File d'attente avec deux serveurs

Le but de cet exercice est l'étude d'une file d'attente avec deux serveurs de caractéristiques différentes.

On considère une file d'attente avec deux serveurs A et B. On suppose que les temps de service du serveur A (resp. B) sont des variables aléatoires exponentielles de paramètres μ_A (resp. μ_B), avec $\mu_A \geq \mu_B > 0$. On suppose que le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Si les deux serveurs sont libres, on suppose que le client qui arrive choisit le serveur A, qui est en moyenne le plus rapide. Si un seul serveur est libre, on suppose que le client qui arrive va directement à ce serveur. On note X_t l'état du système à l'instant t. Si $X_t = 0$, les deux serveurs sont libres, si $X_t \geq 2$, les deux serveurs sont occupés. Si un seul serveur est occupé, on distingue le cas où A est occupé, on note alors $X_t = A$, et le cas où B est occupé, on note alors $X_t = B$. On note $E = \{0, A, B, 2, \ldots\}$ l'ensemble des valeurs possibles des états du système.

1. Montrer que $X = (X_t, t \geq 0)$ est une chaîne de Markov à temps continu sur E. Donner son générateur infinitésimal et la matrice de transition de la chaîne trace.
2. On pose $\rho = \lambda/(\mu_A + \mu_B)$. On cherche une probabilité invariante $\pi = (\pi_0, \pi_A, \pi_B, \pi_2, \ldots)$ de la chaîne. Expliquer pourquoi si elle existe, alors elle est unique. Montrer que si on pose $\pi_1 = \pi_A + \pi_B$, alors on a $\pi_n = \rho\pi_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$ et donc $\pi_n = \rho^{n-1}\pi_1$. Vérifier également que
$$\pi_1 = \pi_0 \frac{1}{1+2\rho} \frac{\lambda}{\mu_A\mu_B} (\lambda + \mu_B)\,.$$
3. En déduire qu'il existe une probabilité invariante si et seulement si $\rho < 1$. Vérifier alors que
$$\frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{1-\rho} + (1+2\rho)\frac{\mu_A\mu_B}{\lambda(\lambda+\mu_B)},$$
et
$$\frac{1}{\pi_0} = 1 + \frac{1}{1+2\rho} \frac{1}{1-\rho} \frac{\lambda(\lambda+\mu_B)}{\mu_A\mu_B}.$$
4. On note $\tilde{X}_t$ le nombre de personnes dans le système : $\tilde{X}_t = 1$ si $X_t = A$ ou $X_t = B$, et $\tilde{X}_t = X_t$ sinon. Vérifier que, en régime stationnaire, $\mathbb{E}[\tilde{X}_t] = \dfrac{\pi_1}{(1-\rho)^2}$. En déduire que, à $\mu_A + \mu_B = 2\mu$ constant (taux de service moyen constant), le nombre moyen de personnes dans le système est minimal pour
$$\mu_B = \lambda\left(\sqrt{1+\frac{1}{\rho}} - 1\right), \quad \text{et} \quad \mu_A = \mu_B\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}.$$
5. Comparer avec le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire pour une file $M/M/2$ de taux de service μ et taux d'arrivée λ. Vérifier que si ρ est grand, la différence en pourcentage est minime.