Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Benjamin JOURDAIN

3 janvier 2022

Chapitre 1

Calcul stochastique pour les processus de Lévy

1.1 Décomposition de Lévy-Itô des processus de Lévy

On travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.1. *On appelle processus de Lévy ou processus à accroissements indépendants et stationnaires un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que*

(i) $(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$ *est* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$*-mesurable ;*

(ii) $\forall s, t \geq 0$, $X_{t+s} - X_t$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$ *;*

(iii) $X_{t+s} - X_t \overset{\mathcal{L}}{=} X_s$.

Pour le choix $s = 0$, la propriété (iii) implique que $X_0 = 0$.

Théorème 1.1.2. Formule de Lévy-Khintchine

1. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, il existe un unique triplet (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F mesure positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$F(\{0\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) F(dx) < +\infty \tag{1.1}$$

tel que $\forall t \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = e^{t\psi_{b,c,F}(u)}$ où

$$\psi_{b,c,F}(u) = ibu - \frac{u^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) F(dx)$$

2. *Inversement, pour tout triplet (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F mesure positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1.1), il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $\forall t \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = e^{t\psi_{b,c,F}(u)}$.*

Proposition 1.1.3. *Tout processus de Lévy est continu en probabilité*

$$\forall t \geq 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \epsilon) = 0.$$

Théorème 1.1.4. *Tout processus de Lévy a une modification dont les trajectoires sont continues à droite et avec une limite finie à gauche (càdlàg).*

On travaille avec cette version càdlàg. Pour $t > 0$, on note $X_{t^-} = \lim_{s \nearrow t^-} X_s$ et $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$.

Remarque 1.1.5. Pour $t > 0$, si $(t_n)_n$ est une suite de temps dans $[0, t[$ qui converge vers t lorsque $n \to \infty$, X_{t_n} converge p.s. et donc en probabilité vers X_{t^-}. D'après la proposition 1.1.3, X_{t_n} converge en probabilité vers X_t. Donc $\mathbb{P}(X_t = X_{t^-}) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(\Delta X_t \neq 0) = 0$.

Le lemme suivant assure que l'ensemble $\{t > 0 : \Delta X_t \neq 0\}$ des temps de sauts du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est presque sûrement dénombrable (au sens où il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur cet ensemble).

Lemme 1.1.6. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction càdlàg. Alors $\{s > 0 : f(s) \neq f(s^-)\}$ est dénombrable. En outre, pour tout $T \in [0, +\infty[$, $\sup_{t\in[0,T]} |f(t)| < +\infty$.*

Démonstration : Comme toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, il suffit de montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A_{n,p} \overset{\text{def}}{=} \{s \in]0, n[: |f(s) - f(s^-)| \geq \frac{1}{p}\}$ est fini.

Supposons que $A_{n,p}$ est infini et obtenons une contradiction. Choisissons une suite $(s_k)_{k\geq 1}$ d'éléments distincts de $A_{n,p}$. Par compacité de l'intervalle $[0, n]$, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $s_\infty \in [0, n]$ t.q. $\lim_{k\to\infty} s_k = s_\infty$. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite on peut supposer que $\forall k$, $s_k < s_\infty$ ou que $\forall k$, $s_k > s_\infty$.

Plaçons nous dans la première situation, la seconde se traitant de façon symétrique. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une limite à gauche pour f au point s_k assure l'existence de $\tilde{s}_k \in [s_k - \frac{1}{k}, s_k[$ t.q. $|f(\tilde{s}_k) - f(s_k^-)| \leq \frac{1}{2p}$. D'où

$$|f(s_k) - f(\tilde{s}_k)| \geq |f(s_k) - f(s_k^-)| - |f(s_k^-) - f(\tilde{s}_k)| \geq \frac{1}{2p}.$$

Nous contredisons donc le critère de Cauchy équivalent à l'existence d'une limite à gauche pour f au point s_∞.

Soit maintenant $T > 0$ et $(t_k)_k$ une suite d'éléments de $[0, T]$ t.q. $|f(t_k)|$ converge vers $\sup_{t\in[0,T]} |f(t)|$ lorsque $k \to \infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(t_k)_k$ converge vers une limite $s \in [0, T]$ soit par valeurs strictement inférieures auquel cas $\sup_{t\in[0,T]} |f(t)| = |f(s^-)|$ soit par valeurs supérieures auquel cas $\sup_{t\in[0,T]} |f(t)| = |f(s)|$. Le supremum est donc fini. □

Exercice 1.1.7. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite avec des limites à gauche à valeurs réelles sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'objectif de cet exercice est de montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \{t > 0 : \mathbb{P}(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$ est au plus dénombrable.

1. Que peut-on dire de $\mathcal{T}$ lorsque $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy ?
2. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction càdlàg, que peut-on dire de $\{t \in]0, q] : |\Delta f(t)| \geq \frac{1}{q}\}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$ et de $\{t > 0 : \Delta f(t) \neq 0\}$? En déduire que $\int_0^{+\infty} 1_{\{\Delta f(t)\neq 0\}} dt = 0$.
3. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $\int_0^{+\infty} 1_{\{t\in\mathcal{T}\}} dt = 0$. Cela suffit-il à établir le résultat souhaité ?

4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Que peut-on dire de la suite $(\bigcup_{m\geq n} A_m)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \geq \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$.
5. Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{T}_{p,q} = \{t \in]0,q] : \mathbb{P}(|\Delta X_t| \geq \frac{1}{q}) \geq \frac{1}{p}\}$.
   (a) Lorsque $\mathcal{T}_{p,q} \neq \emptyset$, pour $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_{p,q}$, on note $A_n = \{|\Delta X_{t_n}| \geq \frac{1}{q}\}$. Avec la question 4, montrer que
   $$\mathbb{P}\left(\{n \in \mathbb{N}^* : |\Delta X_{t_n}| \geq \frac{1}{q}\} \text{ est infini}\right) \geq \frac{1}{p}$$
   et en déduire avec la question 2 que $\mathcal{T}_{p,q}$ est fini.
   (b) Conclure que $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable.

On note
$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$
la mesure ponctuelle associée aux sauts. Dans cette formule, pour alléger les notations, on n'explicite pas la dépendance en ω mais la mesure N est bien aléatoire :
$$N(\omega, dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s(\omega)\neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt, dx).$$

Théorème 1.1.8. Décomposition de Lévy-Itô
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (b, c, F).

1. *Alors N est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $F(dx)\,dt$. En particulier, pour $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$, on a*
   — $N(A) \sim \mathcal{P}\left(\int_A F(dx)\,dt\right)$ *(convention : si $Y \sim \mathcal{P}(\infty)$, $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 1$) ;*
   — $N(A)$ *est indépendante de* $N(B)$.
2. *En outre,*
   $$\forall t \geq 0,\ X_t = bt + \sqrt{c}W_t + Z_t^1 + M_t$$
   où, lorsque $c > 0$, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de N, pour $p \in \mathbb{N}^*$
   $$Z_t^p = \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\left\{\frac{1}{p}<|\Delta X_s|\leq\frac{1}{p-1}\right\}}$$
   et $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable définie par
   $$M_t = \sum_{p\geq 2}\left(Z_t^p - t\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\left\{\frac{1}{p}<|x|\leq\frac{1}{p-1}\right\}}F(dx)\right)$$
   où la série converge dans $\mathbb{L}^2$.

Par définition, on a
$$Z_t^p = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\left\{\frac{1}{p}<|x|\leq\frac{1}{p-1}\right\}}N(ds, dx),$$
et on note
$$M_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(ds, dx),$$

où $\tilde{N}(ds, dx) = N(ds, dx) - F(dx)\, ds$.

L'objectif des deux paragraphes suivants est de définir de façon plus générale des intégrales stochastiques respectivement par rapport à la mesure de Poisson N et la mesure de Poisson compensée $\tilde{N}$. Notons que l'intégrale stochastique par rapport à N est simplement l'intégrale ω par ω d'une fonction contre une mesure. En revanche, l'intégrale stochastique par rapport à $\tilde{N}$ est un objet plus compliqué défini par une limite $\mathbb{L}^2$. En fait, sa construction est analogue à celle de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien et repose comme elle sur une propriété d'isométrie. Notons que dans le cas où $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} F(dx) < +\infty$ (condition d'intégrabilité au voisinage de 0 plus forte que celle supposée dans le théorème 1.1.2), alors on peut donner un sens à $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} F(dx) ds$ d'une part et à $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} N(ds, dx)$ d'autre part et que

$$M_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} N(ds, dx) - \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} F(dx) ds.$$

Sans cette condition d'intégrabilité renforcée sur F, il n'est pas possible d'effectuer cette décomposition.

Terminons ce paragraphe en rappelant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Poisson, ce résultat étant à la base des propriétés d'isométrie énoncées dans les deux paragraphes suivants :

Lemme 1.1.9. *Soit $\lambda > 0$ et $\nu \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\nu = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$). Alors* $\mathrm{Var}\,(\nu) = \mathbb{E}(\nu) = \lambda$.

Démonstration : La fonction génératrice de ν est $G_\nu(s) = \mathbb{E}(s^\nu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{(s\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}$. Donc $G'_\nu(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$ et $G''_\nu(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$. Comme $\mathbb{E}(\nu) = G'_\nu(1)$ et $\mathrm{Var}\,(\nu) = G''_\nu(1) + G'_\nu(1)(1 - G'_\nu(1))$, on conclut facilement. □

Si $F(\mathbb{R}) < +\infty$, pour tout $t > 0$ la variable aléatoire $N(]0,t]\times\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(tF(\mathbb{R}))$ est finie p.s. et $(X_t)_{t\geq 0}$ comporte seulement un nombre fini de sauts sur tout intervalle borné. Même lorsque $F(\mathbb{R}) = +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$F([-\varepsilon,\varepsilon]^c) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^c} 1\wedge\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 F(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} 1\wedge\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 F(dx) \leq \frac{1}{1\wedge\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)F(dx) < +\infty$$

par (1.1). Ainsi pour tout $t > 0$ la variable aléatoire $N(]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c) \sim \mathcal{P}(tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c))$ est finie p.s. et $(X_t)_{t\geq 0}$ comporte seulement un nombre fini de sauts de taille strictement supérieure à ε en valeur absolue sur tout intervalle borné. D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebychev et le lemme 1.1.9,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N(]0,t]\times\mathbb{R}) \leq \frac{tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c)}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left(N(]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c) \leq \frac{tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c)}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mathbb{E}[N(]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c)] - N(]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c) \geq \frac{tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c)}{2}\right) \\
&\leq \frac{4\mathrm{Var}\,(N(]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c)}{(tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c))^2} = \frac{4}{tF([-\varepsilon,\varepsilon]^c)}.
\end{aligned}$$

Lorsque $F(\mathbb{R}) = +\infty$, en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans cette inégalité, on conclut que $\mathbb{P}(N(]0,t]\times\mathbb{R}) < +\infty) = 0$ c'est-à-dire que $(X_t)_{t\geq 0}$ comporte p.s. une infinité de sauts sur tout intervalle de temps de longueur non nulle.

1.2 Intégrale stochastique par rapport à N

On se fixe un horizon $T > 0$. On veut intégrer un processus $H(s,x) = H(\omega,s,x)$ contre N avec $(\omega,s,x) \longrightarrow H(\omega,s,x)$ une application mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de l'espace $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$. Pour alléger les notations, nous n'expliciterons pas nécessairement la variable ω. Pour $\varepsilon > 0$, comme la restriction de N à l'ensemble $]0,t]\times[-\varepsilon,\varepsilon]^c$ est p.s. une somme finie de masses de Dirac, on peut définir ω par ω

$$\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\mathbf{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}N(ds,dx) = \sum_{s\le t} H(s,\Delta X_s)\,\mathbf{1}_{\{|\Delta X_s|>\varepsilon\}}$$

le second membre étant une somme finie. Lorsque $F(\mathbb{R}) = +\infty$, on a cependant du mal à définir $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,N(ds,dx)$. Des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité et de mesurabilité sont nécessaires pour H.

Définition 1.2.1. *On appelle tribu prévisible sur $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}$ la plus petite tribu $\mathcal{P}$ qui rend mesurable toutes les applications $G(\omega,t,x)$ telles que*

(i) $\forall t\in[0,T],\ (\omega,x)\longrightarrow G(\omega,t,x)$ est $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable ;

(ii) $\forall(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R},\ t\longrightarrow G(\omega,t,x)$ est continue à gauche.

Un processus $H(\omega,t,x)$ est dit prévisible s'il est $\mathcal{P}$-mesurable.

La définition suivante introduit deux classes particulières importantes de processus prévisibles.

Définition 1.2.2.
- *On appelle processus élémentaire un processus de la forme $H(\omega,s,x) = h(\omega)\,\mathbf{1}_{]r,t]\times A}(s,x)$ où $0\le r\le t\le T$, $h:\Omega\to\mathbb{R}$ est une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_r$-mesurable et $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifie $F(A) < +\infty$.*
- *On appelle processus simple une combinaison linéaire de processus élémentaires avec les ensembles $]r,t]\times A$ disjoints.*

Tout processus élémentaire faisant partie de la classe des processus qui sert à définir $\mathcal{P}$, il est bien prévisible. On en déduit la prévisibilité des processus simples.

Théorème 1.2.3.
Soit H un processus prévisible t.q. $\mathbb{E}[\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|H(s,x)|F(dx)\,ds] < +\infty$. Alors pour tout $t\in]0,T]$, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,N(ds,dx)$ a un sens p.s.. C'est une application càdlàg à variation finie de t. En outre, $\left(M_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,N(ds,dx) - \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,F(dx)\,ds\right)_{0\le t\le T}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale et on a la propriété d'isométrie

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,t]\times\mathbb{R}}|H(s,x)|\,N(ds,dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]0,t]\times\mathbb{R}}|H(s,x)|\,F(dx)\,ds\right].$$

Démonstration :

Propriété d'isométrie :
Nous admettrons l'existence d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus simples positifs telle

que pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $K_n(s,x) \nearrow_{n\to\infty} |H(s,x)|$ p.s.. Pour un processus élémentaire $G = h(\omega)\mathbf{1}_{]r,t]\times A}(s,x)$, comme $F(A) < +\infty$, la variable aléatoire $N(]r, t\wedge u] \times A)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $(t\wedge u - r)^+F(A)$ est finie p.s. et pour $u \in [0,T]$,

$$\int_{]0,u]\times\mathbb{R}} G(s,x)\, N(ds,dx) = hN(]r, t\wedge u] \times A).$$

Notons que nous utilisons la convention $]r,s] = \emptyset$ si $s \le r$. En utilisant l'indépendance de la variable aléatoire $N(]r,t] \times A)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $(t-r)F(A)$ avec la tribu $\mathcal{F}_r$ pour la quatrième égalité et le lemme 1.1.9 pour la cinquième, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} G(s,x)\, N(ds,dx)\right] &= \mathbb{E}[hN(]r,t]\times A)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[hN(]r,t]\times A)|\mathcal{F}_r]] \\
&= \mathbb{E}[h\mathbb{E}[N(]r,t]\times A)|\mathcal{F}_r]] = \mathbb{E}[h]\,\mathbb{E}[N(]r,t]\times A)] \\
&= \mathbb{E}[h]\int_{]r,t]\times A} F(dx)\, ds = \mathbb{E}\left[\int_{]r,t]\times A} hF(dx)\, ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} G(s,x)\, F(dx)\, ds\right].
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\, N(ds,dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\, F(dx)\, ds\right].$$

Lorsque $n \to \infty$, en appliquant le théorème de convergence monotone dans chacun des deux membres, on conclut que

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|N(ds,dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|F(dx)\, ds\right] < +\infty.$$

Par suite, $|H|$ est intégrable p.s. contre N sur $]0,T] \times \mathbb{R}$ et donc sur $]0,t] \times \mathbb{R}$ pour $t \le T$. Donc $\displaystyle\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\, N(ds,dx)$ a bien un sens ω par ω comme intégrale d'une fonction contre une mesure. Le théorème de convergence dominée assure que c'est une fonction càdlàg de $t \in [0,T]$, sa limite à gauche en $t > 0$ étant donnée par $\int_{]0,t[\times\mathbb{R}} H(s,x)\, N(ds,dx)$. Enfin, sa variation sur $[0,T]$, égale à $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|N(ds,dx)$, est finie p.s..

La preuve de la propriété d'isométrie pour $t \in [0,T]$ quelconque est analogue à celle que nous avons donnée pour $t = T$.

Propriété de martingale :
Nous allons démontrer la propriété de martingale dans le cas particulier de l'intégrale d'un processus élémentaire. Le cas général s'en déduit par convergence dans $\mathbb{L}^1$. Soit

$$\begin{aligned}
M_u &= \int_{]0,u]\times\mathbb{R}} G(s,x)\, N(ds,dx) - \int_{]0,u]\times\mathbb{R}} G(s,x)\, F(dx)\, ds \\
&= h\left(N(]r,t\wedge u]\times A) - (t\wedge u - r)^+ F(A)\right).
\end{aligned}$$

Si $u \le r$, $M_u = 0$. On suppose donc $u > r$, on se donne $v \in [0,u]$ et on veut vérifier que $\mathbb{E}[M_u|\mathcal{F}_v] = M_v$. Si $v \ge t$, alors $M_u = M_v = h\left(N(]r,t]\times A) - (t-r)^+ F(A)\right)$ et l'égalité est vraie. Reste donc à traiter le cas $v \le t$. Alors $M_u - M_v = h(N(]r\vee v, t\wedge u]\times A) - (t\wedge u - r\vee v)^+ F(A))$. En utilisant le caractère $\mathcal{F}_{r\vee v}$-mesurable de h pour la seconde égalité puis l'indépendance de la variable aléatoire centrée $N(]r \vee v, t \wedge u] \times A) - (t \wedge u - r \vee v)^+ F(A)$ avec la tribu $\mathcal{F}_{r\vee v}$ pour la troisième égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_u - M_v|\mathcal{F}_v] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_u - M_v|\mathcal{F}_{r\vee v}]|\mathcal{F}_v] \\
&= \mathbb{E}\left[h\mathbb{E}\left[N\left(]r \vee v, t \wedge u] \times A\right) - (t \wedge u - r \vee v)^+ F\left(A\right)|\mathcal{F}_{r\vee v}\right]|\mathcal{F}_v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[h\mathbb{E}\left[N\left(]r \vee v, t \wedge u] \times A\right) - (t \wedge u - r \vee v)^+ F\left(A\right)\right]|\mathcal{F}_v\right] = 0.
\end{aligned}$$

La propriété de martingale dans le cas général s'en déduit par convergence dans $\mathbb{L}^1$.

□

Construction de l'intégrale par rapport à N de H prévisible tel que $\mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{]0,T]\times[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |H(s,x)|F(dx)\,ds < +\infty\right) = 1$:
On pose $\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T] : \int_{]0,t]\times[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |H(s,x)|F(dx)\,ds \geq n\right\}$ (où par convention $\inf\emptyset = T$) et $H^n(s,x) = H(s,x)\mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}\mathbf{1}_{\left\{|x|\leq\frac{1}{n}\right\}}$. Alors

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H^n(s,x)|F(dx)\,ds\right] \leq n.$$

Presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H^n(s,x)|N(ds,dx) < +\infty$ et pour n assez grand, H^n est égal à $H\mathbf{1}_{\left\{|x|\leq\frac{1}{n}\right\}}$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Donc $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left\{|x|\leq\frac{1}{n}\right\}}|H(s,x)|N(ds,dx) < +\infty$ p.s. et pour $t \leq T$, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left\{|x|\leq\frac{1}{n}\right\}}H(s,x)\,N(ds,dx)$ a bien un sens. Comme $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left\{|x|>\frac{1}{n}\right\}}H(s,x)\,N(ds,dx)$ a également un sens d'après le début du paragraphe 1.2, on définit pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,N(ds,dx) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left\{|x|\leq\frac{1}{n}\right\}}H(s,x)\,N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left\{|x|>\frac{1}{n}\right\}}H(s,x)\,N(ds,dx).$$

Proposition 1.2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et $\left(Y_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,N(ds,dx)\right)_{0\leq t\leq T}$ où H est un processus tel que $\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|N(ds,dx) < \infty\right) = 1$, propriété vérifiée si H est prévisible et tel que $\mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{]0,T]\times[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |H(s,x)|F(dx)\,ds < +\infty\right) = 1$. Alors*

$$\begin{aligned}
f(Y_t) &= f(0) + \sum_{0<s\leq t:\Delta X_s\neq 0} [f(Y_{s^-} + H(s,\Delta X_s)) - f(Y_{s^-})] \\
&= f(0) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} [f(Y_{s^-} + H(s,x)) - f(Y_{s^-})]\,N(ds,dx).
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.5.

— Le second membre de l'égalité ci-dessus est bien défini. En effet, si pour $M \geq 0$,

$\mathrm{Lip}_M(f) < \infty$ désigne la constante de Lipschitz de f sur l'intervalle $[-M, M]$,

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,T]\times[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |f(Y_{s^-} + H(s,x)) - f(Y_{s^-})| N(ds,dx) \\
&\qquad = \sum_{0<s\le T : |\Delta X_s| \le \frac{1}{n}} |f(Y_{s^-} + H(s,\Delta X_s)) - f(Y_{s^-})| \\
&\qquad \le \mathrm{Lip}_{\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|}(f) \sum_{0<s\le T : |\Delta X_s| \le \frac{1}{n}} |H(s,\Delta X_s)| \\
&\qquad = \mathrm{Lip}_{\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|}(f) \int_{]0,T]\times[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |H(s,x)| N(ds,dx)
\end{aligned}$$

où $\sup_{t\in[0,T]}|Y_t| < +\infty$ p.s. d'après le lemme 1.1.6.

— Si la fonction f est $\mathcal{C}^1$ (ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne), on peut récrire la formule comme

$$f(Y_t) = f(0) + \int_0^t f'(Y_{s^-})\, dY_s + \sum_{0<s\le t} [f(Y_s) - f(Y_{s^-}) - f'(Y_{s^-})\Delta Y_s].$$

Démonstration : Il s'agit d'un résultat déterministe. Soit $\left(y_t = \sum_{0<s\le t} \Delta y_s\right)_{t\le T}$ càdlàg où $\sum_{0<s\le T} |\Delta y_s| < +\infty$. D'après la preuve du lemme 1.1.6, seulement un nombre fini de sauts sont de taille supérieure à $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ en valeur absolue sur $[0,T]$. On pose $y_t^n = \sum_{0<s\le t} \Delta y_s \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|\ge \frac{1}{n}\}}$.

$$\begin{aligned}
f(y_t^n) &= f(0) + \sum_{0<s\le t} (f(y_s^n) - f(y_{s^-}^n)) \\
&= f(0) + \sum_{0<s\le t} (f(y_{s^-}^n + \Delta y_s) - f(y_{s^-}^n)) \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|\ge\frac{1}{n}\}}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

On a $\sup_{t\le T} |y_t^n - y_t| \le \sum_{s\le T} |\Delta y_s| \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|<\frac{1}{n}\}}$ où le second membre tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ par convergence dominée. Ainsi y_t^n converge uniformément vers y_t sur l'intervalle $[0,T]$. On en déduit que $f(y_t^n)$ converge vers $f(y_t)$ et $\left(f\left(y_{s^-}^n + \Delta y_s\right) - f\left(y_{s^-}^n\right)\right) \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|\ge\frac{1}{n}\}}$ vers $(f(y_s) - f(y_{s^-})) \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|>0\}}$. En choisissant n assez grand pour que $\sup_{t\le T} |y_t^n - y_t| \le 1$, on a

$$|f(y_{s^-}^n + \Delta y_s) - f(y_{s^-}^n)| \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s|\ge\frac{1}{n}\}} \le \mathrm{Lip}_{\sup_{t\le T}|y_t|+1}(f) \times |\Delta y_s|.$$

Cette condition de domination permet de passer à la limite dans le second membre de (1.2) grâce au théorème de convergence dominée pour conclure que

$$f(y_t) = f(0) + \sum_{s\le t} [f(y_s) - f(y_{s^-})].$$

Cette formule est moins évidente qu'il n'y parait car si l'ensemble des instants de saut comporte plusieurs points d'accumulation, on ne peut pas nécessairement ordonner ces instants de saut en une suite croissante $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui rendrait la somme au second membre télescopique. $\square$

Remarque 1.2.6. Si la fonction f est $\mathcal{C}^1$ (ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne), il s'agit d'un cas particulier de la formule

$$df\left(y_t\right) = f'\left(y_{t^-}\right) dy_t + \left[f\left(y_t\right) - f\left(y_{t^-}\right) - f'\left(y_{t^-}\right) \Delta y_t\right]$$

vraie dès que f est $\mathcal{C}^1$ et $t \to y_t$ est à variation finie (c'est à dire s'écrivant comme différence de deux fonctions croissantes) càdlàg. Pour démontrer cette formule, on interprète $t \to y_t$ comme la fonction de répartition d'une mesure signée. Cette interprétation permet de vérifier que si $t \to z_t$ est une seconde fonction à variation finie càdlàg, en calculant la mesure produit de $]0,t]\times]0,t]$ de deux façons, on a

$$\begin{aligned}(y_t - y_0)(z_t - z_0) &= \int_{]0,t]} (y_s - y_0) dz_s + \int_{]0,t]} (z_{s^-} - z_0) dy_s \\ &= \int_{]0,t]} y_{s^-} dz_s + \sum_{0<s\leq t} \Delta y_s \Delta z_s - y_0(z_t - z_0) + \int_{]0,t]} z_{s^-} dy_s - z_0(y_t - y_0).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$y_t z_t = y_0 z_0 + \int_{]0,t]} y_{s^-} dz_s + \int_{]0,t]} z_{s^-} dy_s + \sum_{0<s\leq t} \Delta y_s \Delta z_s.$$

En choisissant par récurrence $z_t = y_t^n$ pour $n \geq 1$, on en déduit que la formule est vraie pour $f(x) = x^{n+1}$ puis pour f polynomiale par linéarité. On conclut en approchant f et f' uniformément sur $[-\sup_{t\leq T} |y_t|, \sup_{t\leq T} |y_t|]$ par une suite de polynômes et leurs dérivées premières.

1.3 Intégrale stochastique par rapport à $\tilde{N}$

La mesure aléatoire $\tilde{N}\left(ds, dx\right) = N\left(ds, dx\right) - F\left(dx\right) ds$ est appelée mesure de Poisson compensée. Si H est prévisible tel que $\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H\left(s,x\right)| F\left(dx\right) ds < +\infty\right) = 1$, d'après le paragraphe précédent, on sait définir $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H\left(s,x\right) \tilde{N}\left(ds, dx\right)\right)_{t\leq T}$ comme

$$\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H\left(s,x\right) N\left(ds, dx\right) - \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H\left(s,x\right) F\left(dx\right) ds.$$

C'est même une martingale lorsque

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H\left(s,x\right)| F\left(dx\right) ds\right] < +\infty.$$

Dans la décomposition de Lévy-Itô, nous avons donné un sens à $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H(s,x)\tilde{N}(ds,dx)$ pour le choix particulier $H(s,x) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} x$ qui ne vérifie pas nécessairement la condition d'intégrabilité ci-dessus puisque l'on suppose seulement que $\int_{[-1,1]} x^2 F(dx) < +\infty$. Il est ainsi possible de construire une intégrale stochastique par rapport à $\tilde{N}$ en exploitant le caractère centré de la mesure $\tilde{N}$. Nous allons maintenant énoncer le résultat de cette construction avant d'en présenter les trois grandes étapes. Elle ressemble beaucoup à celle de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien car elle repose comme elle sur une propriété d'isométrie $\mathbb{L}^2$. Alors que l'isométrie $\mathbb{L}^1$ du paragraphe précédent était liée à la valeur de l'espérance d'une variable de Poisson, l'isométrie $\mathbb{L}^2$ est liée à la valeur de sa variance.

Théorème 1.3.1.
Soit $H(s,x)$ un processus prévisible t.q. $\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds < +\infty\right) = 1$. *Alors on peut définir* $\left(M_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)_{0\leq t\leq T}$ *et ce processus est une martingale locale càdlàg t.q.* $\Delta M_t = H(t,\Delta X_t)\mathbf{1}_{\{\Delta X_t\neq 0\}}$.
Si en outre $\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds\right] < +\infty$, *c'est une martingale de carré intégrable et pour tout $t\leq T$, on a la propriété d'isométrie :*

$$\forall t\in[0,T],\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right] = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[H^2(s,x)\right]F(dx)\,ds.$$

Comme $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} x^2\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}F(dx)\,ds \leq T\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)\,F(dx) < +\infty$, pour le choix particulier $H(s,x) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}x$, on retrouve que $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(ds,dx)\right)_{t\leq T}$ est une martingale de carré intégrable.

Démonstration :

Étape 1 : isométrie dans $\mathbb{L}^2$ dans le cas des processus simples

On suppose que

$$H(s,x) = h_1\mathbf{1}_{]r_1,t_1]\times A_1}(s,x) + h_2\mathbf{1}_{]r_2,t_2]\times A_2}(s,x)$$

avec pour $i=1,2$, h_i bornée $\mathcal{F}_{r_i}$-mesurable et $A_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $F(A_i) < +\infty$ avec $\{]r_1,t_1]\times A_1\}\cap\{]r_2,t_2]\times A_2\} = \emptyset$. Comme H est prévisible et t.q.

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|F(dx)ds\right] = (t_1-r_1)F(A_1)\mathbb{E}(|h_1|) + (t_2-r_2)F(A_2)\mathbb{E}(|h_2|) < +\infty,$$

le processus $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\tilde{N}(ds,dx) = h_1\tilde{N}(]r_1,t_1\wedge t]\times A_1) + h_2\tilde{N}(]r_2,t_2\wedge t]\times A_2)\right)_{t\leq T}$ est bien défini et c'est une martingale càdlàg. Montrons qu'il vérifie la propriété d'isométrie $\mathbb{L}^2$ en supposant, pour fixer les idées, que $r_1\geq r_2$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]\\
=&\mathbb{E}\left[h_1^2\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)^2\right] + \mathbb{E}\left[h_2^2\tilde{N}(]r_2,t_2]\times A_2)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[h_1h_2\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)\,\tilde{N}(]r_2,t_2]\times A_2)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[h_1^2\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)^2|\mathcal{F}_{r_1}\right]\right] + \mathbb{E}\left[h_2^2\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_2,t_2]\times A_2)^2|\mathcal{F}_{r_2}\right]\right]\\
&+2\mathbb{E}\left[h_1h_2\tilde{N}(]r_2,t_2\wedge r_1]\times A_2)\,\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)|\mathcal{F}_{r_1}\right]\right]\\
&+2\mathbb{E}\left[h_1h_2\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)\,\tilde{N}(]t_2\wedge r_1,t_2]\times A_2)|\mathcal{F}_{r_1}\right]\right]
\end{aligned}$$

En utilisant que $\tilde{N}(]r_i,t_i]\times A_i)^2$ est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_{r_i}$ d'espérance égale à $(t_i-r_i)F(A_i)$ d'après le lemme 1.1.9, et que $\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)$ et $\tilde{N}(]t_2\wedge r_1,t_2]\times A_2)$ sont des variables aléatoires centrées mutuellement indépendantes ($\{]r_1,t_1]\times A_1\}\cap\{]t_2\wedge r_1,t_2]\times A_2\}\subset\{]r_1,t_1]\times A_1\}\cap\{]r_2,t_2]\times A_2\} = \emptyset$) et indépendantes de $\mathcal{F}_{r_1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right] \\
=&\mathbb{E}\left[h_1^2\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)^2\right]+\mathbb{E}\left[h_2^2\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_2,t_2]\times A_2)^2\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[h_1h_2\tilde{N}(]r_2,t_2\wedge r_1]\times A_2)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[h_1h_2\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]r_1,t_1]\times A_1)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{N}(]t_2\wedge r_1,t_2]\times A_2)\right] \\
=&\mathbb{E}\left[h_1^2\right](t_1-r_1)F(A_1)+\mathbb{E}\left[h_2^2\right](t_2-r_2)F(A_2)+2\times 0+2\times 0 \\
=&\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds\right].
\end{aligned}$$

La preuve de la propriété d'isométrie pour $t\in[0,T]$ quelconque est analogue.

Étape 2 : intégrale de H prévisible t.q. $\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds\right]<+\infty$ Nous admettrons l'existence d'une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus simples telle que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}}(H(s,x)-H_n(s,x))^2\,F(dx)\,ds\right]=0.$$

La suite $\left(M_t^n\overset{\text{def}}{=}\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H_n(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)_{t\le T}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de $\mathcal{F}_t$-martingales de carré intégrable càdlàg. Par isométrie, elle converge t par t dans $\mathbb{L}^2$ vers une limite qui ne dépend pas de la suite approximante, que l'on note $\left(M_t=\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)_{t\le T}$ et qui vérifie

$$\forall t\in[0,T],\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds\right].$$

Pour $0\le s\le t\le T$, comme l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_s$ est une projection dans l'espace des variables aléatoires de carré intégrable, en passant à la limite $n\to\infty$ dans l'égalité $M_s^n=\mathbb{E}(M_t^n|\mathcal{F}_s)$, on obtient $M_s=\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)$, c'est-à-dire que $(M_t)_{t\le T}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Pour montrer les propriétés trajectorielles de $(M_t)_{t\le T}$ (son caractère càdlàg et l'égalité $\Delta M_t=H(t,\Delta X_t)\mathbf{1}_{\{\Delta X_t\neq 0\}}$), nous allons extraire de $((M_t^n)_{t\le T})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge p.s. uniformément sur $[0,T]$. Soit $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'indices t.q. $\mathbb{E}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}}(H_{n(k)}(s,x)-H(s,x))^2F(dx)ds\right)\le\frac{1}{2^{k+4}}$. D'après l'inégalité de Doob et la propriété d'isométrie,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\le T}\left(M_t^{n(k)}-M_t^{n(k+1)}\right)^2\right)\le 4\mathbb{E}\left(\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}}(H_{n(k)}(s,x)-H_{n(k+1)}(s,x))\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right) \\
&\le 4\mathbb{E}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}}2[(H_{n(k)}(s,x)-H(s,x))^2+(H(s,x)-H_{n(k+1)}(s,x))^2]F(dx)ds\right)\le\frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

La série de terme général $\mathbb{E}\left(\sup_{t\le T}\left|M_t^{n(k)}-M_t^{n(k+1)}\right|\right)$ est donc convergente et on en déduit que $\left(M_t^{n(k)}\right)_{t\le T}$ converge p.s. uniformément sur $[0,T]$ vers une limite càdlàg lorsque $k \to \infty$. Ainsi $(M_t)_{0 \le t \le T}$ est càdlàg et $\Delta M_t = \lim_{k\to\infty} \Delta M_t^{n(k)}$ où $\Delta M_t^{n(k)} = H_{n(k)}(t, \Delta X_t)\mathbf{1}_{\{\Delta X_t \neq 0\}}$. En particulier, $\Delta M_t = 0$ si $\Delta X_t = 0$. Par ailleurs,

$$\sum_{s \le T : \Delta X_s \neq 0} (\Delta M_s^{n(k)} - H(s, \Delta X_s))^2 = \int_{]0,T]\times\mathbb{R}} (H_{n(k)}(s,x) - H(s,x))^2 N(ds,dx)$$

a pour espérance $\mathbb{E}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} (H_{n(k)}(s,x) - H(s,x))^2 F(dx)ds\right) \le \frac{1}{2^{k+4}}$ d'après le théorème 1.2.3. Par le lemme de Fatou, on conclut que $\mathbb{E}\left(\sum_{s\le T:\Delta X_s \neq 0} (\Delta M_s - H(s,\Delta X_s))^2\right) = 0$. Ainsi $\Delta M_t = H(t, \Delta X_t)\mathbf{1}_{\{\Delta X_t \neq 0\}}$.

Étape 3 : intégrale de H prévisible t.q. $\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds < +\infty\right) = 1$
On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T] : \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds \ge n\right\}$$

(convention $\inf \emptyset = T$) et $H_n(s,x) = H(s,x)\,\mathbf{1}_{\{s \le \tau_n\}}$. Alors la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et égale à T pour $n \ge \int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds$ et $\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H_n^2(s,x)\,F(dx)\,ds\right] \le n$.
On définit pour $t \in]\tau_{n-1}, \tau_n]$

$$\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H_n(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx).$$

Comme fonction de t, il s'agit d'une $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$-martingale locale càdlàg localisée par la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$$\Delta\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right) = H(t,\Delta X_t)\,\mathbf{1}_{\{\Delta X_t \neq 0\}}.$$

□

La proposition suivante énonce la formule d'Itô qui permet de traiter les intégrales stochastiques par rapport à $\tilde{N}$.

Proposition 1.3.2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ de dérivée f' localement lipschitzienne et $\left(M_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)_{0\le t\le T}$ où H est un processus prévisible tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H^2(s,x)\,F(dx)\,ds < +\infty\right) = 1$. Alors

$$\begin{aligned} f(M_t) = f(0) &+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} f'(M_{s^-})\,H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx) \\ &+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \big(f(M_{s^-} + H(s,x)) - f(M_{s^-}) - f'(M_{s^-})\,H(s,x)\big)\,N(ds,dx). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3.
— La formule précédente se récrit

$$df(M_t) = f'(M_{t^-})\,dM_t + [f(M_t) - f(M_{t^-}) - f'(M_{t^-})\,\Delta M_t]$$

avec $dM_t = \int_{\mathbb{R}} H(t,x)\,\tilde{N}(dt,dx)$. L'écriture plus naturelle

$$df(M_t) = -f'(M_{t^-})\int_{\mathbb{R}} H(t,x)\,F(dx)\,dt + \int_{\mathbb{R}} \left(f(M_{t^-} + H(t,x)) - f(M_{t^-})\right) N(dt,dx)$$

n'a pas nécessairement de sens.

— Comme $(M_t)_{0\le t\le T}$ est càdlàg, pour tout $t \in [0,T]$

$$\left(f'(M_{t^-})\,H(t,x)\right)^2 \le \sup_{|y|\le \sup_{s\in[0,T]}|M_s|} \left(f'(y)\right)^2 H^2(t,x)\,.$$

Donc $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} \left(f'(M_{s^-})\,H(s,x)\right)^2 F(dx)\,ds < +\infty$ p.s. et on peut bien définir $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} f'(M_{s^-})\,H(s,x)\,\tilde{N}(ds,dx)\right)_{t\le T}$. Pour $C > 0$, on note $\mathrm{Lip}_C(f')$ la constante de Lipschitz de f' sur l'intervalle $[-C,C]$. Comme $(M_t)_{0\le t\le T}$ est càdlàg, pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\le T} |f(M_s) - f(M_{s^-}) - f'(M_{s^-})\,\Delta M_s| \\
&= \int_{]0,T]\times\mathbb{R}} |f(M_{s^-} + H(s,x)) - f(M_{s^-}) - f'(M_{s^-})\,H(s,x)\,|N(ds,dx) \\
&\le \frac{1}{2}\mathrm{Lip}_{\sup_{s\in[0,T]}|M_s|}(f') \int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x) N(ds,dx) < +\infty \text{ p.s.,}
\end{aligned}$$

d'après le paragraphe 1.2.

Pour démontrer la proposition, nous aurons besoin du Lemme suivant.

Lemme 1.3.4. *Soit τ un temps d'arrêt et $K(s,x)$ un processus prévisible tel que $\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K^2(s,x)dsF(dx) < \infty\right) = 1$. Alors pour tout $t \in [0,T]$, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\le\tau\}} K(s,x)\tilde{N}(ds,dx) = \int_{]0,u]\times\mathbb{R}} K(s,x)\tilde{N}(ds,dx)|_{u=t\wedge\tau}$. En outre si $(K_n(s,x))_n$ est une suite de processus prévisibles telle que $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n\to\infty$, alors $\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|$ converge également vers 0 en probabilité.*

Démonstration : Notons que comme, $(1_{\{s\le\tau\}})_s$ est un processus adapté et continu à gauche, le processus $1_{\{s\le\tau\}}K(s,x)$ est prévisible. Comme τ est la limite décroissante de $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{kT}{n} 1_{\{\frac{(k-1)T}{n} < \tau \le \frac{kT}{n}\}}$, par continuité à droite et linearité de l'intégrale stochastique par rapport à $\tilde{N}$, il suffit de montrer que pour $r \in [0,T]$ et h une variable aléatoire $\mathcal{F}_r$-mesurable bornée

$$\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} h 1_{\{r<s\}} K(s,x)\tilde{N}(ds,dx) = h\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K(s,x)\tilde{N}(ds,dx) - \int_{]0,r\wedge t]\times\mathbb{R}} K(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right).$$

Cette égalité, clairement vraie lorsque $K(s,x)$ est un processus simple, s'obtient dans le cas général par approximation de $K(s,x)$ par des processus simples.

Soit maintenant $(K_n(s,x))_n$ une suite de processus prévisibles telle que $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n\to\infty$ et $\varepsilon,\eta>0$. Posons $\tau_n=\inf\{t\in[0,T] : \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)\geq\eta\}$ avec la convention $\inf\emptyset=T$. On a

$$\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|\geq\varepsilon\right\}\subset\left\{\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)>\eta\right\}$$
$$\bigcup\left\{\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)\leq\eta,\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|\geq\varepsilon\right\}. \quad (1.3)$$

La première assertion du lemme appliquée à (K_n,τ_n) assure que le dernier événement est égal à $\left\{\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)\leq\eta,\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\leq\tau_n\}}K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|\geq\varepsilon\right\}$. Avec les inégalités de Bienaymé-Chebychev et de Doob et la propriété d'isométrie $\mathbb{L}^2$, on en déduit que sa probabilité est majorée par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\leq\tau_n\}}K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|\geq\varepsilon\right)\\
&\qquad\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\leq\tau_n\}}K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]\\
&\qquad\leq\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\leq\tau_n\}}K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right)^2\right]\\
&\qquad=\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} 1_{\{s\leq\tau_n\}}K_n^2(s,x)dsF(dx)\right]\leq\frac{4\eta}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Avec (1.3), on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K_n(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)>\eta\right)+\frac{4\eta}{\varepsilon^2}.$$

On conclut en remarquant que le second terme du second membre est arbitrairement petit pour η petit tandis qu'à η fixé la convergence en probabilité de $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} K_n^2(s,x)dsF(dx)$ assure que le premier terme du second membre tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1.3.2.
Démonstration : On définit

$$M_t^n=\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\,\mathbf{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}}\tilde{N}(ds,dx)$$

qui a un nombre fini de sauts sur $[0,T]$. Entre les sauts, on a

$$dM_t^n=-\int_{\mathbb{R}} H(t,x)\,\mathbf{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}}F(dx)\,dt$$

où l'inégalité $|H(t,x)\,\mathbf{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}}|\leq\frac{1}{2}\left(H^2(t,x)+\mathbf{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}}\right)$ assure que l'intégrale $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}}|H(t,x)|\mathbf{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}}F(dx)\,dt$ est finie p.s.. Alors, en raisonnant de saut en saut, on obtient

$$\begin{aligned}
f\left(M_t^n\right) =& f\left(0\right) - \int_0^t f'\left(M_{s^-}^n\right) \int_{\mathbb{R}} H\left(s,x\right) \mathbf{1}_{\left\{|x|>\frac{1}{n}\right\}} F\left(dx\right) ds + \sum_{s\leq t} \left(f(M_s^n) - f(M_{s^-}^n)\right) \\
=& f\left(0\right) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} f'\left(M_{s^-}^n\right) H\left(s,x\right) \mathbf{1}_{\left\{|x|>\frac{1}{n}\right\}} \tilde{N}\left(ds,dx\right) \\
&+ \sum_{s\leq t} \left(f(M_s^n) - f(M_{s^-}^n) - f'(M_{s^-}^n)\Delta M_s^n\right).
\end{aligned}$$

Nous allons justifier le passage à la limite $n \to \infty$ dans cette formule pour conclure. Comme, par convergence dominée, $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} (H^n(s,x) - H(s,x))^2 ds F(dx) = \int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x) 1_{\{|x|\leq\frac{1}{n}\}} ds F(dx)$ converge p.s. vers 0 lorsque $n \to \infty$, la linéarité de l'intégrale stochastique par rapport à $\tilde{N}$ et la seconde assertion du lemme 1.3 assurent que $\sup_{t\in[0,T]} |M_t - M_t^n|$ converge en probabilité vers 0. On en déduit l'existence d'une sous-suite $(M^{n(k)})_k$ telle que $\sup_{t\in[0,T]} |M_t - M_t^{n(k)}|$ converge p.s. vers 0. En particulier, $f(M_t^{n(k)})$ tend p.s. vers $f(M_t)$ lorsque $k \to \infty$. Pour k assez grand, $\sup_{t\in[0,T]} |M_t - M_t^{n(k)}| \leq 1$ et pour tout $s \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\left(f'(M_{s^-}^{n(k)}) H(s,x) 1_{\{|x|>\frac{1}{n(k)}\}} - f'(M_{s^-}) H(s,x)\right)^2 \\
&\qquad = \left(f'(M_{s^-}^{n(k)}) - f'(M_{s^-})\right)^2 H^2(s,x) 1_{\{|x|>\frac{1}{n(k)}\}} + (f'(M_{s^-}))^2 H^2(s,x) 1_{\{|x|\leq\frac{1}{n(k)}\}} \\
&\qquad \leq \mathrm{Lip}^2_{1+\sup_{t\in[0,T]}|M_t|}(f') \sup_{t\in[0,T]} |M_t^{n(k)} - M_t|^2 H^2(s,x) \\
&\qquad\quad + \sup_{|x|\leq \sup_{t\in[0,T]}|M_t|} (f'(x))^2 H^2(s,x) 1_{\{|x|\leq\frac{1}{n(k)}\}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} \left(f'(M_{s^-}^{n(k)}) H(s,x) 1_{\{|x|>\frac{1}{n(k)}\}} - f'(M_{s^-}) H(s,x)\right)^2 ds F(dx)$ converge p.s. vers 0 lorsque $k \to \infty$, et d'après la seconde assertion du lemme 1.3, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} f'(M_{s^-}^{n(k)}) H\left(s,x\right) \mathbf{1}_{\left\{|x|>\frac{1}{n(k)}\right\}} \tilde{N}\left(ds,dx\right)$ converge en probabilité vers $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} f'\left(M_{s^-}\right) H\left(s,x\right) \tilde{N}\left(ds,dx\right)$. Pour k assez grand pour que $\sup_{t\in[0,T]} |M_t - M_t^{n(k)}| \leq 1$ et pour tout $s \in [0,T]$,

$$|f(M_s^{n(k)}) - f(M_{s^-}^{n(k)}) - f'(M_{s^-}^{n(k)})\Delta M_s^{n(k)}| \leq \frac{1}{2} \mathrm{Lip}_{1+\sup_{t\in[0,T]}|M_t|}(f') H^2(s, \Delta X_s) 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}}.$$

Comme, d'après le paragraphe 1.2,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{s\leq T} H^2(s,\Delta X_s) 1_{\{\Delta X_s\neq 0\}} < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\int_{]0,T]\times\mathbb{R}} H^2(s,x) ds F(dx) < \infty\right) = 1,$$

le théorème de convergence dominée assure la convergence presque sûre de $\sum_{s\leq t}\left(f(M_s^{n(k)}) - f(M_{s^-}^{n(k)}) - f'(M_{s^-}^{n(k)})\Delta M_s^{n(k)}\right)$ vers $\sum_{s\leq t}\left(f(M_s) - f(M_{s^-}) - f'(M_{s^-})\Delta M_s\right)$. $\square$

1.4 Intégrale stochastique de Lévy et semimartingale

Définition 1.4.1. *On appelle intégrale stochastique de Lévy un processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ t.q. $\forall t \geq 0$,*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi(s)\, dW_s + \int_0^t \psi(s)\, ds + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\, N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K(s,x)\, \tilde{N}(ds,dx)$$

où

1. *Y_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable ;*
2. *φ est un processus adapté tel que $\forall t \geq 0$, $\int_0^t \varphi^2(s)\, ds < +\infty$ p.s.,*
3. *ψ est un processus adapté tel que $\forall t \geq 0$, $\int_0^t |\psi(s)|ds < +\infty$ p.s.,*
4. *H est un processus prévisible tel que $\forall t \geq 0$, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} |H(s,x)|N(ds,dx) < +\infty$ p.s.,*
5. *K est un processus prévisible tel que $\forall t \geq 0$, $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} K^2(s,x)\, F(dx)\, ds < +\infty$ p.s..*

Exemple 1.4.2. Le processus de Lévy

$$X_t = bt + \sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}} N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$$

s'obtient pour le choix $\varphi(t) = \sqrt{c}$, $\psi(t) = b$, $H(t,x) = x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}$ et $K(t,x) = x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$.

Exercice 1.4.3. Montrer que si $(\phi_t)_{t\leq T}$ est un processus prévisible (constant en x) t.q. $\mathbb{P}\left(\int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty\right) = 1$, alors $(\int_0^t \phi_s dX_s)_{t\leq T}$ est une intégrale stochastique de Lévy.

En combinant la formule d'Itô pour les processus d'Itô avec celles énoncées dans les propositions 1.2.4 et 1.3.2, on obtient

Proposition 1.4.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ une intégrale stochastique de Lévy. Alors*

$$\begin{aligned}
f(Y_t) &= f(Y_0) + \int_0^t f'(Y_{s^-})\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_{s^-})\, \varphi^2(s)\, ds \\
&+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \left(f(Y_{s^-} + H(s,x) + K(s,x)) - f(Y_{s^-}) - f'(Y_{s^-})(H(s,x) + K(s,x))\right) N(ds,dx) \\
&= f(Y_0) + \int_0^t f'(Y_{s^-})\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_{s^-})\, \varphi^2(s)\, ds + \sum_{0<s\leq t} \left[f(Y_s) - f(Y_{s^-}) - f'(Y_{s^-})\, \Delta Y_s\right].
\end{aligned}$$

Définition 1.4.5. *On appelle semimartingale un processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté càdlàg qui admet la décomposition $\forall t \geq 0$, $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$ où*

- *$(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale càdlàg nulle en 0,*
- *$(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation finie (c'est à dire s'écrivant comme différence de deux fonctions croissantes) càdlàg nul en 0.*

Remarque 1.4.6. La décomposition de la semimartingale $(Y_t)_{t\geq 0}$ n'est en général pas unique. Néanmoins, lorsque elle est continue, elle admet une unique décomposition $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$, avec $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale locale continue, $(A_t)_{t\geq 0}$ processus à variation finie continu, tous deux nuls à l'instant $t = 0$.

Dans le cas général, il existe une unique martingale locale continue et nulle en 0 notée $(Y_t^c)_{t\geq 0}$ telle que $\forall t \geq 0,\ Y_t = Y_0 + Y_t^c + M_t^d + A_t$ avec $(A_t)_{t\geq 0}$ processus à variation finie càdlàg nul en 0 et $\left(M_t^d\right)_{t\geq 0}$ martingale locale càdlàg purement discontinue au sens où $(M_t^d N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale pour toute martingale locale continue $(N_t)_{t\geq 0}$. Le processus $(Y_t^c)_{t\geq 0}$ s'appelle partie martingale continue de la semimartingale $(Y_t)_{t\geq 0}$.

Exemple 1.4.7. Les intégrales stochastiques de Lévy sont une classe particulière de semimartingales telles que $Y_t^c = \int_0^t \varphi(s)\, dW_s$ et pour lesquelles toutes les décompositions suivantes indexées par $\lambda \geq 0$ sont entre autres possibles

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \varphi(s)\, dW_s + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \left(K(s,x) + H(s,x) 1_{\{|H(s,x)|\leq \lambda(1\wedge x^2)\}}\right) \tilde{N}(ds,dx) \\ A_t &= \int_0^t \psi(s)\, ds + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x)\, 1_{\{|H(s,x)|>\lambda(1\wedge x^2)\}} N(ds,dx) \\ &\qquad + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} H(s,x) 1_{\{|H(s,x)|\leq \lambda(1\wedge x^2)\}} F(dx) ds. \end{aligned}$$

La proposition 1.4.4 se généralise en

Théorème 1.4.8. Formule d'Itô pour les semimartingales vectorielles.
Soit $Y_t = (Y_t^1, \ldots, Y_t^n)$ où les $(Y_t^i)_{t\geq 0}$ sont des semimartingales réelles et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. Alors

$$\begin{aligned} f(Y_t) = f(Y_0) &+ \int_0^t \nabla f(Y_{s^-}) . dY_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_{s^-})\, d < Y^{c,i}, Y^{c,j} >_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \left[f(Y_s) - f(Y_{s^-}) - \nabla f(Y_{s^-}) . \Delta Y_s\right] \end{aligned}$$

où $< Y^{c,i}, Y^{c,j} >$ désigne le crochet entre les parties martingales locales continues respectives $Y^{c,i}$ et $Y^{c,j}$ de Y^i et Y^j.

Remarque 1.4.9.
- Dans le cas particulier où $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une intégrale stochastique de Lévy de dimension 1, $Y_t^c = \int_0^t \varphi(s)\, dW_s$ ce qui entraîne $< Y^c, Y^c >_t = \int_0^t \varphi^2(s)\, ds$ et on retrouve bien la formule énoncée dans la proposition 1.4.4.
- Pour une semimartingale, on a toujours $\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_s|^2 < +\infty$ p.s.. En revanche, rien ne garantit que $\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_s| < +\infty$.

Formule d'intégration par parties
Soient $(Y_t^1)_{t\geq 0}$ et $(Y_t^2)_{t\geq 0}$ deux semimartingales à valeurs réelles. Alors

$$\forall t \geq 0,\ Y_t^1 Y_t^2 = Y_0^1 Y_0^2 + \int_0^t Y_{s^-}^1 dY_s^2 + \int_0^t Y_{s^-}^2 dY_s^1 + [Y^1, Y^2]_t$$

avec $[Y^1, Y^2]_t = < Y^{1,c}, Y^{2,c} >_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta Y_s^1 \Delta Y_s^2$.

Démonstration : Pour $f(y_1, y_2) = y_1 y_2$, on a $\partial_{y_1} f(y_1, y_2) = y_2$, $\partial_{y_2} f(y_1, y_2) = y_1$,

$\partial^2_{y_1y_1} f(y_1,y_2) = \partial^2_{y_2y_2} f(y_1,y_2) = 0$ et $\partial^2_{y_2y_1} f(y_1,y_2) = 1$. Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
Y^1_tY^2_t =& Y^1_0Y^2_0 + \int_0^t Y^2_{s^-}dY^1_s + \int_0^t Y^1_{s^-}dY^2_s + \int_0^t d<Y^{1,c},Y^{2,c}>_s \\
&+ \sum_{0<s\leq t}\left(Y^1_sY^2_s - Y^1_{s^-}Y^2_{s^-} - Y^1_{s^-}\left(Y^2_s - Y^2_{s^-}\right) - Y^2_{s^-}\left(Y^1_s - Y^1_{s^-}\right)\right) \\
=& Y^1_0Y^2_0 + \int_0^t Y^2_{s^-}dY^1_s + \int_0^t Y^1_{s^-}dY^2_s + <Y^{1,c},Y^{2,c}>_t \\
&+ \sum_{0<s\leq t}\left(Y^1_sY^2_s + Y^1_{s^-}Y^2_{s^-} - Y^1_{s^-}Y^2_s - Y^1_sY^2_{s^-}\right) \\
=& Y^1_0Y^2_0 + \int_0^t Y^2_{s^-}dY^1_s + \int_0^t Y^1_{s^-}dY^2_s + <Y^{1,c},Y^{2,c}>_t + \sum_{0<s\leq t}\Delta Y^1_s\Delta Y^2_s.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.4.10. *Soient $(Y^1_t)_{t\geq 0}$ et $(Y^2_t)_{t\geq 0}$ deux semimartingales à valeurs réelles. Alors*

$$[Y^1,Y^2]_t = \lim_{n\to+\infty}^{\Pr} \sum_{k=1}^n \left(Y^1_{\frac{kt}{n}} - Y^1_{\frac{(k-1)t}{n}}\right)\left(Y^2_{\frac{kt}{n}} - Y^2_{\frac{(k-1)t}{n}}\right).$$

Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
Y^1_tY^2_t =& Y^1_0Y^2_0 + \sum_{k=1}^n \left(Y^1_{\frac{kt}{n}}Y^2_{\frac{kt}{n}} - Y^1_{\frac{(k-1)t}{n}}Y^2_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) \\
=& Y^1_0Y^2_0 + \sum_{k=1}^n Y^1_{\frac{(k-1)t}{n}}\left(Y^2_{\frac{kt}{n}} - Y^2_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) + \sum_{k=1}^n Y^2_{\frac{(k-1)t}{n}}\left(Y^1_{\frac{kt}{n}} - Y^1_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^n \left(Y^1_{\frac{kt}{n}} - Y^1_{\frac{(k-1)t}{n}}\right)\left(Y^2_{\frac{kt}{n}} - Y^2_{\frac{(k-1)t}{n}}\right).
\end{aligned}$$

On admettra que les deux premiers termes du second membre convergent respectivement en probabilité vers $\int_0^t Y^1_{s^-}dY^2_s$ et $\int_0^t Y^2_{s^-}dY^1_s$ lorsque $n \to \infty$. Avec la formule d'intégration par parties, on en déduit que le dernier terme converge en probabilité vers $[Y^1,Y^2]_t$. □

Théorème 1.4.11. *Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale à valeurs réelles. L'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dY_t &= Y_{t^-}dZ_t \\ Y_0 &= 1 \end{cases}$$

admet comme unique solution l'exponentielle de Doléans-Dade

$$Y_t = e^{Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}<Z^c,Z^c>_t} \prod_{0<s\leq t} e^{-\Delta Z_s}\left(1+\Delta Z_s\right)$$

qui est une semimartingale. On note $\left(\mathcal{E}(Z)_t = Y_t\right)_{t\geq 0}$ l'exponentielle de Doléans-Dade de Z.

Remarque 1.4.12.

— Dans le cas $dZ_t = \varphi(t)\, dW_t + \psi(t)\, dt$, on retrouve $Y_t = e^{\int_0^t \varphi(s)dW_s + \int_0^t \left(\psi(s) - \frac{1}{2}\varphi^2(s)\right)ds}$

— Comme $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale, $\sum_{0<s\leq t} \Delta Z_s{}^2 < +\infty$. En particulier, seulement un nombre fini de sauts sont inférieurs à $-\frac{1}{2}$ sur $[0,t]$ et

$$B_t \overset{\text{def}}{=} \prod_{0<s\leq t} e^{-\Delta Z_s}(1+\Delta Z_s) = \prod_{s\leq t:\Delta Z_s \leq -\frac{1}{2}} e^{-\Delta Z_s}(1+\Delta Z_s)\, e^{\sum_{s\leq t:\Delta Z_s > -\frac{1}{2}} (\ln(1+\Delta Z_s) - \Delta Z_s)}.$$

Comme pour $z > -1/2$, $0 \leq z - \ln(1+z) = \int_0^z \frac{z-x}{(1+x)^2}dx \leq 4\int_0^z (z-x)dx = 2z^2$, la fonction $t \mapsto \sum_{s\leq t:\Delta Z_s > -\frac{1}{2}} (\ln(1+\Delta Z_s) - \Delta Z_s)$ est décroissante càdlàg somme de ses sauts. En appliquant la formule démontrée dans la preuve de la Proposition 1.2.4 entre les instants où Z connait un saut inférieur à $-1/2$, on obtient

$$dB_t = \Delta B_t = B_{t^-}\left(e^{-\Delta Z_t}(1+\Delta Z_t) - 1\right). \tag{1.4}$$

— Si $T = \inf\{t \leq 0 : \Delta Z_t = -1\}$ (par convention $\inf \emptyset = +\infty$) alors $Y_t \neq 0$ sur $[0,T[$, $Y_t = 0$ sur $[T,+\infty[$ et si $\forall t \geq 0,\ \Delta Z_t > -1$ alors $\forall t \geq 0,\ Y_t > 0$.

Démonstration : On pose $A_t = e^{Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}<Z^c,Z^c>_t}$ et $B_t = \prod_{0<s\leq t} e^{-\Delta Z_s}(1+\Delta Z_s)$. Montrons que $(A_tB_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'EDS.
En appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $\left(\xi_t := Z_t - Z_0 - \frac{1}{2} < Z^c, Z^c >_t\right)_{t\geq 0}$ de saut ΔZ_t et de crochet oblique $< Z^c, Z^c >_t$ pour la fonction $f(z) = e^z$, on obtient

$$\begin{aligned} dA_t &= f'(\xi_{t^-})\, d\xi_t + \tfrac{1}{2} f''(\xi_{t^-})\, d < \xi^c, \xi^c >_t + f(\xi_t) - f(\xi_{t^-}) - f'(\xi_{t^-})\,\Delta\xi_t \\ &= A_{t^-}\left(dZ_t - \tfrac{1}{2}d < Z^c, Z^c >_t + \tfrac{1}{2}d < Z^c, Z^c >_t + e^{\Delta Z_t} - 1 - \Delta Z_t\right) \\ &= A_{t^-}\left(dZ_t + e^{\Delta Z_t} - (1+\Delta Z_t)\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de (1.4), la formule d'intégration par parties assure que

$$\begin{aligned} d(A_tB_t) &= A_{t^-}dB_t + B_{t^-}dA_t + d[A,B]_t \\ &= A_{t^-}B_{t^-}\left(e^{-\Delta Z_t}(1+\Delta Z_t) - 1 + dZ_t + e^{\Delta Z_t} - (1+\Delta Z_t)\right) + \Delta A_t \Delta B_t \\ &= A_{t^-}B_{t^-}\Bigg(e^{-\Delta Z_t}(1+\Delta Z_t) - 1 + dZ_t + e^{\Delta Z_t} - (1+\Delta Z_t) \\ &\qquad + \left(e^{\Delta Z_t} - 1\right)\left(e^{-\Delta Z_t}(1+\Delta Z_t) - 1\right)\Bigg) \\ &= A_{t^-}B_{t^-}dZ_t. \end{aligned}$$

Ainsi $(A_tB_t)_{t\geq 0}$ est bien solution de l'EDS.

Pour montrer l'unicité, on pose $C_t = \frac{1}{A_t} = e^{Z_0 - Z_t + \frac{1}{2}<Z^c,Z^c>_t}$. En appliquant la formule d'Itô à $(\xi_t)_{t\geq 0}$ et $f(x) = e^{-x}$ ($f'(x) = -e^{-x}$ et $f''(x) = e^{-x}$), on obtient

$$\begin{aligned} dC_t &= f'(\xi_{t^-})\, d\xi_t + \tfrac{1}{2} f''(\xi_{t^-})\, d < \xi^c, \xi^c >_t + f(\xi_t) - f(\xi_{t^-}) - f'(\xi_{t^-})\,\Delta\xi_t \\ &= C_{t^-}\left(-dZ_t + d < Z^c, Z^c >_t + e^{-\Delta Z_t} - 1 + \Delta Z_t\right). \end{aligned}$$

Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ solution de l'EDS. On a

$$\Delta Y_t = Y_{t^-}\Delta Z_t \text{ et } \Delta C_t = C_{t^-}\left(e^{-\Delta Z_t} - 1\right)$$

et on admet la décomposition intuitive

$$dY_t^c = Y_{t^-} dZ_t^c \text{ et } dC_t^c = -C_{t^-} dZ_t^c.$$

Par la formule d'intégration par parties, on en déduit

$$\begin{aligned} d\left(Y_t C_t\right) &= Y_{t^-} dC_t + C_{t^-} dY_t + d[Y,C]_t \\ &= Y_{t^-} C_{t^-} \Big(- dZ_t + d < Z^c, Z^c >_t + e^{-\Delta Z_t} - 1 + \Delta Z_t + dZ_t \\ &\qquad - d < Z^c, Z^c >_t + \Delta Z_t \left(e^{-\Delta Z_t} - 1\right) \Big) \\ &= Y_{t^-} C_{t^-} \left(e^{-\Delta Z_t} \left(1 + \Delta Z_t\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Comme Z a seulement un nombre fini de sauts inférieurs à $-1/2$ sur $[0,t]$ et pour $z \geq -1/2$, $0 \leq 1 - e^{-z}(1+z) = \int_0^z e^{-x}(1-x)(z-x)dx \leq \frac{3\sqrt{e}}{2} \int_0^z (z-x)dx = \frac{3\sqrt{e}z^2}{4}$, $\sum_{0 \leq s \leq t} \left|e^{-\Delta Z_s}\left(1+\Delta Z_s\right) - 1\right| < +\infty$ p.s. et $G_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq s \leq t} \left(e^{-\Delta Z_s}\left(1 + \Delta Z_s\right) - 1\right)$ est un processus càdlàg à variation finie somme de ses sauts. D'après (1.4), en posant $D_t = Y_t C_t - B_t$, on a

$$dD_t = D_{t^-} dG_t \text{ et } D_0 = Y_0 C_0 - B_0 = 0. \tag{1.5}$$

Soit $S = \inf\{t \geq 0 : D_t \neq 0\}$. Supposons $S < +\infty$. Alors soit $S = 0$ et $D_S = 0$ soit, par définition de S, $D_{S^-} = 0$ et, d'après (1.5), $D_S = 0$. Comme G est à variation finie, $G = G_\uparrow + G_\downarrow$ avec $G_\uparrow$ croissante et $G_\downarrow$ décroissante càdlàg nulles en 0 telles que les mesures $dG_\uparrow$ et $-dG_\downarrow$ sont étrangères. Sa variation $|G|$ est définie comme $|G| = G_\uparrow - G_\downarrow$. Le caractère càd de G assure l'existence de $S' > S$ tel que $\int_{]S,S']} d|G|_t \leq \frac{1}{2}$. Pour $t \in]S,S']$, comme $D_S = 0$,

$$\begin{aligned} |D_t| = \left| D_S + \int_{]S,t]} D_{r^-} dG_r \right| &\leq \int_{]S,t]} |D_{r^-}| d|G|_r \\ &\leq \int_{]S,S']} |D_{r^-}| d|G|_r \leq \sup_{u \in [S,S']} |D_u| \int_{]S,S']} d|G|_r \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{u \in [S,S']} |D_u|. \end{aligned}$$

Ainsi $\sup_{t \in [S,S']} |D_t| \leq \frac{1}{2} \sup_{u \in [S,S']} |D_u|$ ce qui implique $\sup_{t \in [S,S']} |D_t| = 0$. Cela contredit la définition de S d'où $\{S = +\infty\}$ et l'unicité de la solution de l'EDS. □

Exercice 1.4.13. Montrer que $\mathcal{E}\left(Z^1\right) \mathcal{E}\left(Z^2\right) = \mathcal{E}\left(Z^1 + Z^2 + [Z^1, Z^2]\right)$.

Cas particulier des processus de Lévy

Supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy de triplet (b,c,F) t.q. $F\left(] - \infty, -1]\right) = 0$:

$$X_t = bt + \sqrt{c} W_t + \int_{]0,t] \times \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{\{|x|>1\}} N\left(ds,dx\right) + \int_{]0,t] \times \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}} \tilde{N}\left(ds,dx\right).$$

Comme $< X^c, X^c >_t = ct$ et $\Delta X_t = \int_{\mathbb{R}} x N\left(dt,dx\right)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(X\right)_t &= e^{X_t - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t} \prod_{0 < s \leq t} e^{-\Delta X_s} \left(1 + \Delta X_s\right) \\ &= \exp\left(X_t - \frac{ct}{2} + \sum_{0 < s \leq t} \left(\ln\left(1 + \Delta X_s\right) - \Delta X_s\right)\right) \\ &= \exp\left(X_t - \frac{ct}{2} + \int_{]0,t] \times \mathbb{R}} \left(\ln\left(1 + x\right) - x\right) N\left(ds,dx\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ln \mathcal{E}(X)_t = \hat{b}t + \sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \ln(1+x)\mathbf{1}_{\{|\ln(1+x)|>1\}} N(ds,dx)$$
$$+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} \ln(1+x)\mathbf{1}_{\{|\ln(1+x)|\le 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$$

où

$$\hat{b} = b - \frac{c}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(\ln(1+x)\mathbf{1}_{\{|\ln(1+x)|\le 1\}} - x\mathbf{1}_{\{|x|\le 1\}}\right) F(dx).$$

Il s'agit d'un processus de Lévy de triplet $(\hat{b}, c, \hat{F})$ où $\hat{F}$ désigne la mesure image de F par l'application $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 1.4.14. Trouver le triplet caractéristique du processus de Lévy $(Y_t)_{t\ge 0}$ tel que $e^{X_t} = \mathcal{E}(Y)_t$ lorsque $(X_t)_{t\ge 0}$ est un processus de Lévy de triplet (b,c,F).

Exercice 1.4.15. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(Z_t)_{t\ge 0}$ une semimartingale à valeurs réelles et $(Y_t = \mathcal{E}(Z)_t)_{t\ge 0}$ son exponentielle de Doléans-Dade.

1. Donner l'équation différentielle stochastique satisfaite par $(Y_t)_{t\ge 0}$ et expliciter sa solution.

On suppose que $\mathbb{P}(\forall t > 0,\ \Delta Z_t > -1) = 1$, ce qui assure que $\mathbb{P}(\forall t \ge 0,\ Y_t > 0) = 1$ et que l'on peut définir $X_t = 1/Y_t$ et exprimer sa dynamique dX_t en appliquant la formule d'Itô à $(Y_t)_{t\ge 0}$ et $f(y) = 1/y$.

2. Vérifier que $dX_t = X_{t^-}\left(-dZ_t + \frac{(\Delta Z_t)^2}{1+\Delta Z_t} + d\langle Z^c\rangle_t\right)$. Justifier que $\xi_t = \sum_{s\le t} \frac{(\Delta Z_s)^2}{1+\Delta Z_s}$ est un processus croissant à valeurs finies et que $\forall t \ge 0,\ X_t = \mathcal{E}(-Z + \xi + \langle Z^c\rangle)_t$.

On suppose désormais que $(Z_t)_{t\ge 0}$ est un processus de Lévy de triplet (b,c,F) vérifiant $\boxed{F((-\infty,-1]) = 0}$. On note $\tilde{F}$ l'image de la mesure F par l'application $\boxed{\varphi : z \mapsto -\frac{z}{1+z}}$.

3. Donner le triplet caractéristique du processus de Lévy $(\ln(Y_t))_{t\ge 0}$ et en déduire celui de $(\ln(X_t))_{t\ge 0}$.
4. Vérifier que $(-Z_t + \xi_t + \langle Z^c\rangle_t)_{t\ge 0}$ est un processus de Lévy de triplet caractéristique $\left(c - b + \int_{\mathbb{R}} \left(z1_{\{|z|\le 1\}} - \frac{z}{1+z}1_{\{|\frac{z}{1+z}|\le 1\}}\right) F(dz), c, \tilde{F}\right)$.
   Retrouver le triplet caractéristique de $(\ln(X_t))_{t\ge 0}$.
5. On suppose que $\tilde{F} = F$. Montrer que les images de F par $z \mapsto \ln(1+z)$ et par $z \mapsto -\ln(1+z)$ sont égales. Lorsque $2b = c + \int_{\mathbb{R}} \left(z1_{\{|z|\le 1\}} - \frac{z}{1+z}1_{\{|\frac{z}{1+z}|\le 1\}}\right) F(dz)$, retrouver ce résultat en vérifiant que $(X_t)_{t\ge 0}$ et $(Y_t)_{t\ge 0}$ ont même loi.
6. Vérifier que $\forall z > -1, \varphi(\varphi(z)) = z$, c'est-à-dire que φ est une involution de $]-1,+\infty[$. Pourquoi cette propriété n'est-elle pas surprenante ?

Nous allons maintenant étudier l'égalité $\tilde{F} = F$.

7. Lorsque F possède la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, vérifier que $\tilde{F}$ possède la densité $\tilde{f}(z) = f\left(-\frac{z}{1+z}\right)\frac{1}{(1+z)^2}$.
8. Trouver la constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que pour $f(z) = 1_{\{z>-1\}}|z|^\beta$, $\tilde{f} = f$ et vérifier que $\int_{-1}^{\infty}(z^2 \wedge 1)|z|^\beta dz < \infty$.
9. Soit ν une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\nu(]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz) < \infty$ et $\tilde{\nu}$ son image par φ.

(a) Vérifier que $\tilde{\nu}(]-\infty,0]) = 0$.

(b) Quelle est l'image de $\tilde{\nu}$ par φ ? En déduire que si $F = \nu + \tilde{\nu}$, $\tilde{F} = F$.

(c) Que vaut $\int_{]0,+\infty[} \frac{z^2}{1+z^2}\tilde{\nu}(dz)$? Remarquer que $\forall z \in \mathbb{R}$, $\frac{z^2}{1+z^2} \geq \frac{1}{2}(z^2 \wedge 1)$ et en déduire que $\int_{]0,+\infty[}(z^2 \wedge 1)\tilde{\nu}(dz) < \infty$ puis que $\int_{\mathbb{R}}(z^2 \wedge 1)(\nu(dz) + \tilde{\nu}(dz)) < \infty$.

10. Inversement, si $\tilde{F} = F$, vérifier que $F = \nu + \tilde{\nu}$ avec $\tilde{\nu}$ l'image par φ de la mesure ν définie par $\nu(dz) = 1_{\{-1<z<0\}}F(dz)$ et que $\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz) < \infty$.

1.5 Transformation d'Esscher

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (b, c, F). Le lemme suivant énonce une extension utile de la formule de Lévy-Khintchine sous une hypothèse d'intégrabilité renforcée sur F.

Lemme 1.5.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{[-1,1]^c} e^{\alpha x} F(dx) < +\infty$. Alors*

$$\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{(\alpha+iu)X_t}\right) = e^{t\left((\alpha+iu)b + \frac{c(\alpha+iu)^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\alpha+iu)x} - 1 - (\alpha+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)\right)}.$$

La preuve de ce résultat fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 1.5.2. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$ est t.q. $\int_{\mathbb{R}} 1_{\{|x|>1\}} e^{\alpha x} F(dx) < +\infty$ et on veut montrer que si

$$Y_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}} N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$$

alors $\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t}) < +\infty$ et

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{(\alpha+iu)Y_t}\right) = e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\alpha+iu)x} - 1 - (\alpha+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}. \tag{1.6}$$

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \left|e^{\alpha x} - 1 - \alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right| F(dx) < +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 0$, on pose $Y_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{n>|x|>1\}} N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$.

2. Quelle est l'intensité de la mesure de Poisson $\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|<n\}} N(ds,dx)$?
En déduire deux constantes $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\mu_n \in \mathbb{R}$ et une mesure de probabilité ν_n sur $\mathbb{R}$ telles que $Y_t^n + \mu_n t$ est un processus de Poisson composé d'intensité λ_n et de sauts distribués suivant ν_n.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} |e^{\gamma x}|\nu_n(dx) < +\infty$ et en déduire que

$$\mathbb{E}(e^{\gamma(Y_t^n + \mu_n t)}) = e^{\lambda_n t\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x}\nu_n(dx) - 1\right)}$$

puis que

$$\mathbb{E}(e^{\gamma Y_t^n}) = e^{t\int 1_{\{\frac{1}{n}<|x|<n\}}\left(e^{\gamma x} - 1 - \gamma x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}. \tag{1.7}$$

On pose $Z_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{n>|x|>1\}} N(ds,dx)$, $\zeta_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$ et $\zeta_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$.

4. Vérifier que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega) < +\infty$ t.q. la suite $(Z_t^n)_{n \geq N(\omega)}$ est constante et en déduire que Z_t^n converge presque sûrement lorsque $n \to \infty$ vers une limite Z_t à préciser.
   Calculer $\mathbb{E}((\zeta_t - \zeta_t^n)^2)$ et en déduire que ζ_t^n converge en probabilité vers ζ_t lorsque $n \to \infty$.
   Pour $\varepsilon > 0$, vérifier que
$$\mathbb{P}(|Y_t - Y_t^n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|Z_t - Z_t^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\zeta_t - \zeta_t^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
   En déduire que Y_t^n converge vers Y_t en probabilité lorsque $n \to \infty$.
5. Vérifier l'existence de $\nu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}((\zeta_t - \zeta_t^{\nu(k)})^2) \leq \frac{1}{k^2}$. En déduire que la sous-suite $(Y_t^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers Y_t.
   Vérifier que pour $\gamma = \alpha$, le second membre de (1.7) converge vers $e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}$ lorsque $n \to \infty$. En déduire, en utilisant le lemme de Fatou, que
$$\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t}) \leq e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}.$$
6. Soit $\lambda > 1$ et $u \in \mathbb{R}$. Vérifier que les variables aléatoires $e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n}$ convergent en loi vers une limite à préciser lorsque $n \to \infty$.
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : z \in \mathbb{C} \mapsto (|z| \wedge k)e^{i\arg(z)} \in \mathbb{C}$. Vérifier que
$$\left|\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n} - \varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n})\right)\right| \leq \mathbb{E}\left((e^{\frac{\alpha}{\lambda}Y_t^n} - k)^+\right).$$
   En déduire que
$$\left|\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n} - e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t}\right)\right| \leq \left|\mathbb{E}\left(\varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n}) - \varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t})\right)\right| + \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t^n} + e^{\alpha Y_t})}{k^{\lambda-1}}$$
   puis que
$$\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t}\right) = e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)x}-1-(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}.$$
7. Conclure que (1.6) est vérifiée.
8. Montrer que
$$\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{(\alpha+iu)X_t}\right) = e^{t\left((\alpha+iu)b+\frac{c(\alpha+iu)^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\alpha+iu)x}-1-(\alpha+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)\right)}.$$

Théorème 1.5.3. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\int_{[-1,1]^c} e^{\alpha x} F(dx) < +\infty$.*

1. $\left(Z_t = e^{\beta W_t - \frac{\beta^2 t}{2} + \alpha\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(ds,dx)\right) - t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale.*
2. *Sous $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Z_T$, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy de triplet caractéristique*
$$(\bar{b}, c, \bar{F}) \quad \textit{où} \quad (\bar{b}, \bar{F}) = \left(b + \beta\sqrt{c} + \int_{\mathbb{R}} x\left(e^{\alpha x} - 1\right)\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}F(dx),\ e^{\alpha x}F(dx)\right).$$

Démonstration : Le fait que $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale découle du lemme 1.5.1.

Soient $s, t \geq 0$ tels que $t+s \leq T$ et $A \in \mathcal{F}_s$. En utilisant la propriété de martingale de $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ et d'indépendance des accroissements de $(X_t)_{t \geq 0}$, il vient

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\mathbf{1}_A\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\mathbf{1}_A Z_T\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\mathbf{1}_A \mathbb{E}\left[Z_T|\mathcal{F}_{t+s}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\mathbf{1}_A Z_{t+s}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\mathbf{1}_A Z_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A Z_s \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\middle|\mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}\left[Z_T|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A Z_T\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\right]\tilde{\mathbb{P}}(A).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\frac{Z_{t+s}}{Z_s}\right] =& e^{iubt-\frac{\beta^2 t}{2}-t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}\mathbb{E}\left[e^{\left(iu\sqrt{c}+\beta\right)(W_{t+s}-W_s)}\right] \\
&\times \mathbb{E}\left[e^{(iu+\alpha)\left(\int_{]s,t+s]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}N(dr,dx)+\int_{]s,t+s]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(dr,dx)\right)}\right] \\
=& e^{iubt-\frac{\beta^2 t}{2}-t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}\mathbb{E}\left[e^{\left(iu\sqrt{c}+\beta\right)W_t}\right] \\
&\times \mathbb{E}\left[e^{(iu+\alpha)\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}N(dr,dx)+\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(dr,dx)\right)}\right] \\
=& e^{iubt+\left(\left(iu\sqrt{c}+\beta\right)^2-\beta^2\right)\frac{t}{2}+t\int_{\mathbb{R}}\left(\left(e^{(iu+\alpha)x}-1-(iu+\alpha)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)-\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\right)F(dx)} \\
=& e^{t\left(iu\left(b+\beta\sqrt{c}+\int_{\mathbb{R}} x(e^{\alpha x}-1)\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}F(dx)\right)-\frac{u^2 c}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{iux}-1-iux\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)e^{\alpha x}F(dx)\right)} \\
=& e^{t\left(iu\bar{b}-\frac{u^2 c}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{iux}-1-iux\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\bar{F}(dx)\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\mathbb{E}}\left[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}\mathbf{1}_A\right] = \tilde{\mathbb{P}}(A)\, e^{t\psi_{\bar{b},c,\bar{F}}(u)}$ et sous $\tilde{\mathbb{P}}$, l'accroissement $X_{t+s}-X_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et a la bonne loi. $\square$

Remarque 1.5.4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que t.q. $\int_{\mathbb{R}}(h(x)-1)^2 F(dx) < +\infty$ et $Z_t = \mathcal{E}(Y)_t$ où $Y_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}}(h(x)-1)\tilde{N}(ds,dx)$. Alors sous $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Z_T$, N est une mesure de Poisson sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ d'intensité $h(x)F(dx)ds$. La preuve de ce résultat fait l'objet du problème du paragraphe 1.6.4.

1.6 Problèmes

1.6.1 Dualité Call-Put dans un modèle exponentiel de Lévy

On s'intéresse à un sous-jacent de valeur initiale $x > 0$ qui évolue comme l'exponentielle $X_t^x = xe^{Z_t}$ d'un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$. On note $b \in \mathbb{R}$, σ^2 où $\sigma \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge z^2 F(dz) < +\infty$ le triplet tel que

$$\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = e^{t\psi(u)} \text{ où } \psi(u) = ibu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}(e^{iuz}-1-iuz1_{\{|z|\leq 1\}})F(dz).$$

On se donne une maturité $T \in]0,+\infty[$ et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s^x, s \leq t)$.

1. Montrer que $(-Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy sous $\mathbb{P}$ et donner son triplet de caractéristiques.
2. Rappeler la représentation de Lévy-Itô du processus $(Z_t)_{t\geq 0}$.
3. On suppose d'abord que F **est la mesure nulle, que** $\sigma > 0$ **et que** $b = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$. On note $C_e(x,y,r,\delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right)$, $C_a(x,y,r,\delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right)$, $P_e(x,y,r,\delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(y - X_T^x)^+\right)$ et $P_a(x,y,r,\delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(y - X_\tau^x)^+\right)$ les prix des Calls et Puts européens et américains de strike $y > 0$ et de maturité T lorsque r désigne le taux d'intérêt sans risque, δ le taux de dividendes versé par l'actif et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$.
   (a) Vérifier que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.
   (b) Vérifier que sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{(\delta-r)T+Z_T}$ par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(-Z_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy et donner son triplet de caractéristiques ? En déduire que
   $$C_e(x,y,r,\delta) = P_e(y,x,\delta,r).$$
   (c) Pour $t \geq 0$, on pose $Y_t^y = ye^{-Z_t}$. Montrer que pour $\tau \in \mathcal{T}$,
   $$\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\left(X_\tau^x - y\right)^+\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\delta\tau}\left(x - Y_\tau^y\right)^+\right).$$
   Vérifier que $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s^y, s \leq t)$ et en déduire que $C_a(x,y,r,\delta) = P_a(y,x,\delta,r)$.
4. On suppose désormais que $\int_{\mathbb{R}} e^z F(dz) < +\infty$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{Z_t})$ et en déduire b pour que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\leq T}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.

   Dans la suite, c'est cette valeur que l'on fixe pour b.

   (b) Montrer que pour un processus de Lévy $(\zeta_t)_{t\leq T}$ dont on précisera le triplet de caractéristiques $\mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}(x - ye^{\zeta_T})^+\right)$. Vérifier que $(e^{(r-\delta)t+\zeta_t})_{t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ pour la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(\zeta_s, s \leq t)$. Montrer que si $\tilde{\mathcal{T}}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$
   $$\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right) = \sup_{\tau\in\tilde{\mathcal{T}}} \mathbb{E}\left(e^{-\delta\tau}(x - ye^{\zeta_\tau})^+\right).$$
   (c) À quelle condition sur la mesure de Lévy F le marché est-il symétrique au sens où la mesure de Lévy de $(\zeta_t)_{t\leq T}$ est égale à F ? Comment cette condition s'écrit-elle dans le cas où F possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

1.6.2 Cumulants et moments d'un processus de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)F(dx) < +\infty$ associé à la fonction de troncature $h(x) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. On note

$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus, $\tilde{N}(dt,dx) = N(dt,dx) - F(dx)dt$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard qui apparaît dans sa décomposition de Lévy-Itô.

1. Écrire la décomposition de Lévy-Itô du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à l'aide de W_t, N et $\tilde{N}$.
2. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x| 1_{\{|x|>1\}} F(dx) < +\infty$.
   (a) Que peut-on dire du processus $\left(\int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x 1_{\{|x|>1\}} N(ds,dx) - t\int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x|>1\}} F(dx)\right)_{t\geq 0}$?
   (b) En déduire que pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable et calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
   (c) Pour $u \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{t}} - 1 - \frac{iux}{t} 1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)$ lorsque $t \to \infty$.
   (d) En étudiant $\mathbb{E}(e^{iu\frac{X_t}{t}})$, en déduire que $\frac{X_t}{t}$ converge en probabilité vers une limite à préciser lorsque $t \to \infty$.
3. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} x^2 F(dx) < +\infty$.
   (a) Exprimer $X_t - \mathbb{E}(X_t)$ à l'aide de W_t et de $\tilde{N}$. En déduire Var (X_t) puis $\mathbb{E}(X_t^2)$. Que peut-on dire du processus $(X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$?
   (b) Calculer dX_t^2 par la formule d'intégration par parties. Calculer $\mathbb{E}([X,X]_t)$ puis $\mathbb{E}(\int_0^t X_{s^-} d\mathbb{E}(X_s))$ et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X_t^2)$.
   (c) Pour $u \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $t\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iux}{\sqrt{t}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{t}})F(dx)$ lorsque $t \to \infty$.
   (d) En étudiant $\mathbb{E}(e^{iu\frac{X_t - \mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}})$, vérifier que $\frac{X_t - \mathbb{E}(X_t)}{\sqrt{t}}$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance à préciser lorsque $t \to \infty$.

On suppose l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\int e^{\varepsilon|x|} 1_{\{|x|>1\}} F(dx) < +\infty$ et on admet qu'alors

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left(e^{\varepsilon|X_t|}\right) < +\infty \text{ et } \forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_t}\right) = e^{t\left(\lambda b + \frac{c\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)\right)}.$$

On appelle cumulant (resp. moment) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de X_t le coefficient $\kappa_n(t)$ du terme $\frac{\lambda^n}{n!}$ dans le développement en série entière de $\lambda \mapsto \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}))$ (resp $\mu_n(t) = \mathbb{E}(X_t^n)$) : $\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^n \kappa_n(t)}{n!}$.

4. Que valent les cumulants de X_t ?
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^n \mathbb{E}(|X_t|^n)}{n!} < +\infty$. En déduire que les moments de X_t sont bien définis et que $\forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = 1 + \sum_{n\geq 1} \mu_n(t) \frac{\lambda^n}{n!}$.
6. Montrer que $\mu_n(t) = n! \sum_{l\geq 1} \sum_{(n_1,\ldots,n_l)\in(\mathbb{N}^*)^l : n_1+\ldots+n_l = n} \frac{1}{l!} \prod_{k=1}^{l} \frac{\kappa_{n_k}(t)}{n_k!}$.

7. À un l-uplet $(n_1,\dots,n_l)\in(\mathbb{N}^*)^l$, on associe $m=\max\{j\geq 1 : \exists k \text{ t.q. } n_k=j\}$ et le vecteur $(r_1,\dots,r_m)$ où $r_j=\mathrm{Card}\{k : n_k=j\}$.
   (a) Que valent $r_1+r_2+\ldots+r_m$ et $r_1+2r_2+\ldots+mr_m$?
   (b) Combien un vecteur $(r_1,\dots,r_m)\in\mathbb{N}^{m-1}\times\mathbb{N}^*$ a-t-il d'antécédents ?
   (c) Conclure que $\mu_n(t)=n!\sum_{m=1}^n\sum_{(r_1,\dots,r_m)\in\mathbb{N}^{m-1}\times\mathbb{N}^*:r_1+2r_2+\ldots+mr_m=n}\prod_{j=1}^m\frac{\kappa_j^{r_j}(t)}{(j!)^{r_j}r_j!}$.
   (d) Retrouver $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$.

1.6.3 Générateur infinitésimal d'un processus de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b,c,F) avec $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\})=0$ et $\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)F(dx)<+\infty$ et $\mathcal{F}_t=\sigma(X_s, 0\leq s\leq t)$. On note

$$N(dt,dx)=\sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0}\delta_{(s,\Delta X_s)}(dt,dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus, $\tilde{N}(dt,dx)=N(dt,dx)-F(dx)dt$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien qui apparaît dans sa décomposition de Lévy-Itô.

1. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}}|x|1_{\{|x|>1\}}F(dx)<+\infty$, X_t est intégrable pour tout $t\geq 0$ et calculer alors $\mathbb{E}(X_t)$.
2. Lorsque $\int_{\mathbb{R}}x^2F(dx)<+\infty$, vérifier que $X_t-\mathbb{E}(X_t)=\sqrt{c}W_t+\int_{]0,t]\times\mathbb{R}}x\tilde{N}(ds,dx)$ et en déduire Var (X_t) puis $\mathbb{E}(X_t^2)$.
3. Justifier que pour $T>0$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mesurable t.q. $\mathbb{P}(\int_0^T|h(X_s)|ds<+\infty)=1$, $\mathbb{P}\left(\forall t\in[0,T],\ \int_0^t h(X_{s^-})ds=\int_0^t h(X_s)ds\right)=1$. Vérifier que la continuité de h suffit à assurer que $\mathbb{P}(\int_0^T|h(X_s)|ds<+\infty)=1$.

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonction C^2, on note $M_t^f=f(X_t)-\int_0^t Lf(X_s)ds$ où

$$Lf(x)=bf'(x)+\frac{c}{2}f''(x)+\int_{\mathbb{R}}\left(f(x+y)-f(x)-f'(x)y1_{\{|y|\leq 1\}}\right)F(dy).$$

4. Justifier que $M_t^f=f(X_t)-\int_0^t Lf(X_{s^-})ds$ puis que

$$M_t^f=\sqrt{c}\int_0^t f'(X_s)dW_s+\int_{]0,t]\times\mathbb{R}}\left(f(X_{s^-}+y)-f(X_{s^-})\right)\tilde{N}(ds,dy).$$

5. Montrer que si f et f' sont bornées,

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x+y)-f(x))^2\leq(\|f'\|_\infty^2\vee 4\|f\|_\infty^2)(1\wedge y^2)$$

   et en déduire que M_t^f est alors une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.
6. Vérifier que

$$[L(fg)-fLg-gLf](x)=cf'g'(x)+\int_{\mathbb{R}}(f(x+y)-f(x))(g(x+y)-g(x))F(dy).$$

7. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est également une fonction C^2, calculer $[M^f, M^g]_t$. Vérifier que $[M^f, M^g]_t - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est une martingale locale.
   Lorsque f, g et g' sont bornées, vérifier que $\forall y \in \mathbb{R}$,
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f(x+y) - f(x))(g(x+y) - g(x))| \leq 2\|f\|_\infty (2\|g\|_\infty \vee \|g'\|_\infty)(1 \wedge |y|)$$
   et en déduire que $[M^f, M^g]_t - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est alors une martingale de carré intégrable.
8. Exprimer $M_t^f M_t^g - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ sous forme d'une somme d'intégrales stochastiques. En déduire que ce processus est une martingale locale. Vérifier que
   $$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (M_{s^-}^g)^2 (f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-}))^2 F(dy)ds\right) \\ \leq 4\mathbb{E}((M_t^g)^2) t (\|f'\|_\infty^2 \vee 4\|f\|_\infty^2) \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge y^2) F(dy).$$
   En déduire que lorsque f, f', g et g' sont bornées $M_t^f M_t^g - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ est une martingale de carré intégrable.
9. Lorsque $\int_{\mathbb{R}} x^2 F(dx) < +\infty$, vérifier que la bornitude des dérivées premières des fonctions C^2 f et g suffit à assurer que M_t^f est une martingale de carré intégrable et $M_t^f M_t^g - \int_0^t [L(fg) - fLg - gLf](X_s)ds$ une martingale.

1.6.4 Changement de mesure de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge x^2 F(dx) < +\infty$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. On note
$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s \neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$
la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus et $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - F(dx)dt$. On se donne également $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}} (h(x) - 1)^2 F(dx) < +\infty$ et on pose $F_h(dx) = h(x)F(dx)$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note
$$Z_t^A = \int_{]0,t]\times A} (h(x) - 1)\tilde{N}(ds, dx) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} 1_A(x)(h(x) - 1)\tilde{N}(ds, dx) \;\text{ et }\; Y_t^A = \mathcal{E}(Z^A)_t$$
son exponentielle de Doléans-Dade. On pose $Z_t = Z_t^{\mathbb{R}}$ et $Y_t = Y_t^{\mathbb{R}}$.

1. Que peut-on dire du processus Z_t^A ? Calculer $\mathbb{E}\left((Z_t^A)^2\right)$.
2. Exprimer ΔY_t^A à l'aide de ΔX_t et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(\Delta Y_t^A \neq 0) = 0$.
   On pose $\tau_n = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s (Y_r^A)^2 dr \geq n\}$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty\right) = 1$.
   Vérifier que le processus $1_{\{s\leq\tau_n\}} Y_{s^-}^A$ est prévisible.
   En admettant la formule intuitive $Y_{t\wedge\tau_n}^A = 1 + \int_{]0,t]\times A} 1_{\{s\leq\tau_n\}} Y_{s^-}^A (h(x) - 1)\tilde{N}(ds, dx)$, vérifier que $t \mapsto \mathbb{E}\left((Y_{t\wedge\tau_n}^A)^2\right)$ est localement intégrable puis que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left((Y_{t\wedge\tau_n}^A)^2\right) \leq e^{t\int_A (h(x)-1)^2 F(dx)}.$$
   En déduire que $(Y_t^A)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

3. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. Vérifier que $[Y^A, Y^B]_t = 0$.
   En calculant $d(Y^A \times Y^B)_t$ conclure que $Y_t^{A\cup B} = Y_t^A \times Y_t^B$.
4. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)^2 F(dx)$ est-elle finie ?
   En déduire que $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)|h(x) - 1|F(dx) < +\infty$ puis que $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)F_h(dx) < +\infty$.

Soit $T > 0$. L'objectif de la suite du problème est de montrer que sous $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Y_T$ par rapport à $\mathbb{P}$, la restriction de N à $[0, T] \times \mathbb{R}$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $F_h(dx)dt$ i.e. $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F_h). Pour cela on se contentera de vérifier que pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, $0 \leq s < t \leq T$ et $0 \leq u < v \leq T$,

$$\forall \lambda, \mu > 0,\ \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)-\mu N(]u,v]\times B)}\right) = e^{(t-s)F_h(A)(e^{-\lambda}-1)}e^{(v-u)F_h(B)(e^{-\mu}-1)}. \tag{1.8}$$

5. Montrer que $F\left(\{x \in A : h(x) \leq \frac{1}{2}\}\right) \leq 4\int_{\mathbb{R}}(h(x) - 1)^2 F(dx)$. En déduire que si $F(A) = +\infty$, alors $F\left(\{x \in A : h(x) > \frac{1}{2}\}\right) = +\infty$ et $F_h(A) = +\infty$. Conclure que si $F(A) + F(B) = +\infty$ alors (1.8) est satisfaite.
6. Vérifier que

$$\tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)-\mu N(]u,v]\times B)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)}\frac{Y_t^A}{Y_s^A}\right) \times \mathbb{E}\left(e^{-\mu N(]u,v]\times B)}\frac{Y_v^B}{Y_u^B}\right).$$

7. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $F(A) < +\infty$.
   (a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} 1_A(x)|h(x) - 1|F(dx) < +\infty$ et en déduire que $F_h(A) < +\infty$.
   (b) Quelle est la loi de $N(]s, t] \times A)$ sous $\mathbb{P}$?
   (c) Vérifier que $\frac{Y_t^A}{Y_s^A} = e^{(t-s)(F(A)-F_h(A))}\prod_{r\in]s,t]:\Delta X_r\in A\setminus\{0\}} h(\Delta X_r)$ où le produit porte presque sûrement sur un nombre fini de termes.
   (d) En déduire que si $\mathcal{E}(\zeta^A)_t$ désigne l'exponentielle de Doléans-Dade du processus $\zeta_t^A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{]0,t]\times A}(e^{-\lambda}h(x) - 1)\tilde{N}(ds, dx)$, alors

$$e^{(t-s)(1-e^{-\lambda})F_h(A)-\lambda N(]s,t]\times A)} \times \frac{Y_t^A}{Y_s^A} = \frac{\mathcal{E}(\zeta^A)_t}{\mathcal{E}(\zeta^A)_s}.$$

   Montrer que $\int_A (e^{-\lambda}h(x) - 1)^2 F(dx) < +\infty$. En raisonnant comme dans la question 2, que peut-on dire du processus $(\mathcal{E}(\zeta^A)_t)_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$?
   (e) Conclure que $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)}\frac{Y_t^A}{Y_s^A}\right) = e^{(t-s)F_h(A)(e^{-\lambda}-1)}$ et que (1.8) est vérifiée lorsque $F(A) + F(B) < +\infty$.

1.6.5 Equation integro-différentielle satisfaite par la densité marginale d'un processus de Lévy

Soit $(Z_s)_{s\geq 0}$ un processsus de Lévy de triplet caractéristique (b, c, F) (pour la fonction de troncature $h(x) = x1_{\{|x|\leq 1\}}$) tel que $\int_{\mathbb{R}} |y|F(dy) < +\infty$. On pose $\boxed{\tilde{b} = b - \int_{\mathbb{R}} y1_{\{|y|\leq 1\}}F(dy)}$. On admet que la condition d'intégrabilité satisfaite par F entraîne que pour tout $s > 0$, $\mathbb{E}[|Z_s|] < +\infty$. On fixe $t > 0$ et on suppose (propriété vérifiée lorsque $c > 0$) que la variable aléatoire Z_t possède une densité $p_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 et telle que $\lim_{|z|\to\infty} p_t(z) = 0$.

1. Donner la fonction $\psi_{b,c,F}(u)$ telle que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = e^{t\psi_{b,c,F}(u)}$.
2. Vérifier que $\frac{d}{du}\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = i\mathbb{E}[Z_t e^{iuZ_t}]$ et en déduire que
$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}[Z_t e^{iuZ_t}] = t\left(\tilde{b} + \int_{\mathbb{R}} ye^{iuy}F(dy)\right)e^{t\psi_{b,c,F}(u)} + ictu\mathbb{E}[e^{iuZ_t}].$$
3. Vérifier que $iu\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = -\int_{\mathbb{R}} e^{iuz}p_t'(z)dz$.
4. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} ye^{iuy}F(dy)e^{t\psi_{b,c,F}(u)} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} yp_t(z-y)F(dy)\right)e^{iuz}dz$.
5. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\int_{\mathbb{R}}\left((\frac{z}{t} - \tilde{b})p_t(z) + cp_t'(z) - \int_{\mathbb{R}} yp_t(z-y)F(dy)\right)e^{iuz}dz = 0.$$
6. Conclure que p_t satisfait l'équation intégro-differentielle
$$\forall z \in \mathbb{R},\ (\frac{z}{t} - \tilde{b})p_t(z) + cp_t'(z) - \int_{\mathbb{R}} yp_t(z-y)F(dy) = 0.$$
7. Retrouver la densité de Z_t dans le cas particulier $F \equiv 0$ et $c > 0$.

1.6.6 Fonction caractéristique, martingales et exponentielles

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un procesus de Lévy de triplet caractéristique (b, c, F) avec $c > 0$ (pour la fonction de troncature $h(x) = x1_{\{|x|\leq 1\}}$) et de filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. On note $(X_t^c)_{t\geq 0}$ sa partie martingale locale continue, $N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0}\delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$ sa mesure de sauts et $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - dtF(dx)$ sa mesure de sauts compensée.

1. Que peut-on dire de N et de $(W_t = \frac{1}{\sqrt{c}}X_t^c)_{t\geq 0}$? Comment la décomposition
$$dX_t = bdt + \sqrt{c}dW_t + \int_{x\in\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}N(dt, dx) + \int_{x\in\mathbb{R}} x1_{\{|x|\leq 1\}}\tilde{N}(dt, dx)$$
s'appelle-t-elle ?
2. Que vaut $\mathbb{E}[e^{iuX_t}]$ pour $u \in \mathbb{R}$?

Pour $u \in \mathbb{R}$, on note
$$M_t^u = e^{iuX_t - t\Psi_{b,c,F}(u)} \text{ où } \Psi_{b,c,F}(u) = ibu - \frac{cu^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)$$
$$Z_t^u = iu\sqrt{c}W_t + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}}(e^{iux} - 1)\tilde{N}(ds, dx)$$

3. Remarquer que pour $x \in \mathbb{R}$, $|e^{iux} - 1| \leq (|u| \vee 2)(|x| \wedge 1)$. En déduire que Z_t^u est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable. Exprimer ΔZ_t^u en fonction de ΔX_t. Que vaut $[Z^u, Z^u]_t$?
4. Vérifier que $\forall T > 0$, $\sup_{t\in[0,T]}|M_t^u| \leq e^{T(-\Re(\Psi_{b,c,F}(u))\vee 0)}$ où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

5. Vérifer que
$$de^{iuX_t} = e^{iuX_{t-}}\left(iudX_t - \frac{cu^2}{2}dt + \int_{x\in\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iux)N(dt,dx)\right).$$
En prenant garde à ce que toutes les intégrales que l'on écrira contre $N(dt,dx)$, $\tilde{N}(dt,dx)$ et $dtF(dx)$ soient bien définies, en déduire que
$$de^{iuX_t} = e^{iuX_{t-}}\left(dZ_t^u + \Psi_{b,c,F}(u)dt\right).$$
6. En déduire dM_t^u. Conclure que $M_t^u = \mathcal{E}(Z^u)_t$ et justifier que ce processus est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.
7. Pour $v, w \in \mathbb{R}$, vérifier que
$$d[M^v, M^w]_t = M_{t-}^v M_{t-}^w\left(\int_{x\in\mathbb{R}}(e^{ivx}-1)(e^{iwx}-1)N(dt,dx) - cvwdt\right).$$
Écrire $m_t^{v,w} := [M^v, M^w]_t + (\Psi_{b,c,F}(v) + \Psi_{b,c,F}(w) - \Psi_{b,c,F}(v+w))\int_0^t M_{s-}^v M_{s-}^w ds$ comme une intégrale contre $\tilde{N}$ et conclure que ce processus est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.
8. En déduire que $M_t^v M_t^w e^{t\left(\Psi_{b,c,F}(v)+\Psi_{b,c,F}(w)-\Psi_{b,c,F}(v+w)\right)}$ est également une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable. Pour quel choix de u dans la question 6, ce résultat est-il une conséquence de cette question ?

Bibliographie

[1] Applebaum, D. : Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 93. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] Bertoin, J. : Lévy processes. Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Barndorff-Nielsen, O. : Processes of normal inverse Gaussian type. Finance Stoch. 2(1) :41-68, 1998.

[4] Cont, R. and Tankov, P. : Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.

[5] Jacod, J. and Shiryaev, A. : Limit theorems for stochastic processes. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 288. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] Protter, P. : Stochastic integration and differential equations. Second edition. Applications of Mathematics (New York), 21. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[7] Protter, P. and Talay, D. : The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations. Ann. Probab. 25(1) :393-423, 1997.

[8] Sato, K. : Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.