Mesures de risques en finance (M2)

Mercredi 20 Décembre 2006 (9h00-12h00)

Seul document autorisé : une feuille manuscrite recto verso.

Les exercices sont indépendants. La notation log désigne le logarithme népérien : $\log(\mathrm{e}) = 1$.

Exercice 1 (Mesure de risque sur L^2).
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\beta > 0$. On considère la mesure de risque ρ définie sur $L^2(\mathbb{P}) = \{X \in \mathcal{F}; \mathbb{E}[X^2] < \infty\}$ par

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \beta\sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

On désire étudier les propriétés de la mesure de risque ρ.

1. Montrer que ρ est
   (a) invariant par translation ($\rho(X + m) = \rho(X) + m$ pour $m \in \mathbb{R}$),
   (b) invariante pour la loi ($\rho(X) = \rho(Y)$ si X et Y ont même loi),
   (c) pertinente ($\rho(\mathbf{1}_A) > \rho(0)$ si $\mathbb{P}(A) > 0$),
   (d) positivement homogène ($\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ pour $\lambda \geq 0$),
   (e) sous-additive ($\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$),
   (f) convexe ($\rho(\theta X + (1 - \theta)Y) \leq \theta\rho(X) + (1 - \theta)\rho(Y)$ pour $\theta \in [0, 1]$).
2. On suppose qu'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En considérant les variables $Z_p = \mathbf{1}_{\{U \leq p\}}$ pour $p \in [0, 1]$, montrer que ρ n'est pas croissante (i.e. trouver X et Y tels que $X \geq Y$ mais $\rho(X) < \rho(Y)$). La mesure de risque ρ est-elle une mesure de risque monétaire ?

Soit $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{P})$ un espace gaussien (i.e. pour tout $n \geq 1$ si $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ alors pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ est une variable aléatoire (réelle) gaussienne ou une constante). On suppose que $\mathcal{X}$ n'est pas réduit aux variables constantes. Dans ce qui suit on considère la restriction de ρ à $\mathcal{X}$, notée $\rho^{\mathcal{X}}$.

3. Soit $X, Y \in \mathcal{X}$. Monter que $X \geq Y$ p.s. implique $\rho^{\mathcal{X}}(X) \geq \rho^{\mathcal{X}}(Y)$. En déduire que $\rho^{\mathcal{X}}$ est une mesure cohérente.
4. Déterminer l'ensemble des positions acceptables associées à $\rho^{\mathcal{X}}$. En déduire que $\rho^{\mathcal{X}} = \mathrm{VaR}_\alpha$ pour une valeur de α que l'on déterminera en fonction de β, où $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ désigne le quantile d'ordre α de la loi de X. Comparer α avec $1/2$.

$\triangle$

Exercice 2 (Loi de valeurs extrêmes associée aux lois gaussiennes).
On considère une suite de variables aléatoires, $(X_n, n \geq 1)$, indépendantes de loi gaussienne de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance σ^2 avec $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note $M_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Sauf pour la dernière question, on suppose $m = 0$ et $\sigma = 1$. La densité, f, de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

1. Pour $x > 0$, montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que
$$\left| \mathbb{P}(X \geq x) - \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\mathbb{P}(X \geq x)}{x^2}.$$
2. Soit $c > 0$. Montrer que si $z(n)$ est solution de $\dfrac{f(z)}{z} = \dfrac{c}{n}$, alors on a le développement limité suivant (pour n grand) :
$$z(n) = \sqrt{2\log(n)} - \frac{\log(\log(n))}{2\sqrt{2\log(n)}} - \frac{\log(4\pi)}{2\sqrt{2\log(n)}} + \frac{-\log(c)}{\sqrt{2\log(n)}} + h(n),$$
où $\lim_{n\to\infty} h(n)\sqrt{2\log(n)} = 0$.
3. On suppose qu'il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$ tels que $(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas une constante. Montrer que nécessairement il existe une fonction décroissante non constante à valeurs dans $[0, +\infty]$, c, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n) = c(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire, en exhibant une suite $((a_n, b_n), n \geq 1)$ particulière, que la loi gaussienne centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$, appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel.
5. On suppose que X_n est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Exhiber une suite $((\tilde{a}_n, \tilde{b}_n), n \geq 1)$, avec $\tilde{a}_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, telle que $(\dfrac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers la loi de Gumbel.

△

Exercice 3 (Intervalle de confiance pour un quantile extrême).
Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Cauchy de densité f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1 + x^2}$. On note $M_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ pour $n \geq 1$.

Soit $c > 0$. On désire estimer z_n le quantile d'ordre $1 - cn^{-1}$ associé à la loi de Cauchy à l'aide de l'estimateur de Hill.

1. Calculer z_n et en donner un équivalent quand n tend vers l'infini.
2. Trouver $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$ tels que $(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers une loi de valeurs extrêmes. Déterminer le paramètre ξ de la loi de valeurs extrêmes généralisée associée.
3. On considère l'estimateur de Hill $\hat{z}_n = c^{-\xi} M_n$ quand n tend vers l'infini. (Remarquer que pour simplifer, on utilise la vraie valeur ξ dans la définition de cet estimateur, alors que cette valeur est a priori inconnue.) Montrer que la suite $(\hat{z}_n / z_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite que l'on précisera. Donner un intervalle de confiance de z_n de niveau asymptotique $1 - r$, où $r \in (0, 1)$ (on supposera que la vraie valeur de ξ est connue). Quel est l'ordre de grandeur (en n) de la largeur de cet intervalle de confiance.
4. Étendre les résultats de la question précédente aux cas où la loi de X_n est une loi du domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

△

Exercice 4 (Fonction de répartition sur $\mathbb{R}^2$).
Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles des fonctions de répartition d'un couple de variables aléatoires (X,Y) ? Justifier. Si oui, donner les lois marginales.

1. $H(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $H(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x}-xe^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y, \\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

△

Exercice 5 (Encadrement du prix d'une option "quanto").
On note S_t le prix d'une action en dollar à l'instant t et X_t le taux de change à l'instant t (c'est-à-dire, le prix d'un dollar en euro). Supposons que l'on observe pour la maturité T : le prix des puts sur S sur le marché américain pour tous les strikes ; ainsi que le prix des puts sur X sur le marché européen pour tous les strikes. Étant données ces informations, le but de cet exercice est de trouver le meilleur encadrement possible du prix en euro de l'option quanto qui paie $\underline{X}(K-S_T)^+$ à la maturité T où $\underline{X}$ est un taux de change fixé dans le contrat et K est exprimé en dollar. Les variables aléatoires X_T et S_T sont supposées continues.

On supposera que les taux d'interêt étranger r^f et domestique r^d sont constants. On se place aujourd'hui à la date $t=0$. On rappelle que si Z est un flux en euro payé en T, son prix en euro à la date $t=0$ est $e^{-r^dT}\mathbb{E}^d[Z]$, où $\mathbb{E}^d$ est l'espérance sous la probabilité risque neutre sur le marché domestique. Son prix en euro à la date $t=0$ est encore donné par $X_0 e^{-r^fT}\mathbb{E}^f\left[\frac{Z}{X_T}\right]$, où $\mathbb{E}^f$ est l'espérance sous la probabilité risque neutre sur le marché étranger.

1. Montrer que le prix de l'option quanto est donné par $X_0 e^{-r^fT}\mathbb{E}^f\left[\frac{\underline{X}}{X_T}(K-S_T)^+\right]$.

2. On note $\mathbb{Q}^f$ la probabilité risque neutre sur le marché étranger. Montrer que
$$\mathbb{E}^f\left[\frac{\underline{X}}{X_T}(K-S_T)^+\right] = \int_0^\infty du \int_0^K dv \;\; \mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T} \geq \frac{u}{\underline{X}}; S_T \leq v\right).$$

3. Montrer que
$$\mathbb{Q}^f\left(S_T \leq K\right) = e^{r^fT}\frac{\partial \mathrm{Put}^S}{\partial K}(T,K)$$
où Put^S est le prix sur le **marché étranger** d'un put sur S.

4. Montrer que
$$\mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T} \geq \frac{1}{K}\right) = \frac{e^{r^fT}}{X_0}\left[K\frac{\partial \mathrm{Put}^X}{\partial K}(T,K) - \mathrm{Put}^X(T,K)\right]$$
où Put^X est le prix sur le **marché domestique** d'un put sur X.

5. Exprimer le prix de l'option quanto à l'aide de la fonction copule du couple $(1/X_T, S_T)$ sous $\mathbb{Q}^f$. Calculer l'encadrement optimal. On ne cherchera pas à simplifier le résultat.

△

Correction

Exercice 1 (Mesure de risque sur L^2).

1. Les propriétés (a) à (d) sont évidentes. Pour la propriété (e), comme l'espérance est linéaire, il suffit de vérifier que $X \mapsto \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ est sous-linéaire. Soit $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ tels que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. On a par Cauchy-Schwarz

   $$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] \leq \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]} = (\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + \sqrt{\mathrm{Var}(Y)})^2.$$

   Ceci implique que $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Pour $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ quelconques, on pose $X' = X - \mathbb{E}[X]$ et $Y' = Y - \mathbb{E}[Y]$, et en utilisant ce qui précéde pour X' et Y', il vient

   $$\rho(X+Y) = \rho(X'+Y') + \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \leq \rho(X') + \rho(Y') + \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \rho(X) + \rho(Y).$$

   La propriété (e) est donc vraie.

   La propriété (f) est une conséquence immédiate des propriétés (d) et (e).

2. On a $\rho(Z_p) = p + \beta\sqrt{p(1-p)}$ et $\dfrac{\partial g(p)}{\partial p} = 1 + \dfrac{\beta}{2}\dfrac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$, où $g(p) = \rho(Z_p)$. En particulier $g(1^-) = -\infty$. La fonction g est décroissante au voisinage (gauche) de 1. Il existe donc $p < q < 1$ tel que $\rho(Z_p) > \rho(Z_q)$. La mesure de risque n'est pas croissante. Il ne s'agit pas d'une mesure de risque monétaire.

3. Comme $X - Y$ est une variable gaussienne, $X - Y \geq 0$ p.s. implique que $X - Y$ est une constante $m \geq 0$. On a alors, par invariance par translation, que $\rho^{\mathcal{X}}(X) = \rho^{\mathcal{X}}(Y+m) = \rho^{\mathcal{X}}(Y) + m \geq \rho^{\mathcal{X}}(Y)$. La mesure de risque $\rho^{\mathcal{X}}$ est croissante et donc cohérente (car elle vérifie aussi les propriétés (a), (d) et (f)).

4. Pour $X \in \mathcal{X}$, on note $m_X = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \geq 0$. L'ensemble des positions acceptables associé à $\rho^{\mathcal{X}}$ est

   $$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X}; \rho^{\mathcal{X}}(X) \leq 0\} = \{X \in \mathcal{X}; m_X + \beta\sigma_X \leq 0\}.$$

   On suppose que $\sigma_X > 0$. La loi de $G = (X - m_X)/\sigma_X$ est la loi gaussienne centrée réduite. En particulier, si $x_\alpha = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est le quantile d'ordre α de la loi de X, on a

   $$\alpha = \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \mathbb{P}(G \leq (x_\alpha - m_X)/\sigma_X).$$

   Soit ϕ l'inverse de la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite. On en déduit que $\phi(\alpha) = (x_\alpha - m_X)/\sigma_X$ et donc $x_\alpha = m_X + \phi(\alpha)\sigma_X$. On a $\rho^{\mathcal{X}}(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ pour α tel que $\phi(\alpha) = \beta$ soit $\alpha = \mathbb{P}(G \leq \beta)$. Comme $\beta > 0$, on en déduit que $\alpha > 1/2$.

   Si $\sigma_X = 0$, alors on a $X = m_X$ p.s. et donc $\rho^{\mathcal{X}}(X) = m_X$. Par ailleurs le quantile d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire constante est égal à cette constante : $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = m_X$.

   On en déduit donc que pour tout $X \in \mathcal{X}$, on a $\rho^{\mathcal{X}}(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ avec $\alpha = \mathbb{P}(G \leq \beta)$.

△

Exercice 2 (Loi de valeurs extrêmes associée aux lois gaussiennes).

1. Remarquons que $f(u) = -f'(u)/u$. On a

$$\mathbb{P}(X > x) = -\int_x^\infty \frac{f'(u)}{u}\, du = -\left[\frac{f(u)}{u}\right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{f(u)}{u^2}\, du = \frac{f(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{f(u)}{u^2}\, du.$$

On utilise la majoration $\displaystyle\int_x^\infty \frac{f(u)}{u^2}\, du \leq \frac{1}{x^2}\int_x^\infty f(u)\, du = \frac{\mathbb{P}(X > x)}{x^2}$ pour conclure.

2. Si z_n est solution de $\dfrac{f(z)}{z} = \dfrac{c}{n}$, alors on a

$$z_n^2 + 2\log(z_n) = 2\log(n) - \log(c^2 2\pi). \tag{1}$$

On en déduit l'équivalent suivant $z_n = \sqrt{2\log(n)} + h_1(n)$ où $\lim_{n\to\infty} h_1(n)/\sqrt{2\log(n)} = 0$. En utilisant (1) avec $z_n = \sqrt{2\log(n)} + h_1(n)$, il vient

$$2\sqrt{2\log(n)}h_1(n) + h_1(n)^2 + 2\log\left(1 + \frac{h_1(n)}{\sqrt{2\log(n)}}\right) = -\log(\log(n)) - \log(c^2 4\pi).$$

On en déduit l'équivalent suivant $h_1(n) = -\dfrac{\log(\log(n))}{2\sqrt{2\log(n)}} + h_2(n)$ où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{h_2(n)}{h_1(n)} = 0$. En utilisant (1) avec $z_n = \sqrt{2\log(n)} - \dfrac{\log(\log(n))}{2\sqrt{2\log(n)}} + h_2(n)$, il vient

$$2h_2(n)\left[\sqrt{2\log(n)} - \frac{\log(\log(n))}{2\sqrt{2\log(n)}}\right] + \frac{\log(\log(n))^2}{8\log(n)} + h_2(n)^2 \\ + 2\log\left(1 + \frac{h_1(n)}{\sqrt{2\log(n)}}\right) = -\log(c^2 4\pi).$$

On en déduit l'équivalent suivant $h_2(n) = -\dfrac{\log(c^2 4\pi)}{2\sqrt{2\log(n)}} + h_3(n)$ où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_3(n)\log(n) = 0$.

3. La convergence en loi implique que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n < x), n \geq 1)$ converge. Comme

$$\mathbb{P}(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x) = \mathbb{P}(M_n < a_n x + b_n) = (1 - \mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n))^n = \mathrm{e}^{n\log(1-\mathbb{P}(X\geq a_n x + b_n))},$$

on en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(n\mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n), n \geq 1)$ converge vers une limite $c(x) \in [0, \infty]$. Comme $x \mapsto \mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n)$ est décroissante, on en déduit que la fonction c peut être choisie décroissante.

4. On considère $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\log(n)}}$ et $b_n = \sqrt{2\log(n)} - \dfrac{\log(\log(n))}{2\sqrt{2\log(n)}} - \dfrac{\log(4\pi)}{2\sqrt{2\log(n)}}$ pour n suffisament grand. On déduit de ce qui précède que

$$\frac{f(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(n^{-1}).$$

et de la question 1 que $\mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(n^{-1})$ et donc $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X \geq a_n x + b_n) = \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci implique que la loi gaussienne centrée réduite appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

5. On a, pour tout $n \geq 1$, $X_n = m + \sigma Y_n$, où les variables aléatoires $(Y_n, n \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a $M_n = m + \sigma N_n$ où $N_n = \max\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$. On déduit de la question précédente que $(\dfrac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers la loi de Gumbel, où $\tilde{a}_n = \sigma a_n$ et $\tilde{b}_n = m + \sigma b_n$.

$\triangle$

Exercice 3 (Intervalle de confiance pour un quantile extrême).

1. On a
$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\, du = \int_x^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{u^2}\, du - \int_x^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{u^2(1+u^2)}\, du = \frac{1}{\pi x} + O(x^{-3}).$$
Comme $\displaystyle\int_{z_n}^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{c}{n}$, on en déduit $z_n = \dfrac{n}{c\pi} + o(n^{-1})$.

2. On a $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X_1 > x) = \int_x^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{\pi x} + O(x^{-3})$. La fonction $L(x) = x\bar{F}(x)$ est à variation lente car $\lim_{x\to\infty} L(x) = 1/\pi$. La loi de Cauchy appartient au bassin d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre 1 (le paramètre de la loi de valeurs extrêmes généralisée correspondant est $\xi = 1$). De plus, on a pour $x > 0$
$$\mathbb{P}(\pi M_n/n \leq x) = (1 - \mathbb{P}(X_1 > nx/\pi))^n = (1 - \frac{1}{nx} + O(n^{-3}))^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x^{-1}}.$$
Donc la suite $(\pi M_n/n, n \geq 1)$ converge en loi vers Z de loi de Fréchet de paramètre 1.

3. On a $\dfrac{\hat{z}_n}{z_n} = \dfrac{\pi M_n}{n}\dfrac{n}{c\pi z_n}$. Par le théorème de Slutsky, on obtient que $(\dfrac{\hat{z}_n}{z_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers Z. Soit $\gamma_1 = 1/\log(2/r)$ et $\gamma_2 = 1/\log(2/(2-r))$ les quantiles d'ordre $r/2$ et $1 - r/2$ de la loi de Fréchet de paramètre 1. On a
$$\mathbb{P}\left(z_n \in \left[\frac{\hat{z}_n}{\gamma_2}, \frac{\hat{z}_n}{\gamma_1}\right]\right) = \mathbb{P}(\hat{z}_n/z_n \in [\gamma_1, \gamma_2]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \in [\gamma_1, \gamma_2]) = 1 - r.$$
On en déduit que $I_n = \left[\dfrac{\hat{z}_n}{\gamma_2}, \dfrac{\hat{z}_n}{\gamma_1}\right]$ est un intervalle de confiance pour z_n de niveau asymptotique $1 - r$. La largeur de l'intervalle de confiance est de l'ordre de $\hat{z}_n$, c'est-à-dire de l'ordre de n. La largeur de l'intervalle de confiance est du même ordre que ce que l'on cherche à estimer !

4. On note F la fonction de répartition de la loi de X_n et $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X_1 > x)$. On suppose que F appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet de paramètre $\alpha > 0$. On a $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, où L est une fonction à variation lente. On pose a_n le quantile d'ordre $1 - 1/n$ de F. En particulier $(M_n/a_n, n \geq 1)$ converge en loi vers Z de loi de Fréchet de paramètre α.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{a_n} = c^{-1/\alpha}$.

Par définition des quantiles, on a $\bar{F}(a_n) \leq \frac{1}{n} \leq \bar{F}(a_n^-)$ et $\bar{F}(z_n) \leq \frac{c}{n} \leq \bar{F}(z_n^-)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme L est à variation lente, il existe M tel que pour tout $x > M$, on a $L(xc^{1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha}) \leq L(x)(1+\varepsilon)$ et $L(xc^{-1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha}) \leq L(x)(1+\varepsilon)$. Comme $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$, il vient pour n suffisament grand :

$$\bar{F}(c^{1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha} z_n) = \frac{z_n^{-\alpha}}{c(1+\varepsilon)} L(c^{1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha} z_n) \leq \frac{1}{c}\bar{F}(z_n) \leq \frac{1}{n} \leq \bar{F}(a_n^-).$$

Ceci implique que $c^{1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha} z_n \geq a_n$. On a également pour n suffisament grand

$$\bar{F}(c^{-1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha} a_n) = \frac{ca_n^{-\alpha}}{1+\varepsilon} L(c^{-1/\alpha}(1+\varepsilon)^{1/\alpha} a_n) \leq c\bar{F}(a_n) \leq \frac{c}{n} \leq \bar{F}(z_n^-).$$

Ceci implique que $a_n \geq c^{1/\alpha}(1+\varepsilon)^{-1/\alpha} z_n$. On en déduit donc que $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{a_n} = c^{-1/\alpha}$.

Le théorème de Slutsky implique alors que $(\frac{\hat{z}_n}{z_n}, n \geq 1)$ converge en loi vers Z. Soit γ_1 et γ_2 les quantiles d'ordre $r/2$ et $1 - r/2$ de la loi de Fréchet de paramètre α. On a

$$\mathbb{P}\left(z_n \in \left[\frac{\hat{z}_n}{\gamma_2}, \frac{\hat{z}_n}{\gamma_1}\right]\right) = \mathbb{P}(\hat{z}_n/z_n \in [\gamma_1, \gamma_2]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \in [\gamma_1, \gamma_2]) = 1 - r.$$

On en déduit que $I_n = \left[\frac{\hat{z}_n}{\gamma_2}, \frac{\hat{z}_n}{\gamma_1}\right]$ est un intervalle de confiance pour z_n de niveau asymptotique $1 - r$. La largeur de l'intervalle de confiance est de l'ordre de $\hat{z}_n$, c'est-à-dire de l'ordre de z_n.

△

Exercice 4 (Fonction de répartition sur $\mathbb{R}^2$).

1. On a
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) = -e^{-x-y} < 0 \quad \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0.$$
Donc H ne peut pas définir de mesure positive.
2. On a
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
et
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy = 1.$$
Donc H est bien la fonction de répartition d'une loi de probablité bivariée. Les marginales sont données par
$$\begin{aligned} F(x) &= H(x, \infty) = 1 - e^{-x} \\ G(y) &= H(\infty, y) = 1 - e^{-y} - ye^{-y}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Exercice 5 (Encadrement du prix d'une option "quanto").

1. La règle d'évaluation risque neutre dans le marché domestique donne le prix sous la forme $e^{-r^d T}\,\mathbb{E}^d\left[\underline{X}(K-S_T)^+\right]$. Le changement de numéraire le transforme en

$$X_0\,e^{-r^f T}\,\mathbb{E}^f\left[\frac{\underline{X}}{X_T}(K-S_T)^+\right].$$

2. On remarque que

$$x(K-y)^+ = \int_0^\infty du \;\; \mathbf{1}_{\{u\le x\}} \;\; \int_0^K dv \;\; \mathbf{1}_{\{y\le v\}}$$

et il suffit ensuite d'appliquer le théorème de Fubini.

3. On remarque que

$$e^{r^f T}\,\mathrm{Put}^S(T,K) = \mathbb{E}^f\left[(K-S_T)^+\right] = \int_0^K \mathbb{Q}^f\left(S_T\le x\right)dx$$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Put}^X(T,K) &= e^{-r^d T}\,\mathbb{E}^d\left[(K-X_T)^+\right] \\
&= e^{-r^d T}\,\mathbb{E}^d\left[K X_T\left(\frac{1}{X_T}-\frac{1}{K}\right)^+\right] \\
&= K X_0\,e^{-r^f T}\,\mathbb{E}^f\left[\left(\frac{1}{X_T}-\frac{1}{K}\right)^+\right] \\
&= K X_0\,e^{-r^f T}\int_{1/K}^\infty \mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T}\ge x\right)dx
\end{aligned}$$

D'où en dérivant par rapport à K,

$$\mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T}\ge\frac{1}{K}\right) = \frac{e^{r^f T}}{X_0}\left[K\frac{\partial \mathrm{Put}^X}{\partial K}(T,K) - \mathrm{Put}^X(T,K)\right]$$

5. Le prix de l'option quanto est donnée par

$$\begin{aligned}
&X_0\,e^{-r^f T}\int_0^\infty du\int_0^K dv\;\;\mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T}\ge\frac{u}{\underline{X}};S_T\le v\right) \\
&= \;\; X_0\,e^{-r^f T}\int_0^\infty du\int_0^K dv\;\;\mathbb{Q}^f\left(S_T\le v\right)-\mathbb{Q}^f\left(\frac{1}{X_T}\le\frac{u}{\underline{X}};S_T\le v\right) \\
&= \;\; X_0\,e^{-r^f T}\int_0^\infty du\int_0^K dv\;\;e^{r^f T}\frac{\partial \mathrm{Put}^S}{\partial K}(T,v) \\
&\qquad -C\left(1-\frac{e^{r^f T}}{X_0}\left[\frac{\underline{X}}{u}\frac{\partial \mathrm{Put}^X}{\partial K}\left(T,\frac{\underline{X}}{u}\right)-\mathrm{Put}^X\left(T,\frac{\underline{X}}{u}\right)\right];e^{r^f T}\frac{\partial \mathrm{Put}^S}{\partial K}(T,v)\right)
\end{aligned}$$

La borne inférieure est donnée par

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{K} dv \quad \left(X_0 \, \mathrm{e}^{-r^f T} - \frac{\underline{\underline{X}}}{u} \frac{\partial \mathrm{Put}^X}{\partial K} \left(T, \frac{\underline{\underline{X}}}{u} \right) - \mathrm{Put}^X \left(T, \frac{\underline{\underline{X}}}{u} \right) - X_0 \frac{\partial \mathrm{Put}^S}{\partial K} (T, v) \right)^+$$

et la borne supérieure par

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{K} dv \quad \min \left(\frac{\underline{\underline{X}}}{u} \frac{\partial \mathrm{Put}^X}{\partial K} \left(T, \frac{\underline{\underline{X}}}{u} \right) - \mathrm{Put}^X \left(T, \frac{\underline{\underline{X}}}{u} \right); X_0 \frac{\partial \mathrm{Put}^S}{\partial K} (T, v) \right).$$

$\triangle$