UMLV
Modélisation stochastique (M2)

Vendredi 16 janvier 2009 (13h-16h)

Exercice 1.
On désire étudier l'évolution du nombre d'appels en attente à un central téléphonique. Si k appels sont en attente à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, chacun des k appels a une probabilité $p \in]0, 1]$ d'être terminé, et le nombre de nouveaux appels arrivés à l'instant $n+1$ qui sont en attente suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. (On rappelle que si Z suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, alors $\mathbb{P}(Z = k) = \mathrm{e}^{-\theta}\, \theta^k/k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.) On note X_n le nombre d'appels en attente à l'instant n.

1. Vérifier que $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov irréductible sur $\mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition.
2. Vérifier que les lois de X_1 puis de celle X_2 sachant que $X_0 = 0$ sont des lois de Poisson.
3. Montrer que la loi de X_n sachant $X_0 = 0$ converge.
4. En déduire que X est une chaîne de Markov irréductible récurrente positive et donner sa probabilité invariante.

△

Exercice 2.
On considère la chaîne de Markov $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$X_{n+1} = (X_n + Z_{n+1})^+, \tag{1}$$

où les variables aléatoires $(Z_n, n \in, \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont On suppose que $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$, $\mathbb{P}(Z_1 < 0) > 0$ et que Z_1 est intégrable. On pose $S_0 = X_0$ et $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$. On définit $T^0 = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$.

1. Vérifier que X est irréductible.
2. On suppose $\mathbb{E}[Z_1] > 0$.
   (a) Montrer que p.s. $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
   (b) En déduire que X est transiente.
3. Montrer que $\mathbb{P}_0(T^0 > n) \leq \mathbb{P}_0(S_n > 0)$.
4. On suppose $\mathbb{E}[Z_1] < 0$ et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda_0 Z_1}] < +\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda_1 Z_1}] < 1$.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_0(S_n > 0)$ converge.
   (c) En déduire que X est récurrente positive.
5. On suppose $\mathbb{E}[Z_1] = 0$ et Z_1 de carré intégrable.
   (a) Montrer que, si X est transiente, alors p.s. $\{T^0 = +\infty\} \subset \{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty\}$.

(b) En déduire, en utilisant la loi du 0-1 de Kolmogorov que X est récurrente.

(c) Soit $K > 0$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour $n \geq K^2/\varepsilon^2$, $\mathbb{P}(X_n \geq K) \geq \mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon)$.

(d) En déduire que $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq K) \geq 1/2$ pour tout $K > 0$.

(e) Montrer que X est récurrente nulle.

$\triangle$

Exercice 3 (Algorithme Hastings-Metropolis indépendant)**.**
On propose dans ce problème de montrer la convergence en norme sup relative de l'algorithme de Hasting-Metropolis (H-M) indépendant. On rappelle que l'algorithme de H-M génère une chaîne de Markov ergodique $(x_n)_{n\geq 0}$ ayant pour loi stationnaire une loi dont la densité f nous est fixée. Par soucis de simplicité, nous considèrerons que la fonction f, dont l'expression n'est connue qu'à une facteur de normalisation près, est une densité par rapport à la mesure de Lebesgue μ sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, nous simplifierons la notation $\mu(dx)$ par dx.

Rappelons brièvement la définition de l'algorithme de Hastings-Metropolis indépendant .
Soit q une densité sur $\mathbb{R}$, entièrement connue et simulable, vérifiant

$$q(x) \geq af(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

pour un certain $a \in]0, 1[$.

On initialise l'algorithme au moyen d'une donnée x_0 simulée suivant la densité instrumentale q, et le passage de $x_n \to x_{n+1}$ se fait de la manière suivante :

1. `simuler` $y \sim q(\cdot)$;
2. `calculer` $\alpha(y, x_n) = \min\left\{1, \dfrac{f(y)q(x_n)}{f(x_n)q(y)}\right\}$;
3. `prendre` $x_{n+1} = \begin{cases} y & \texttt{avec probabilité } \alpha(y, x_n), \\ x_n & \texttt{avec probabilité } 1-\alpha(y, x_n). \end{cases}$

L'algorithme de H-M que nous venons de décrire, est dit "indépendant" car la proposition de la variable instrumentale y dont dépend x_{n+1}, ne dépend pas de x_n.

On notera par la suite, pour tout $n \geq 0$, p^n la densité de l'algorithme à l'étape n, *i.e* $x_n \sim p^n$.

1) Expliquer pourquoi (en commentant le rôle de $p(\cdot, \cdot)$ et $r(\cdot)$ dans la modélisation de l'algorithme de H-M) le noyau de transition de l'algorithme de H-M s'écrit sous la forme :

$$P(x, dy) = p(x, y)dy + r(x)\delta_x(dy), \tag{3}$$

où

$$p(x, y) = \begin{cases} q(y)\alpha(x, y) & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{if } x = y, \end{cases}$$

et

$$r(x) = 1 - \int_{\mathbb{R}} p(x, z)dz.$$

2) Montrer que la densité p^{n+1} de l'algorithme de H-M à l'étape $n+1$, s'obtient à partir de p^n au moyen de la formule :

$$p^{n+1}(y) \quad = \quad q(y) \int_{\mathbb{R}} p^n(x)\alpha(x,y)\,dx + p^n(y) \int_{\mathbb{R}} q(x)(1-\alpha(y,x))\,dx$$

Vérifier que f est bien une densité invariante par le noyau de transition (3).

On définit, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times,\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

$$h(x,y) = \min\{f(x)q(y); f(y)q(x)\},$$

$$Q(x,y) = \frac{h(x,y)}{f(y)} = \min\left\{q(x), \frac{q(y)f(x)}{f(y)}\right\},$$

où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} Q(x,y)dx \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et

$$D^n(x) = \frac{p^n(x)}{f(x)} - 1 \qquad \text{et} \qquad D^n_M = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|D^n(x)|\}.$$

3) Montrer en utilisant la symétrie de $h(x,y)$ et le fait que $\alpha(x,y) = h(x,y)/f(x)q(y)$, que :

$$p^{n+1}(y) = p^n(y) + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{p^n(x)}{f(x)} - \frac{p^n(y)}{f(y)}\right) h(x,y)dx.$$

4) Déduire de la question 3) que :

$$\frac{p^{n+1}(y)}{f(y)} - 1 = \left(\frac{p^n(y)}{f(y)} - 1\right)\left(1 - \int_{\mathbb{R}} Q(x,y)\right) + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{p^n(x)}{f(x)} - 1\right) Q(x,y)dx.$$

5) En utilisant la relation précèdente, exprimée plus simplement sous la forme :

$$D^{n+1}(y) = D^n(y)\left(1 - \int_{\mathbb{R}} Q(x,y)\right) + \int_{\mathbb{R}} D^n(x)Q(x,y)dx,$$

montrer les inégalités suivantes.

$$D^{n+1}(y) \leq D^n_M(y) - \int_{\mathbb{R}} (D^n_M(x) - D^n(x))Q(x,y)dx$$

et

$$D^{n+1}(y) \leq D^n_M(y) - a\int_{\mathbb{R}} (D^n_M(x) - D^n(x))f(x)dx,$$

où la constante a intervient dans l'inégalité (2).

6) Déduire de 5) que :

$$|D^{n+1}(x)| \leq D^n_M(1-a).$$

7) Que peut-on dire sur la vitesse de convergence de l'algorithme de H-M ?

8) Quel critère qualitatif simple liant f et q faut-il optimiser si l'on souhaite améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme de H-M ?

$\triangle$