance $t$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Alors le processus $(\sigma B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un PAIS. En particulier on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iu\sigma B_t}\right] = \mathrm{e}^{-tu^2\sigma^2/2}.$$

### 1.1.2 Processus de Poisson

Soit $(T_k, k \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre $\theta > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$N_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}.$$

**Définition 1.1.1.** *On dit que $N = (N_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus de Poisson de paramètre $\theta > 0$.*

Typiquement si $T_k$ désigne la durée de vie d'une machine, et si on utilise les machines les unes après les autres sans les réparer, alors $N_t$ représente le nombre de machines tombées en panne avant l'instant $t$.

En utilisant la propriété d'absence de mémoire des lois exponentielles ($\mathbb{P}(T_1 > t + s | T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > s)$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$), on peut montrer que le processus $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un PAIS.

**Lemme 1.1.2.** *La loi de $N_t$ est la loi de Poisson de paramètre $\theta t$.*

*Démonstration.* On rappelle que la fonction caractéristique de $T_1$ est $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuT_1}\right] = \theta/(\theta - iu)$. On a par indépendance :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuS_n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuT_1}\right]^n = \left(\frac{\theta}{\theta - iu}\right)^n.$$

On en déduit que $S_n$ est de loi gamma de paramètre $(\theta, n)$. En particulier la loi de $S_n$ possède la densité :

$$t \to \frac{\theta^n}{(n-1)!} t^{n-1} \,\mathrm{e}^{-\theta t}\, \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

Pour $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(N_t \geq k) - \mathbb{P}(N_t \geq k+1) \\
&= \mathbb{P}(S_k \leq t) - \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t) \\
&= \int_0^t \left[\frac{\theta^k}{(k-1)!} s^{k-1} \,\mathrm{e}^{-\theta s} - \frac{\theta^{k+1}}{k!} s^k \,\mathrm{e}^{-\theta s}\right] ds \\
&= \left[\frac{\theta^k}{k!} s^k \,\mathrm{e}^{-\theta s}\right]_0^t \\
&= \frac{\theta^k t^k}{k!} \,\mathrm{e}^{-\theta t}.
\end{aligned}$$

On a également $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathrm{e}^{-\theta t}$. On en déduit que $N_t$ est de loi de Poisson de paramètre $\theta t$. □

On déduit de ce qui précède que, pour $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuN_t}\right] = \mathrm{e}^{t\theta(\mathrm{e}^{iu} - 1)}.$$

### 1.1.3 Processus de Poisson composé

Soit $N = (N_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Poisson de paramètre $\theta > 0$ et $(Y_k, k \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles de même loi indépendantes et indépendantes de $N$. On note $G$ la loi de $Y_1$ : $G([a, b]) = \mathbb{P}(Y_1 \in [a, b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le processus $Z = (Z_t, t \in \mathbb{R}^+)$ défini pour $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

avec la convention que $Z_t = 0$ si $N_t = 0$.

**Définition 1.1.3.** *On dit que $Z$ est un processus de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$.*

Il est immédiat de vérifier que le processus $Z = (Z_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un PAIS. On note $\varphi$ la fonction caractéristique de $Y_1$ : $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuY_1}] = \varphi(u)$. On a pour $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuZ_t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuZ_t} | N_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(u)^{N_t}\right] = \mathrm{e}^{\theta t(\varphi(u)-1)} = \mathrm{e}^{t\theta \int_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{iux} - 1)G(dx)}.$$

En particulier, on en déduit, que si $Y_1$ est intégrable :

$$\mathbb{E}[Z_t] = t\theta \int x \ G(dx), \tag{1.2}$$

et si $Y_1$ est de carré intégrable :

$$\mathbb{E}[Z_t^2] = t\theta \int x^2 \ G(dx) + \left(t\theta \int x \ G(dx)\right)^2. \tag{1.3}$$

On déduit des paragraphes précédents que si $B$ est un mouvement brownien et $Z$ un processus de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$ indépendant de $B$ alors le processus $X = (X_t, t \in \mathbb{R}^+)$, où :

$$X_t = bt + \sigma B_t + Z_t,$$

avec $b, \sigma \in \mathbb{R}$, est un PAIS.

# Chapitre 2

# Lois infiniment divisibles

On considère dans ce chapitre des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Si $\mu$ est une mesure finie, on note $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier (voir la définition 4.1.2).

**Définition 2.0.4.** *On dit qu'une mesure de probabilité $\mu$ est infiniment divisible (ID) si pour tout $n \geq 2$, il existe une mesure de probabilité $\mu_n$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$.*

Autrement dit, si $X$ est une variable aléatoire réelle, alors sa loi est ID si pour tout $n \geq 2$, il existe des variables aléatoires réelles $X_1^n, \ldots, X_n^n$ indépendantes et de même loi telles que $\sum_{k=1}^n X_k^n$ a même loi que $X$.

## 2.1 Exemples

1. La loi gaussienne est ID. En effet, si $\mu$ est la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors si $\mu_n$ est la loi gaussienne $\mathcal{N}(m/n, \sigma^2/n)$, on a $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. On aurait pu déduire ce résultat de l'exemple du paragraphe 1.1.1.
2. La loi $\mu$ de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$ où $\theta > 0$ est $G$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ s'interprète comme la loi de $Z_1$ décrit dans la définition 1.1.3. En particulier, elle a pour fonction caractéristique $\hat{\mu}(u) = \mathrm{e}^{\theta \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{iux} - 1)\, G(dx)}$. On en déduit que si $\mu_n$ est la loi de Poisson composé de paramètre $(\theta/n, G)$, alors on a $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. La loi de Poisson composé est donc ID.
3. La loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, $\mu$, a pour densité $\frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2}$ et pour fonction caractéristique $\hat{\mu}(u) = \mathrm{e}^{-|u|\, a}$. On en déduit que si $\mu_n$ est la loi de Cauchy de paramètre $a/n$, alors on a $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. La loi de Cauchy est donc ID.
4. La loi gamma de paramètre $(\theta, \alpha) \in ]0, +\infty[^2$, $\mu$, a pour densité $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \theta^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\theta x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ et pour fonction caractéristique $\hat{\mu}(u) = \left(\frac{\theta}{\theta + iu}\right)^\alpha$. On en déduit que si $\mu_n$ est la loi gamma de paramètre $(\theta, \alpha/n)$, alors on a $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. La loi gamma est donc ID.

## 2.2 Propriétés

On a le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** *Si $\mu$ est une mesure de probabilité ID, alors on a $\hat{\mu}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.*

**Remarque 2.2.2.** La réciproque du lemme 2.2.1 est fausse : on peut construire une mesure de probabilité $\mu$ qui ne soit pas ID et telle que $\hat{\mu}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. (Considérer une mesure de probabilité de support $\{0, a, b\}$ pour un choix judicieux de $a$ et $b$.) $\Diamond$

*Démonstration.* Remarquons que si $Y$ et $Y'$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\nu$, alors la loi de $Y - Y'$ a pour fonction caractéristique $|\hat{\nu}|^2$.

Pour $n \geq 2$, on note $\mu_n$ une mesure de probabilité telle que $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. On déduit de ce qui précède qu'il existe une mesure de probabilité $\nu_n$ telle que $\hat{\nu}_n = |\hat{\mu}_n|^2 = |\hat{\mu}|^{2/n}$. On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\nu}_n(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\mu}(u) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \hat{\mu}(u) = 0. \end{cases}$$

Comme $\hat{\mu}$ est continue en 0 et que $\hat{\mu}(0) = 1$, on en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\nu}_n(u) = 1$ pour $|u| < A$. On déduit du théorème 4.2.6 de Lévy que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\nu}_n$ est une fonction caractéristique. Elle est donc continue. Elle est donc constante égale à 1. On en déduit donc que $\hat{\mu}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. □

On admet le lemme suivant sur la définition et la continuité du logarithme complexe.

**Lemme 2.2.3** (Logarithme complexe)**.** *On a les propriétés suivantes.*

*(i) Soit $O$ un vosinage ouvert de $0$ et $\varphi$ une fonction continue définie sur $O$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(u) \neq 0$ pour tout $u \in O$. Alors il existe une unique fonction $f$ continue définie sur $O$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$ et $\varphi = \mathrm{e}^f$ sur $O$. On dit que $f$ est le logarithme complexe de $\varphi$.*

*(ii) Soit $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ et $\varphi$ des fonctions vérifiant les propriétés du point (i) et $(f_n, n \in \mathbb{N})$ et $f$ leur logarithme complexe respectif. Si la suite $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément sur tous les compacts de $O$ vers $\varphi$, alors la suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément sur tous les compacts de $O$ vers $f$.*

On déduit des lemmes 2.2.1 et 2.2.3 que si $\mu$ est une mesure de probabilité ID, alors il existe une unique fonction continue $\psi$ nulle en 0 telle que $\hat{\mu} = \exp(\psi)$.

Le corollaire suivant assure que la propriété ID est stable pour la convergence en loi.

**Corollaire 2.2.4.** *Soit $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesure de probabilité ID qui converge en loi vers une mesure de probabilité $\mu$. Alors $\mu$ est ID.*

Pour $A > 0$, on note $B_A = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < A\}$ la boule ouverte de rayon $A$ centreé en 0.

*Démonstration.* Soit $p \geq 2$. Il existe une mesure de probabilité $\mu_{n,p}$ telle que $\hat{\mu}_{n,p}^p = \hat{\mu}_n$. Les fonctions $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\mu}_{n,p}$ étant continues et ne s'annulant pas, il existe d'uniques fonctions $\psi_{n,p}$ et $\psi_n$ nulles en 0 telles que $\hat{\mu}_n = \exp(\psi_n)$ et $\hat{\mu}_{n,p} = \exp(\psi_{n,p})$. En particulier, on a :

$$\mathrm{e}^{p\psi_{n,p}} = \mathrm{e}^{\psi_n}.$$

Par unicité on en déduit que $p\psi_{n,p} = \psi_n$.

Par ailleurs, le théorème 4.2.6 de Lévy assure que la suite $(\hat{\mu}_n, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{R}^d$ vers $\hat{\mu}$. La fonction $\hat{\mu}$ est continue et vaut 1 en 0 ; il existe donc $A > 0$ tel que $\hat{\mu}$ ne s'annule pas sur $B_A$. On déduit du point (ii) du lemme 2.2.3 que la suite $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément sur tous les compacts de $B_A$ vers $\psi$ qui est le logarithme complexe de $\hat{\mu}$. On en déduit donc que pour $u \in B_A$ :

$$\hat{\mu}_{n,p}(u) = \mathrm{e}^{\psi_n(u)/p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\psi(u)/p}. \tag{2.1}$$

On déduit du lemme 4.2.7 que la suite $(\mu_{n,p}, n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte. Il existe donc une suite $(n_k, k \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement croissante et une mesure de probabilité $\mu_p$ telle que la sous-suite $(\mu_{n_k,p}, k \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $\mu_p$. On en déduit que :

$$\hat{\mu}_p^p = \lim_{k\to+\infty} \hat{\mu}_{n_k,p}^p = \lim_{k\to+\infty} \hat{\mu}_{n_k} = \hat{\mu}.$$

Ceci étant vrai pour tout $p$, on obtient que la mesure de probabilité $\mu$ est ID. □

**Remarque 2.2.5.** On déduit de la démonstration du corollaire 2.2.4 que si $\mu$ est une mesure de probabilité ID, alors il existe une unique mesure de probabilité $\mu_n$ telle que $\hat{\mu}_n^n = \hat{\mu}$. De plus, la mesure de probabilité $\mu_n$ est également ID. $\diamondsuit$

La proposition suivante assure que toute mesure de probabilité ID est limite de loi de Poisson composé.

**Proposition 2.2.6.** *Toute mesure de probabilité ID est limite de lois de Poisson composé.*

*Démonstration.* Soit $\mu$ une mesure de probabilité ID et $\psi$ son logarithme complexe. La première partie de la démonstration du corollaire 2.2.4 assure que $\mathrm{e}^{\psi/p}$ est la fonction caractéristique de la mesure de probabilité $\mu_p$ telle que $\hat{\mu}_p^p = \hat{\mu}$. On considère $\nu_p$ la loi de Poisson composé de paramètre $(p, \mu_p)$. On a :

$$\hat{\nu}_p = \mathrm{e}^{p(\hat{\mu}_p - 1)} = \exp\left(p(\mathrm{e}^{\psi/p} - 1)\right).$$

On en déduit que $\lim_{p \to +\infty} \hat{\nu}_p = \exp(\psi) = \hat{\mu}$. La suite $(\nu_p, p \geq 2)$ de mesure de probabilité ID converge en loi vers $\mu$. $\square$

## 2.3 Formule de Lévy-Khintchine (cas réel)

On considère dans ce paragraphe des variables aléatoires réelles. On dit que $h$ est une fonction de troncation sur $\mathbb{R}$ si $h$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, mesurable bornée, à support compact et telle que $h(x) = x$ sur un voisinage ouvert de 0. Soit $h$ une fonction de troncation fixée. On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ :

$$\psi_{b,c,F}(u) = iub - \frac{c}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x)\right) \, F(dx), \tag{2.2}$$

où le triplet $(b, c, F)$ vérifie les conditions suivantes :

$$b \in \mathbb{R}, \quad , c \geq 0 \quad \text{et } F \text{ mesure sur } \mathbb{R} \text{ telle que } F(\{0\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) \, F(dx) < +\infty. \tag{2.3}$$

Remarquons que la condition d'intégrabilité sur $F$ assure que la fonction $\psi_{b,c,F}$ est bien définie. De plus, la fonction $\psi_{b,c,F}$ est continue est nulle en 0.

**Remarque 2.3.1.** On peut facilement vérifier que les logarithmes complexes des fonctions caractéristiques des lois ID des exemples 1 et 2 du paragraphe 2.1, sont de la forme (2.2) où le triplet $(b, c, F)$ vérifie les hypothèses (2.3).

1. Si $\mu$ est la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors le logarithme complexe de $\hat{\mu}$ est $ium - \sigma^2 u^2/2$. Il correspond à la fonction définie par (2.2) avec le triplet $(m, \sigma^2, 0)$.
2. Si $\mu$ est la loi de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$, alors le logarithme complexe de $\hat{\mu}$ est $\theta \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) \, G(dx)$. Il correspond à la fonction définie par (2.2) avec le triplet $(b, 0, \theta G)$ où $b = \theta G(h)$.

$\diamondsuit$

Le principal résultat de ce paragraphe est la formule de représentation de Lévy-Khintchine, voir le théorème 2.3.6, qui assure que le logarithme complexe de la fonction caractéristique d'une loi ID est de la forme (2.2) et est caractérisée par un triplet $(b, c, F)$ vérifiant les hypothèses (2.3).

Plusieurs résultats intermédiaires sont nécessaires pour la démonstration de ce théorème. Le lemme suivant assure que le triplet $(b, c, F)$ caractérise la fonction $\psi_{b,c,F}$.

**Lemme 2.3.2.** *Si $(b, c, F)$ et $(b', c', F')$ sont deux triplets distincts qui vérifient (2.3), alors les fonctions $\psi_{b,c,F}$ et $\psi_{b',c',F'}$ sont distinctes.*

*Démonstration.* Soit $(b, c, F)$ un triplet vérifiant (2.3). On note $\psi = \psi_{b,c,F}$. On souhaite montrer que l'on peut calculer $b, c$ et $F$ à partir de $\psi$.

Soit $w \in \mathbb{R}^*$. On définit la fonction $\hat{H}_w$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{H}_w(u) = \psi(u) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi(u + tw)\, dt.$$

Après des calculs élémentaires, il vient :

$$\hat{H}_w(u) = \frac{cw^2}{6} + \int_{\mathbb{R}} F(dx)\ \mathrm{e}^{iux}\left(1 - \frac{\sin(wx)}{wx}\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iux}\ H_w(dx),$$

où la mesure $H_w$ est définie par :

$$H_w(dx) = \frac{cw^2}{6}\delta_0(dx) + \left(1 - \frac{\sin(wx)}{wx}\right)\ F(dx).$$

Comme $F$ intègre $\min(1, x^2)$, on en déduit que la mesure $H_w$ est finie. On obtient $c = 6H_w(\{0\})/w^2$ et $F = \left(1 - \frac{\sin(wx)}{wx}\right)^{-1}(H_w - \frac{cw^2}{6}\delta_0)$. On en déduit que $c$ et $F$ sont déterminés par $H_w$ et donc par $\psi$. On obtient $b$ à partir de (2.2). La fonction $\psi$ caractérise donc le triplet $(b, c, F)$. □

**Remarque 2.3.3.** Remarquons que pour une fonction $\psi$ donnée par (2.2), et donc associée au triplet $(b, c, F)$ et la fonction de troncation $h$, alors pour la fonction de troncation $h'$ la fonction $\psi$ est associée au triplet $(b', c', F')$ avec :

$$F = F', \quad c = c' \quad \text{et} \quad b - b' = F(h - h').$$

♢

**Lemme 2.3.4.** *Si le triplet $(b, c, F)$ vérifie les hypothèses (2.3), alors il existe $\mu$ une mesure de probabilité ID dont le logarithme complexe est donné par $\psi_{b,c,F}$ (i.e. $\hat{\mu} = \exp(\psi_{b,c,F})$) définie par (2.2).*

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \{x; |x| > 1/n\}$. On considère $\mu_n$ la loi de $X_n$ défini par

$$X_n = b - \int_{|x|>1/n} h(x)\ F(dx) + Y + Z_n,$$

où $Y$ et $Z_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, $Y$ de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, c)$ et $Z_n$ de loi de Poisson composé de paramètre $(\theta_n, G_n)$ avec :

$$\theta_n = F(I_n) \quad \text{et} \quad G_n(dx) = \frac{1}{\theta_n}\mathbf{1}_{I_n}(x)\ F(dx).$$

On a :

$$\hat{\mu}_n = \exp(\psi_n) \quad \text{et} \quad \psi_n(u) = iub - \frac{c}{2}u^2 + \int_{I_n}\left(\mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x)\right)\ F(dx).$$

Comme les lois de $Y$ et $Z_n$ sont ID et que $Y$ et $Z_n$ sont indépendantes, on en déduit que $\mu_n$ est ID. Par convergence dominée, on a $\lim_{n\to+\infty}\psi_n = \psi_{b,c,F}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\hat{\mu}_n = \exp(\psi_{b,c,F})$. Comme la fonction $\exp(\psi_{b,c,F})$ est continue en 0, on déduit du théorème de Lévy 4.2.6 qu'il existe une mesure de probabilité $\mu$ telle que $\hat{\mu} = \exp(\psi_{b,c,F})$ et $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $\mu$. On déduit alors du corollaire 2.2.4 que $\mu$ est ID. □

Le théorème suivant établit un lien entre la convergence des triplets et la convergence en loi des loi ID.

**Théorème 2.3.5.** *Soit $h$ une fonction de troncation fixée continue. Soit $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesure de probabilité ID dont les logarithmes complexes sont de la forme (2.2) avec les triplets respectifs $(b_n, c_n, F_n)$ vérifiant les hypothèses (2.3). Soit $\mu$ une mesure de probabilité ID. Les deux propriétés a) et b) suivantes sont équivalentes où :*

*a) La suite $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $\mu$.*

*b) Il existe un triplet $(b, c, F)$ vérifiant les hypothèses (2.3) tel que le logarithme complexe de $\hat{\mu}$ est donné par $\psi_{b,c,F}$ défini dans (2.2) ; et le triplet $(b, c, F)$ est caractérisé par :*

*(i) $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$.*

*(ii) Pour toute fonction $f$ continue bornée, nulle sur un voisinage de 0, $F(f) = \lim_{n\to+\infty} F_n(f)$.*

*(iii) $c + F(h^2) = \lim_{n\to+\infty} c_n + F_n(h^2)$.*

*De plus, les conditions (i) et (ii) impliquent la condition (ii') suivante : Pour toute fonction $f$ continue bornée telle que $f = o(x^2)$ en 0 (i.e. $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 0$), $F(f) = \lim_{n\to+\infty} F_n(f)$.*

*Démonstration.* **Montrons que b) implique a).**

Grâce au théorème de Lévy 4.2.6 et au lemme 2.3.4, il suffit de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \psi_{b_n,c_n,F_n} = \psi_{b,c,F}$.

On pose $\tilde{c}_n = c_n + F_n(h^2)$ et $\tilde{c} = c + F(h^2)$. On remarque que

$$\psi_{b_n,c_n,F_n}(u) = iub_n - \frac{\tilde{c}_n}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} \varphi_u(x)\, F_n(dx) = iub_n - \frac{\tilde{c}_n}{2}u^2 + F_n(\varphi_u),$$

où

$$\varphi_u(x) = \mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x) + \frac{u^2}{2}h^2(x).$$

La fonction $\varphi_u$ est continue bornée et $\varphi_u = o(x^2)$ en 0 car $h(x) = x$ sur un voisinage de 0. Si la condition (ii') est satisfaite alors on a $\lim_{n\to+\infty} \psi_{b_n,c_n,F_n} = \psi_{b,c,F}$ et donc b) implique a).

Il reste donc à montrer que les conditions (i) et (ii) impliquent la condition (ii'). Soit $f$ continue bornée telle que $f = o(x^2)$ en 0. Soit $\eta > 0$. Comme $f = o(x^2)$ en 0, il existe $\varepsilon > 0$ (petit) tel que :

$$|f(x)|\mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \leq \eta x^2 \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \leq \eta h^2(x).$$

Soit $g_\varepsilon$ une fonction continue positive bornée par 1, nulle sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ et égale à 1 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[^c$. On a :

$$F_n(f) = F_n(fg_\varepsilon) + F_n(f(1 - g_\varepsilon)).$$

La propriété (ii) assure que $\lim_{n\to+\infty} F_n(fg_\varepsilon) = F(fg_\varepsilon)$. On a également :

$$|F_n(f(1 - g_\varepsilon))| \leq F_n(|f|\mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}) \leq \eta F_n(h^2) \leq \eta\tilde{c}_n.$$

De manière similaire $|F(f(1 - g_\varepsilon))| \leq \eta\tilde{c}$. On en déduit donc que :

$$\limsup_{n\to+\infty} |F_n(f) - F(f)| \leq 2\eta\tilde{c}.$$

Comme $\eta > 0$ est arbitraire et $\tilde{c}$ est fini, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} |F_n(f) - F(f)| = 0.$$

Ceci assure que (ii') est vérifié.

**Montrons que a) implique b).**

On note $\psi_n = \psi_{b_n,c_n,F_n}$. Le corollaire 2.2.4 assure que $\mu$ est ID et le point (i) du lemme 2.2.3 que logarithme complexe $\psi$ de $\hat{\mu}$ est bien défini. Le théorème 4.2.6 de Lévy assure que $(\hat{\mu}_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers $\hat{\mu}$ uniformément sur les compacts. Le point (ii) du lemme 2.2.3 assure alors que $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers $\psi$ uniformément sur les compacts. On considère les mesures

$$H^n(dx) = \frac{c_n}{6}\delta_0(dx) + \left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right) F_n(dx).$$

Les hypothèses 2.3 sur $F_n$ impliquent que la mesure $H^n$ est finie. Les calculs de la démonstration du lemme 2.3.2 assurent que :

$$\hat{H}^n(u) = \psi_n(u) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi_n(u+t)\; dt.$$

Comme $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers $\psi$ uniformément sur les compacts, on en déduit que la suite $(\hat{H}^n, n \in \mathbb{N})$ converge simplement vers la fonction $g$ définie par :

$$g(u) = \psi(u) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi(u+t)\; dt.$$

La fonction $g$ étant continue en 0, on déduit du théorème 4.2.6 de Lévy qu'il existe une mesure finie $H$ telle que $\hat{H} = g$ et $(H_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers $H$. On définit de manière unique $c \geq 0$ et $F$ par :

$$H(dx) = \frac{c}{6}\delta_0(dx) + \left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right)\; F(dx),$$

où $F(\{0\}) = 0$ et $F$ intègre la fonction $\min(1, x^2)$. En effet, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} F(dx)\; \min(1, x^2) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} H(dx)\; \frac{\min(1, x^2)}{1 - \frac{\sin(x)}{x}} < +\infty.$$

Soit $f$ continue bornée telle que $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2$ existe. On considère la fonction $\varphi_f$, définie par :

$$\varphi_f(0) = 6 \lim_{y\to 0} f(y)/y^2 \quad \text{et} \quad \varphi_f(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\sin(x)}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

La fonction $\varphi_f$ est continue bornée sur $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\frac{c_n}{6}\varphi_f(0) + F_n(f) = H_n(\varphi_f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\varphi_f) = \frac{c}{6}\varphi_f(0) + F(f). \tag{2.4}$$

Il est immédiat d'en déduire les propriétés (ii) et (ii').

Avec $f = h^2$, on a $\varphi_{h^2}(0) = 6$ et la fonction $\varphi_{h^2}$ est continue est bornée. On déduit donc de (2.4) que :

$$c_n + F_n(h^2) = H_n(\varphi_{h^2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\varphi_{h^2}) = c + F(h^2).$$

Ceci assure la propriété (iii).

On pose :

$$k(u) = \psi(u) + \frac{c}{2}u^2 - \int_{\mathbb{R}} F(dx)\; \left(\mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x)\right).$$

Remarquons que :

$$k(u) = \psi(u) + \frac{c + F(h^2)}{2}u^2 - \int_{\mathbb{R}} F(dx)\; \left(\mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x) + \frac{h(x)^2}{2}u^2\right).$$

On déduit de (ii') et (iii) que :

$$\lim_{n\to+\infty} iub_n = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(u) + \frac{c_n + F_n(h^2)}{2}u^2 - \int_{\mathbb{R}} F_n(dx)\; \left(\mathrm{e}^{iux} - 1 - iuh(x) + \frac{h(x)^2}{2}u^2\right) = k(u).$$

Ceci assure la convergence de la suite $(b_n, n \in \mathbb{N})$ vers une limite $b$ et donc la propriété (i). On en déduit $k(u) = iub$ et $\psi = \psi_{b,c,F}$. Le logarithme complexe de $\mu$ est donc donné par $\psi_{b,c,F}$. Ceci termine la démonstration de b). □

On énonce le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 2.3.6.** *Soit $\mu$ une mesure de probabilité ID. Alors, pour une fonction $h$ de troncation fixée, il existe un unique triplet $(b, c, F)$ vérifiant (2.3) tel que :*

$$\hat{\mu} = \exp\left(\psi_{b,c,F}\right). \tag{2.5}$$

*Démonstration.* Soit $\mu$ une mesure de probabilité ID. La proposition 2.2.6 assure que $\mu$ est limite de loi de Poisson composé. L'exemple 2 de la remarque 2.3.1 assure que le logarithme complexe de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson composé est de la forme (2.2) où le triplet caractéristique vérifie les hypothèses (2.3). Le théorème 2.3.5 assure alors qu'il existe un triplet $(b, c, F)$ vérifiant les hypothèses (2.3) tel que le logarithme complexe de $\hat{\mu}$ est donné par $\psi_{b,c,F}$ défini dans (2.2). L'unicité découle du lemme 2.3.2. $\square$

## 2.4 Formule de Lévy-Khintchine (cas vectoriel)

On considère dans ce paragraphe des variables aléatoires vectorielles. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$ et $|\cdot|$ la norme correspondante.

On dit que $h$ est une fonction de troncation sur $\mathbb{R}^d$ si $h$ est définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, mesurable bornée, à support compact et telle que $h(x) = x$ sur un voisinage ouvert de 0. Soit $h$ une fonction de troncation fixée. On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ :

$$\psi_{b,c,F}(u) = i\langle u, b\rangle - \frac{\langle u, cu\rangle}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, h(x)\rangle\right) F(dx), \tag{2.6}$$

où le triplet $(b, c, F)$ vérifie les conditions suivantes :

$$b \in \mathbb{R}^d, \quad c \text{ est une matrice de taille } d \times d \text{ symétrique positive } (i.e.\ \langle u, cu\rangle \geq 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d)$$
$$\text{et } F \text{ est une mesure sur } \mathbb{R}^d \text{ telle que } F(\{0\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \min(1, |x|^2)\, F(dx) < +\infty. \tag{2.7}$$

Les théorèmes 2.3.5 et 2.3.6 restent vrais pour des lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^d$, avec (2.2) et (2.3) remplacés par (2.6) et (2.7).

On utilisera la définition suivante.

**Définition 2.4.1.** *Soit $\mu$ une mesure de probabilité ID (réelle ou vectorielle) et $(b, c, F)$ le triplet défini par $\hat{\mu} = \exp\left(\psi_{b,c,F}\right)$ est appelé triplet caractéristique de $\mu$.*

# Chapitre 3

# Description des PAIS

On donne la définition suivante.

**Définition 3.0.2.** *Soit* $X = (X_t, t \geq 0)$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *défini sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dit que* $X$ *est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) si :*
*(i) Pour tous* $s, t \geq 0$, $X_{t+s} - X_t$ *est indépendant de* $\sigma(X_u, u \in [0,t])$.
*(ii) Pour tous* $s, t \geq 0$, $X_{t+s} - X_t$ *a même loi que* $X_s$.
*(iii) La fonction* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *est mesurable par rapport à la tribu* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On déduit de (1.1) que si $X$ est un PAIS alors $X_t$ est ID.

## 3.1 Semi-groupe de convolution

On donne la définition suivante.

**Définition 3.1.1.** *On dit qu'une famille de probabilités* $(\mu_t, t \geq 0)$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *est un semi-groupe de convolution si, pour tous* $t, s \geq 0$, *on a* $\hat{\mu}_{t+s} = \hat{\mu}_t \hat{\mu}_s$. *On dit que le semi-groupe de convolution* $(\mu_t, t \geq 0)$ *est mesurable si pour tout borélien* $A$ *l'application* $t \to \mu_t(A)$ *est mesurable.*

La proposition suivante établit le lien entre semi-groupe de convolution et loi ID.

**Proposition 3.1.2.** *On a :*
*(i) Si* $(\mu_t, t \geq 0)$ *est un semi-groupe de convolution alors* $\mu_t$ *est une mesure de probabilité ID.*
*(ii) Si* $\mu$ *est une mesure de probabilité ID alors il existe un semi-groupe de convolution* $(\mu_t, t \geq 0)$ *tel que* $\mu_1 = \mu$.

*Démonstration.* Le point (i) est immédiat car $\hat{\mu}_t = (\hat{\mu}_{t/n})^n$. Pour le point (ii), le théorème 2.3.6 assure que :

$$\hat{\mu} = \exp\left(\psi_{b,c,F}\right).$$

pour un certain triplet $(b, c, F)$ vérifiant (2.7). Soit $t \geq 0$. On remarque que :

$$t\psi_{b,c,F} = \psi_{tb,tc,tF},$$

et le triplet $(tb, tc, tF)$ vérifie (2.7). Ceci assure que $\exp\left(t\psi_{b,c,F}\right)$ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité $\mu_t$, et on a :

$$\hat{\mu}_t = \exp\left(t\psi_{b,c,F}\right).$$

Il est alors évident que $(\mu_t, t \geq 0)$ est un semi-groupe de convolution. $\square$

On rappelle le résultat suivant (voir [4]).

**Lemme 3.1.3.** *Soit* $a = (a(t), t \geq 0)$ *une fonction réelle mesurable telle que, pour tout* $t, s \geq 0$, $a(t+s) = a(t) + a(s)$. *Alors pour tout* $t \geq 0$, *on a* $a(t) = t\, a(1)$.

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.4.** *Si* $(\mu_t, t \geq 0)$ *est un semi-groupe de convolution mesurable, alors il existe un unique triplet* $(b, c, F)$ *vérifiant (2.3) tel que :*

$$\hat{\mu}_t = \exp\left(t\psi_{b,c,F}\right).$$

*De plus* $(\mu_t, t \geq 0)$ *est continu pour la convergence étroite.*

*Démonstration.* Comme $\mu_t$ est ID, son logarithme complexe $\psi_t$ est uniquement défini, et $\hat{\mu}_t = \exp(\psi_t)$. Comme $\hat{\mu}_{t+s} = \hat{\mu}_t \hat{\mu}_s$, on en déduit que (par unicité du logarithme complexe, voir le lemme 2.2.3), que, pour tout $t, s \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a $\psi_{t+s}(u) = \psi_t(u) + \psi_s(u)$. La mesurabilité du semi-groupe implique la mesurabilité de la fonction $t \to \psi_t(u)$. On déduit du lemme 3.1.3 que $\psi_t(u) = t\psi_1(u)$. Ceci donne la première partie du corollaire. La continuité du semi-groupe pour la convergence étroite découle de la continuité (en $t$) de $\hat{\mu}_t(u)$. □

On en déduit donc le théorème suivant.

**Théorème 3.1.5.** *On a :*

*(i) Si* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est un PAIS alors* $(\mu_t, t \geq 0)$, *où* $\mu_t$ *est la loi de* $X_t$, *est un semi-groupe de convolution mesurable.*

*(ii) Si* $(\mu_t, t \geq 0)$, *où* $\mu_t$ *est un semi-groupe de convolution mesurable, alors il existe un PAIS* $X = (X_t, t \geq 0)$ *tel que* $\mu_t$ *est la loi de* $X_t$.

*Démonstration.* La point (i) est immédiat et le point (ii) découle du théorème d'extension de Kolmogorov, voir [3]. □

## 3.2 Propriétés trajectorielles et propriété de Markov fort

On a le lemme suivant.

**Lemme 3.2.1.** *Si* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est un PAIS alors* $X$ *est continu en probabilité.*

*Démonstration.* On considère la continuité à droite. On a les équivalences suivantes :

$$X_t \xrightarrow[t\downarrow s]{\mathbb{P}} X_s \iff X_t - X_s \xrightarrow[t\downarrow s]{\mathbb{P}} 0 \iff X_t - X_s \xrightarrow[t\downarrow s]{\text{loi}} 0 \iff X_{t-s} \xrightarrow[t\downarrow s]{\text{loi}} 0 \iff \hat{\mu}_{t-s} \xrightarrow[t\downarrow s]{} 1.$$

La continuité à gauche est similaire. □

Pour démontrer qu'un PAIS est un processus à trajectoires continues à droite avec des limites à gauche (cad-lag) il faut utiliser le théorème suivant que nous admettrons.

**Théorème 3.2.2.** *Soit* $M = (M_t, t \geq 0)$ *une sous-martingale continue à droite en probabilité. Alors il existe une version de* $M$ *(i.e. un processus mesurable* $(M'_t, t \geq 0)$ *tel que pour tout* $t \geq 0$, $\mathbb{P}(M'_t = M_t) = 1$*) cad-lag.*

La proposition suivante assure que les PAIS sont cad-lag, quitte à les remplacer par leur version cad-lag.

**Proposition 3.2.3.** *Tout PAIS possède une version cad-lag.*

*Démonstration.* On donne la démonstration dans le cas réel. Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un PAIS. On pose pour $u \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ :

$$M_t^u = \mathrm{e}^{iuX_t - t\psi(u)} .$$

Les martingales $M^u = (M_t^u, t \geq 0)$ sont continues en probabilités. On en déduit que pour $u$ fixé, p.s. le processus $(M_t^u, t \in \mathbb{Q}^+)$ admet des limites à droite et à gauche en tout $t \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, p.s. (en $\omega$) et $du$-p.p. (pour la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$), le processus $(M_t^u, t \in \mathbb{Q}^+)$ admet des limites à droite et à gauche en tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Remarquons que $\exp(iub)$ peut s'interpréter comme la transformée de Fourier de la masse de Dirac en $b$. En reprenant la démonstration du lemme 4.2.7, on remarque que si $(\exp(iua_n), n \geq 0)$ converge vers $\exp(iua)$, quand $n$ tend vers l'infini, $du$-p.p., alors la suite $(\delta_{a_n}, n \geq 0)$ est relativement compacte. Ceci implique que la suite $(a_n, n \geq 0)$ est relativement compacte. Si $b$ est une valeur d'adhérence de la suite on en déduit que $\exp(iub) = \exp(iua)$ p.p., puis pour tout $u \in \mathbb{R}$ par continuité. Comme la transformée de Fourier d'une mesure la caractérise, on en déduit que $b = a$. Donc la suite $(a_n, n \geq 0)$ converge vers $a$.

On déduit de ce qui précède que p.s. $(X_t, t \in \mathbb{Q}^+)$ admet des limites à droite et à gauche en tout $t \in \mathbb{R}^+$. Pour $t \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q}^+$, on pose $X'_t = \lim_{s \downarrow t;\, s \in \mathbb{Q}^+} X_s$. Le processus $(X'_t, t \geq 0)$ est alors cad-lag. Comme $X$ est continu en probabilité, on en déduit que $X'$ est une version de $X$. $\square$

Le théorème suivant sur la propriété forte de Markov, que nous admettrons, se démontre en utilisant des approximations discrètes croissantes des temps d'arrêt.

**Théorème 3.2.4.** *Soit $T$ une temps d'arrêt fini p.s. et soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un PAIS. Alors le processus $Y = (X_{t+T} - X_T, t \geq 0)$ a même loi que $X$ et est indépendant de $\sigma(X_u, u \in [0, T])$.*

## 3.3 Mesures ponctuelles de Poisson

La notion de mesure ponctuelle de Poisson est très utile pour la représentation des PAIS et pour définir des intégrales stochastiques par rapport aux PAIS.

**Définition 3.3.1.** *Soit $\mu$ une mesure $\sigma$-finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ non atomique (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu(\{x\}) = 0$). On dit que $N$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$ si :*

***Mesure aléatoire.*** *La mesure $N$ est aléatoire : $A \to N(\omega, A)$ est une mesure et $\omega \to N(\omega, A)$ est mesurable pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

***Mesure ponctuelle.*** *La mesure $N$ est ponctuelle :*

$$N(\omega, dx) = \sum_{i \in I(\omega)} \delta_{x_i(\omega)}(dx),$$

*où p.s. $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.*

***Indépendance.*** *Pour tout suite au plus dénombrable de boréliens $(A_k, k \in K)$ deux à deux disjoints, les variables aléatoires $(N(A_k), k \in K)$ sont indépendantes.*

***Intensité.*** *Pour tout borélien $A$, on a $\mathbb{E}[N(A)] = \mu(A)$.*

On a le théorème suivant qui motive la référence à la loi de Poisson.

**Théorème 3.3.2.** *Soit $N$ une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$ (non-atomique) et $A$ un borélien.*

*(i) Si $\mu(A) < +\infty$ alors $N(A)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\mu(A)$.*

*(ii) Si $\mu(A) = +\infty$ alors p.s. on a $N(A) = +\infty$.*

*Démonstration.* Le point (ii) découle du point (i). En effet soit $A$ un borélien tel que $\mu(A) = +\infty$. Comme $\mu$ est non-atomique il existe une suite de boréliens $(A_n, n \in \mathbb{N})$ disjoints deux à deux tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A$ et $\mu(A_n) = 1$. Le point (i) assure que les variables aléatoires $(N(A_n), n \in \mathbb{N})$ sont indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. On déduit de la loi forte des grands nombres que p.s. $N(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} N(A_n) = +\infty$.

La démonstration du point (i) se fait en trois étapes. On considère $\varphi_A$ la transformée de Laplace de la loi $\mu_A$ de $N(A)$, pour $\lambda \geq 0$ :

$$\varphi_A(\lambda) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda N(A)}\right].$$

En particulier, on a :

$$0 \leq 1 - \varphi_A(\lambda) = \mathbb{E}\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda N(A)}\right] \leq \lambda \mathbb{E}[N(A)] = \lambda\mu(A). \tag{3.1}$$

**Étape 1**. On montre que la loi de $N(A)$ est ID.

Soit $n \geq 2$. Comme $\mu$ est sans atome, il existe $(A_n^k, 1 \leq k \leq n)$ boréliens disjoints deux à deux tels que $\bigcup_{k=1}^n A_n^k = A$ et $\mu(A_n^k) = \mu(A)/n$. On a, en utilisant (3.1) :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) = \prod_{k=1}^n \varphi_{A_n^k}(\lambda) = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^n \log\left(1-(1-\varphi_{A_n^k}(\lambda))\right)} &= \mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^n\left(1-\varphi_{A_n^k}(\lambda)\right)} + o(1)\\ &= \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi_{A_n^k}(\lambda)-1\right)} + o(1).\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi_{A_n^k}(\lambda)-1\right)} = \varphi_A(\lambda).$$

Le membre de gauche correspond à la transformée de Laplace d'une loi de Poisson composé de paramètre $(n, G_n)$ où $G_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mu_{A_n^k}$. On en déduit donc que la loi de $N(A)$ est limite de loi ID. Le corollaire 2.2.4 assure que la loi de $N(A)$ est ID.

**Étape 2**. On montre que la loi de $N(A)$ est une loi de Poisson composé.

Soit $(b, c, F_A)$ le triplet caractéristique associé à la loi de $N(A)$. On suppose que la fonction de troncation est nulle sur $B_{1/2}^c$. On reprend les notations de l'étape 1. Comme les variables aléatoires $N(A_n^k)$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on en déduit que $\mu_{A_n^k}$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ et donc $G_n$ aussi. Le triplet caractéristique associé à la loi de Poisson composé de paramètre $(n, G_n)$ est donc $(0, 0, nG_n)$. En particulier $G_n(h^2) = 0$. L'étape 1 et le théorème 2.3.5 assurent que $b = 0$ et $c = 0$. De plus $F_A$ est une mesure sur $\mathbb{N}^*$ comme limite de mesures sur $\mathbb{N}^*$ et $F_A$ est finie car elle vérifie (2.3).

**Étape 3**. On montre que la loi de $N(A)$ est la loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$.

La variable $N(A)$ a même loi que $\sum_{k=1}^R Y_k$ où les variables aléatoires $(Y_k, k \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes de loi $F_A/F_A(\mathbb{N}^*)$ et $R$ est de loi de Poisson de paramètre $F_A(\mathbb{R}) = F_A(\mathbb{N}^*)$. On déduit de l'étape 2 que :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda N(A)}\right] = \exp\left(\int_{\mathbb{N}^*} F_A(dx)(\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1)\right).$$

En faisant converger $\lambda$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\mathbb{P}(N(A) = 0) = \mathrm{e}^{-F_A(\mathbb{N}^*)} = \mathbb{P}(R = 0).$$

On a également

$$\mathbb{P}(N(A) = 1) = \mathbb{P}(R = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{F_A(\{1\})}{F_A(\mathbb{N}^*)} F_A(\mathbb{N}^*)\,\mathrm{e}^{-F_A(\mathbb{N}^*)} = F_A(\{1\})\,\mathrm{e}^{-F_A(\mathbb{N}^*)}.$$

Pour tout $n \geq 2$, on se donne des boréliens $(A_n^k, 1 \leq k \leq k_n)$ disjoints deux à deux tels que $\mu(A_n^k) \leq 1/n$ et soit diam $(A_n^k) \leq 1/n$ (borélien de petit diamètre) soit $d(0, A_n^k) \geq n$ (borélien à distance grande de l'origine). Par définition des mesures ponctuelles de Poisson et les propriétés des processus de Poisson composé, on a $\sum_{k=1}^{k_n} F_{A_n^k} = F_A$, car les boréliens $(A_n^k, 1 \leq k \leq k_n)$ sont disjoints deux à deux. Comme $N$ est une mesure ponctuelle finie, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(N(A_n^k) \in \{0,1\},\ \text{pour tout } 1 \leq k \leq k_n) = 1. \tag{3.2}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(A_n^k) \in \{0,1\},\ \text{pour tout } 1 \leq k \leq k_n) &= \prod_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}(N(A_n^k) \in \{0,1\}) \\
&= \prod_{k=1}^{k_n} \mathrm{e}^{-F_{A_n^k}(\mathbb{N}^*)} \left(1 + F_{A_n^k}(\{1\})\right) \\
&= \mathrm{e}^{-F_A(\mathbb{N}^*)}\, \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{k_n} \log\left(1+F_{A_n^k}(\{1\})\right)}.
\end{aligned}$$

Comme :

$$F_{A_n^k}(\{1\}) = \mathbb{P}(N(A_n^k) = 1)\, \mathrm{e}^{F_{A_n^k}(\mathbb{N}^*)} \leq \mathbb{E}[N(A_n^k)]\, \mathrm{e}^{F_A(\mathbb{N}^*)} = \frac{\mu(A_n^k)}{\mathbb{P}(N(A)=0)} \leq \frac{1}{n\mathbb{P}(N(A)=0)},$$

on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{k_n} \log\left(1 + F_{A_n^k}(\{1\})\right) = \sum_{k=1}^{k_n} F_{A_n^k}(\{1\}) + o(1).$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(N(A_n^k) \in \{0,1\},\ \text{pour tout } 1 \leq k \leq k_n) = \mathrm{e}^{-F_A(\mathbb{N}^*)+F_A(\{1\})+o(1)}.$$

On déduit donc de (3.2) que $F_A(\mathbb{N}^*) = F_A(\{1\})$ et donc $F_A = F_A(\mathbb{N}^*)\delta_1$. Ceci assure que $N(A)$ est de loi de Poisson de paramètre $\mathbb{E}[N(A)] = \mu(A)$. □

**Exercice 3.3.3.** Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. On défini la mesure ponctuelle $N = \sum_{t\geq 0} \mathbf{1}_{\{N_{t-} \neq N_t\}} \delta_t$. Montrer que $N$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\theta \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} dx$. ♦

Le théorème suivant permet de construire explicitement des mesures ponctuelles de Poisson.

**Théorème 3.3.4.** *Soit $\mu$ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ non-atomique. Soit $(E_i, i \in I)$ une partition de $\mathbb{R}^d$ en un nombre au plus dénombrable de boréliens tels que $0 < \mu(E_i) < +\infty$. On note $\mu_i = \mathbf{1}_{E_i} \frac{1}{\mu(E_i)} \mu$. Soit $X_i$ et $Y_{i,k}$ pour $i \in I$ et $k \in \mathbb{N}^*$ des variables aléatoires indépendantes, avec $X_i$ de loi de Poisson de paramètre $\mu(E_i)$ et $Y_{i,k}$ de loi $\mu_i$. La mesure aléatoire $N$ définie par*

$$N(dx) = \sum_{i\in I} \sum_{k=1}^{X_i} \delta_{Y_{i,k}}(dx)$$

*est une mesure de ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$.*

*Démonstration.* La mesure aléatoire $N$ est ponctuelle si pour tout $(i,k) \neq (j,\ell)$ on a $Y_{i,k} \neq Y_{j,\ell}$. On a :

$$\mathbb{P}(\exists (i,k) \neq (j,\ell); Y_{i,k} = Y_{j,\ell}) \leq \sum_{(i,k)\neq(j,\ell)} \mathbb{P}(Y_{i,k} = Y_{j,\ell}).$$

Comme $\mu$ est non-atomique et que $Y_{i,k}$ et $Y_{j,\ell}$ sont indépendantes, on en déduit que $\mathbb{P}(Y_{i,k} = Y_{j,\ell}) = 0$ et donc $N$ est une mesure ponctuelle.

Soit $(A_j, j \in J)$ une suite au plus dénombrable de boréliens disjoints deux à deux. Quitte à considérer $(A_j \cap E_i, i \in I)$ plutôt que $A_j$, on peut supposer que pour tout $j \in J$, $A_j \subset E_{i_j}$ pour un certain indice $i_j \in I$. On pose $\theta_i = \mu(E_i)$. En utilisant l'indépendance, et en conditionnant par $(X_i, i \in I)$, il vient pour $(\lambda_j, j \in J)$ des réels positifs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\sum_{j\in J}\lambda_j N(A_j)}\right] &= \prod_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\theta_i^n\,\mathrm{e}^{-\theta_i}}{n!}\mathbb{E}\left[\exp(-\sum_{j;i_j=i}\lambda_j\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_j}(Y_{i,k}))\right] \\
&= \prod_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\theta_i^n\,\mathrm{e}^{-\theta_i}}{n!}\left[\int \mu_i(dx)\exp(-\sum_{j;i_j=i}\lambda_j\mathbf{1}_{A_j}(x))\right]^n \\
&= \prod_{i\in I}\exp\left(\int_{E_i}\mu(dx)\left[\mathrm{e}^{-\sum_{j;i_j=i}\lambda_j\mathbf{1}_{A_j}(x)}-1\right]\right) \\
&= \exp\left(\int \mu(dx)\left[\mathrm{e}^{-\sum_{j\in J}\lambda_j\mathbf{1}_{A_j}(x)}-1\right]\right) \\
&= \exp\left(\int \mu(dx)\sum_{j\in J}\mathbf{1}_{A_j}(x)\left[\mathrm{e}^{-\lambda_j}-1\right]\right) \\
&= \prod_{j\in J}\exp\left(\mu(A_j)\left[\mathrm{e}^{-\lambda_j}-1\right]\right).
\end{aligned}$$

Ceci assure que les variables aléatoires $(N(A_j), j \in J)$ sont indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\mu(A_j)$, et donc $N$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$. □

On déduit du théorème 3.3.2 le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.5.** *Soit $N$ une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$ (non-atomique). Soit $(A_k, k \in K)$ une partition de $\mathbb{R}^d$ au plus dénombrable. Alors les mesures aléatoires $(\mathbf{1}_{A_k}(x)N(dx), k \in K)$ sont des mesures ponctuelles de Poisson indépendantes et d'intensité respective $\mathbf{1}_{A_k}(x)\mu(dx)$.*

Si $\mu$ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, on note $\mu(f) = \int f(x)\,\mu(dx)$.

**Lemme 3.3.6.** *Soit $f$ une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}^d$. Soit $N$ une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu$ (non-atomique). On a :*

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-N(f)}\right] = \exp\left(\int \mu(dx)\,(\mathrm{e}^{-f(x)}-1)\right). \tag{3.3}$$

*Démonstration.* On déduit de la démonstration du théorème 3.3.4 que la formule (3.3) est vraie pour des fonctions simples positives *i.e.* de la forme $\sum_{j\in J}\lambda_j\mathbf{1}_{A_j}$ où les $(A_j, j \in J)$ sont deux à deux disjoints, les $(\lambda_j, j \in J)$ sont positifs et $J$ est au plus dénombrable. Toute fonction borélienne positive est limite croissante de fonctions simples positives. Des arguments de convergence monotone et dominée assure alors que (3.3) est vraie pour toute fonction borélienne positive. □

## 3.4 Mesures ponctuelles de Poisson et processus de Poisson composé

On peut construire des processus de Poisson composé à l'aide des mesures ponctuelles de Poisson.

**Proposition 3.4.1.** *Soit $\mu$ une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$. Soit $V(dsdy) = \sum_{i\in I}\delta_{(s_i,Y_i)}(dsdy)$ une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mathbf{1}_{\{s>0\}}ds\,\mu(dy)$. Le processus $U = (U_t, t \geq 0)$ défini par :*

$$U_t = \sum_{i\in I}\mathbf{1}_{\{s_i\leq t\}}Y_i,$$

*est un Processus de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$ où $\theta = \mu(\mathbb{R}^d)$ et $G = \frac{1}{\theta}\,\mu$.*

*Démonstration.* Soit $t > 0$ fixé. Le corollaire 3.3.5 assure que $(Y_i, s_i \leq t)$ et $(Y_j, s_j > t)$ sont indépendants. En particulier, pour $s \geq 0$, $U_{t+s} - U_t$ est indépendant de $(U_u, u \in [0,t])$. Enfin la mesure aléatoire $\sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{t < s_i \leq t+s\}} \delta_{(s_i - t, Y_i)}(dsdy)$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mathbf{1}_{[0,s]}(r)\; dr\; \mu(dy)$. Elle a donc même loi que $\sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{s_i \leq s\}} \delta_{(s_i - t, Y_i)}(dsdy)$. On en déduit que $U_{t+s} - U_t$ a même loi que $U_s$. Le processus $(U_t, t \geq 0)$ est donc un PAIS. La formule (3.3) assure que pour $\lambda \geq 0$ :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda U_t}\right] = \exp\left(\int ds \mu(dx)\; \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1)\right) = \exp\left(t \int \mu(dx)\; (\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1)\right).$$

On en déduit que $(U_t, t \geq 0)$ est un Poisson composé de paramètre $(\mu(\mathbb{R}^d), \mu/\mu(\mathbb{R}^d))$. □

Si $\mu(\{0\}) = 0$, on en déduit que $\{s_i, i \in I\}$ représente l'ensemble des temps de saut du processus $U$ : $\{s_i, i \in I\} = \{s; \Delta U_s \neq 0\}$, où $\Delta U_s = U_s - U_{s-}$. De plus, $Y_i$ représente le saut à l'instant $s_i$ : $Y_i = \Delta U_{s_i}$. En particulier, on peut reconstruire la mesure ponctuelle $V$ à l'aide de $U$. Par abus de notation, on écrira également $V$ sous la forme :

$$V = \sum_{\Delta U_s \neq 0} \delta_{(s, \Delta U_s)}.$$

On a le lemme suivant associé aux processus de Poisson composé.

**Lemme 3.4.2.** *Soit $U = (U_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson composé de paramètre $(\theta, G)$. On note $F = \theta G$. Soit $f$ une fonction mesurable. On pose :*

$$N_t^f = \sum_{s \leq t,\; \Delta U_s \neq 0} f(\Delta U_s).$$

*(i) Si $f \in L^1(F)$, alors $M^f = (M_t^f, t \geq 0)$ où $M_t^f = N_t^f - tF(f)$ est une martingale (par rapport à la filtration naturelle de $U$).*

*(ii) Si $f \in L^2(F)$, alors $\left((M_t^f)^2 - tF(f^2), t \geq 0\right)$ où $M_t^f = N_t^f - tF(f)$ est une martingale (par rapport à la filtration naturelle de $U$).*

*Démonstration.* Par construction $(N_t^f, t \geq 0)$ est une processus de Poisson composé de paramètre $(\theta, G_f)$, où $G_f$ est la loi de $f(Y)$ quand $Y$ est de loi $G$. On a :

$$|N_t^f| \leq \sum_{s \leq t,\; \Delta U_s \neq 0} |f(\Delta U_s)|.$$

Comme $f \in L^1(F)$, on déduit de (1.2) que :

$$\mathbb{E}[|N_t^f|] \leq t \int |f(x)|\; F(dx) < +\infty.$$

Le processus $M^f$ est donc intégrable. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{t+s}^f | \mathcal{F}_t] &= N_t^f - (t+s)F(f) + \mathbb{E}[N_{t+s}^f - N_t^f | \mathcal{F}_t] \\
&= N_t^f - (t+s)F(f) + \mathbb{E}[N_{t+s}^f - N_t^f] \\
&= N_t^f - (t+s)F(f) + \mathbb{E}[N_s^f] \\
&= M_t^f,
\end{aligned}$$

où on utilise que $N^f$ est à accroissements indépendants pour la deuxième égalité, que $N^f$ est à accroissements stationnaires pour la troisième égalité et (1.2) pour la quatrième.

Comme $f \in L^2(G)$, on déduit de (1.3) que $M^f$ est de carré intégrable. Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M^f_{t+s})^2|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[(M^f_{t+s}-M^f_t)^2 + 2M^f_t(M^f_{t+s}-M^f_t)|\mathcal{F}_t\right] + (M^f_t)^2 \\ &= \mathbb{E}\left[(M^f_s)^2\right] + (M^f_t)^2 \\ &= sF(f^2) + +(M^f_t)^2,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $N^f$ est à accroissements indépendants et stationnaires pour la deuxième égalité et (1.3) pour la troisième. On en déduit que $\left((M^f_t)^2 - tF(f^2), t \geq 0\right)$ est une martingale. □

## 3.5 Structure des PAIS

On a le théorème principal suivant pour la représentation des PAIS.

**Théorème 3.5.1.** *Soit $(b, c, F)$ un triplet vérifiant les conditions (2.7) et $h(x) = x\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ comme fonction de troncation sur $\mathbb{R}^d$. Soit $W = (W_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$ ($W_t$ est de loi $\mathcal{N}(0, tI_d)$, où $I_d$ est la matrice identité de taille $d \times d$) et $N(dtdx) = \sum_s \delta_{(s,\Delta_s)}(dtdx)$ une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ d'intensité $dt\ F(dx)$. On suppose $W$ et $N$ indépendants. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$Z^p_t = \sum_{s\leq t} \Delta_s \mathbf{1}_{\{1/p\leq|\Delta_s|<1/(p-1)\}}, \tag{3.4}$$

*et pour $p \geq 2$,*

$$M^p_t = Z^p_t - t\int xF(dx)\ \mathbf{1}_{\{1/p\leq|x|<1/(p-1)\}}. \tag{3.5}$$

*Alors les processus $W$ et $Z^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ sont indépendants et sont des PAIS. De plus la série $M_t = \sum_{p\geq2} M^p_t$ existe et converge dans $L^2$. Soit $\sqrt{c}$ une matrice de taille $d \times d$ telle que $(\sqrt{c})^t\sqrt{c} = c$. On pose :*

$$X_t = bt + \sqrt{c}W_t + Z^1_t + M_t.$$

*Le processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est un PAIS de triplet caractéristique $(b, c, F)$.*

De la construction du théorème, on remarque que $\Delta_s = \Delta X_s$. En particulier pour un PAIS, les instants et la valeurs des sauts forment une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $dtF(dx)$. La mesure $F$ caractérise la loi des sauts du PAIS.

**Remarque 3.5.2.** Quand le PAIS $X = (X_t, t \geq 0)$ est à valeurs réelles positives, on dit que $X$ est un subordinateur. On peut alors montrer[1] que $c = 0$, $F(]-\infty, 0]) = 0$, $\int_{]0,+\infty[} \min(1, x)\ F(dx) < +\infty$, et $b + F(h) \geq 0$. ♢

*Démonstration.* Le corollaire 3.3.5 assure que les processus $(Z^p, p \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendants.

On pose $I_p = \{x; 1/p \leq |x| < 1/(p-1)\}$. La proposition 3.4.1 assure que le processus $Z^p$ est un processus de Poisson composé de paramètre $(\theta_p, G_p)$ où $\theta_p = F(I_p)$ et $\theta_p G_p(dx) = \mathbf{1}_{I_p}(x)F(dx)$. On en déduit que $Z^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ sont des PAIS.

Le lemme 3.4.2 (avec $f = h$) assure que $M^p$ est une martingale ainsi que le processus $t \to (M^p)^2_t - t\int_{I_p} x^2\ F(dx)$. Ceci implique que $t \to \sum_{k=n}^m M^k_t$ est une martingale et $t \to (\sum_{k=n}^m M^k_t)^2 - t\int_{\bigcup_{k=n}^m I_k} x^2\ F(dx)$ aussi. On déduit de l'inégalité de Doob que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |\sum_{k=n}^m M^k_s|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|\sum_{k=n}^m M^k_t|^2\right] = 4t\int_{\bigcup_{k=n}^m I_p} x^2\ F(dx) \leq 4t\int_{|x|<1/n} x^2 F(dx).$$

1. Voir le contrôle de 2008-2009

Ceci assure que la suite $\left((\sum_{p=2}^{n} M_s^p, s \in [0,t]), n \geq 2\right)$ est une suite de Cauchy dans l'espace des processus stochastiques définis sur $[0,t]$ muni de la norme $Y \to \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |Y_s|^2\right]$. Donc la série $M_t = \sum_{p\geq 2} M_t^p$ existe et converge dans $L^2$. Et le processus $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Par construction, on en déduit que $X$ est un PAIS. Il reste donc à calculer son triplet caractéristique. Pour cela il suffit de calculer la fonction caractéristique de $X_t$. On remarque que :

$$X_t = \lim_{n\to+\infty} bt + \sqrt{c}W_t + Z_t^1 + \sum_{p=2}^{n} M_t^p.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\langle u, bt\sqrt{c}W_t + Z_t^1 + \sum_{p=2}^n M_t^p\rangle}\right] &= \mathrm{e}^{it\langle u,b\rangle - t\langle u,cu\rangle/2}\, \mathrm{e}^{t\int_{|x|\geq 1} F(dx)\ (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1)} \\
&\qquad \mathrm{e}^{t\int_{1/n\leq |x|<1} F(dx)\ (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1) - it\int_{1/n\leq|x|<1}\langle u,x\rangle\ F(dx)} \\
&= \exp\left(it\langle u,b\rangle - t\frac{\langle u,cu\rangle}{2} + t\int_{1/n\leq|x|} F(dx)\ (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, h(x)\rangle)\right).
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\langle u,X_t\rangle}] &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{it\langle u,b\rangle - t\langle u,cu\rangle/2 + t\int_{1/n\leq|x|} F(dx)\ (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,h(x)\rangle)} \\
&= \exp\left(it\langle u,b\rangle - t\frac{\langle u,cu\rangle}{2} + t\int F(dx)\ (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,h(x)\rangle)\right).
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure □

## 3.6 Générateur infinitésimal

**Définition 3.6.1.** *Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une fonction mesurable $f$ appartient au domaine du générateur infinitésimal de $X$, noté $L$, si :*

- *La variable $f(X_t)$ est intégrable.*
- *Il existe une fonction mesurable $g$ telle que $\int_0^t g(X_s)\, ds$ est bien défini pour tout $t \geq 0$ et est intégrable.*
- *Le processus $M = (M_t, t \geq 0)$ est une martingale, où*

$$M(t) = f(X_t) - \int_0^t g(X_s)\, ds.$$

*On note alors $g = Lf$.*

On a le théorème suivant dont la démonstration est admise.

**Théorème 3.6.2.** *Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $f, f'$ et $f''$ soient bornées. Soit $X$ un PAIS à valeurs réelles associé au triplet caractéristique $(b,c,F)$ et la fonction de troncation $h$. Alors $f$ est dans le domaine du générateur infinitésimal de $X$ et on a :*

$$Lf(x) = bf'(x) + \frac{c}{2}f''(x) + \int \left(f(x+y) - f(x) - h(y)f'(x)\right)\ F(dy).$$

Le générateur infinitésimal pour les PAIS à valeurs vectorielles a une forme similaire.

# Chapitre 4

# Annexe

## 4.1 Mesure et transformation de Fourier

Soit $(S, d)$ un espace métrique et $\mathcal{S}$ la tribu borélienne sur $S$ associée (*i.e.* engendrée par les ouverts de $S$ définis par la métrique $d$). On rappelle la définition d'une mesure sur $(S, \mathcal{S})$.

**Définition 4.1.1.** *On a les définitions suivantes.*

*(i) Une fonction $\mu$ définie sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ possède la propriété de $\sigma$-additivité si pour toute collection $(A_i, i \in I)$ au plus dénombrable d'ensembles mesurables disjoints deux à deux, autrement dit $A_i \in \mathcal{S}$ pour tout $i \in I$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, on a :*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i). \tag{4.1}$$

*(ii) Une mesure $\mu$ sur $(S, \mathcal{S})$ est une fonction définie sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ possédant la propriété de $\sigma$-additivité.*

*(iii) Une mesure $\mu$ est dite finie si $\mu(S) < +\infty$. On dit que $\mu$ est une mesure de probabilité si $\mu(S) = 1$.*

Par convention, si $g$ est une fonction mesurable, on note $\mu(g)$ l'intégrale de $g$ par rapport à la mesure $\mu$, quand cela a un sens :

$$\mu(g) = \int_S g(x)\, \mu(dx)$$

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $|\cdot|$ la norme associée.

**Définition 4.1.2.** *Soit $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La transformée de Fourier de $\nu$ est la fonction $\hat{\nu}$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par :*

$$\hat{\nu}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\langle u, x \rangle}\ \nu(dx), \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

*Si $\nu$ est une mesure de probabilité (i.e. $\nu(\mathbb{R}^d) = 1$), alors $\hat{\nu}$ est aussi appelée fonction caractéristique de la loi ou de la mesure de probabilité $\nu$.*

Il est immédiat de vérifier la proposition suivante.

**Proposition 4.1.3.** *Soit $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On a les propriétés suivantes :*

*(i) La fonction $\hat{\nu}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

*(ii) On a $|\hat{\nu}(u)| \leq \hat{\nu}(0) = \nu(\mathbb{R}^d)$.*

On rappelle le théorème important suivant.

**Théorème 4.1.4.** *Soit $\nu$ et $\mu$ deux mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors on a $\mu = \nu$ si et seulement si $\hat{\nu} = \hat{\mu}$.*

## 4.2 Convergence étroite, convergence en loi

**Définition 4.2.1.** *Soit $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers $\nu$ si pour toute fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue bornée, on a $\nu_n(g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(g)$.*

En particulier, on dit qu'une suite de mesures de probabilité $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi si elle converge étroitement et que sa limite est une mesure de probabilité.

On rappelle le théorème important suivant.

**Théorème 4.2.2.** *Soit $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers $\nu$ si et seulement si*

$$\sup_{g;\|g\|_{BL}\leq 1} |\nu_n(g) - \nu(g)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

*où*

$$\|g\|_{BL} = \|g\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}.$$

On introduit les notions de relative compacité puis de tension pour une famille de mesures.

**Définition 4.2.3.** *Soit $\Pi$ un ensemble de mesures finies sur $\mathbb{R}^d$.*
- *On dit que $\Pi$ est relativement compact si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement.*
- *On dit que $\Pi$ est tendu si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K$ de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $\nu \in \Pi$, on a $\nu(K^c) \leq \varepsilon$.*

On rappelle le théorème de Prohorov suivant.

**Théorème 4.2.4** (Théorème de Prohorov)**.** *Soit $\Pi$ un ensemble de mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. Si $\Pi$ est tendu et si $\sup_{\nu\in\Pi} \nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, alors $\Pi$ est relativement compact.*

**Remarque 4.2.5.** Le théorème de Prohorov est également vrai pour un ensemble de mesures finies sur un espace métrique $S$ muni de la tribu borélienne. Si de plus $S$ est complet et séparable, alors on a la réciproque du théorème de Prohorov. $\Diamond$

On démontre le théorème central suivant de Paul Lévy.

**Théorème 4.2.6** (Théorème de Lévy)**.** *Soit $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $\nu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*

*(i) La suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers $\nu$ si et seulement si $\hat{\nu}_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \hat{\nu}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. De plus cette dernière convergence est uniforme sur les compacts.*

*(ii) S'il existe une fonction $g$ telle que $\hat{\nu}_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et que $g$ est continue en $0$, alors il existe une mesure finie $\nu$ telle que $\hat{\nu} = g$ et la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers $\nu$.*

*Démonstration.* La partie directe du point (i) est immédiate. La convergence uniforme sur les compacts découle du théorème 4.2.2. La réciproque est une conséquence directe du point (ii).

Pour démontrer le point (ii), on utilise le lemme 4.2.7 ci-dessous qui assure que la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte. Soit $\nu$ un point d'accumulation. Alors, par définition de la convergence étroite, on en déduit que $\hat{\nu}$ est un point d'accumulation de la suite $(\hat{\nu}_n, n \in \mathbb{N})$. En particulier on a $\hat{\nu} = g$ pour tout point d'accumulation. Le théorème 4.1.4 assure qu'il existe donc un seul point d'accumulation. La suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ converge donc étroitement vers $\nu$ caractérisé par $\hat{\nu} = g$. $\square$

**Lemme 4.2.7.** *Soit $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. S'il existe $A > 0$ et une fonction $g$ continue en 0 telle que $\hat{\nu}_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(u)$ sur un voisinage ouvert de 0, alors la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte.*

*Démonstration.* On donne une démonstration dans le cas $d = 1$, le cas $d > 1$ se démontre de manière similaire.

Remarquons que la fonction $x \to \sin(x)/x$ est paire, décroissante sur $[0, \pi]$, vaut 1 en $x = 0$ et 0 en $x = \pi$. On en déduit que $\sin(x)/x \leq 1$ et donc

$$1 - \frac{\sin(x)}{x} \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*. \tag{4.2}$$

On a les minorations suivantes pour $u \in ]0, A[$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (\hat{\nu}_n(0) - \hat{\nu}_n(t))\ dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} \left(1 - \mathrm{e}^{itx}\right)\ dt\nu_n(dx) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\right)\ \nu_n(dx) \\
&\geq 2\int_{|x|\geq 2/u} \left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\right)\ \nu_n(dx) \\
&\geq 2\int_{|x|\geq 2/u} \left(1 - \frac{1}{ux}\right)\ \nu_n(dx) \\
&\geq \nu_n(|x| \geq 2/u).
\end{aligned}$$

Remarquons que $\nu_n(\mathbb{R}) = \hat{\nu}_n(0)$ et que la suite $(\nu_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N})$ converge vers $g(0)$. En particulier $c_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\mathbb{R})$ est fini. En particulier $|\hat{\nu}_n(u)| \leq c_0$. Par convergence dominée, il vient :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \nu_n(|x| \geq 2/u) &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (\hat{\nu}_n(0) - \hat{\nu}_n(t))\ dt \\
&= \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (g(0) - g(t))\ dt.
\end{aligned}$$

On déduit de la continuité de $g$ en 0 que $\lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (g(0) - g(t))\ dt = 0$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que $\nu_n(|x| > a) \leq \varepsilon$. Ceci assure que la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ est tendue.

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\mathbb{R})$ est fini, le théorème 4.2.4 assure que la suite $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte.

$\square$

# Bibliographie


[1] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] R. Cont and P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[3] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer-Verlag, 1987.

[4] G. Letac. Cauchy functional equation again. *Amer. Math. Monthly*, 85(8) :663–664, 1978.

[5] A. Papapantoleon. An introduction to lévy processes with applications in finance. 2008.

[6] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

[7] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.