Mesures de risques en finance (M2)

Mercredi 19 Décembre 2007 (9h00-12h00)

Seul document autorisé : une feuille manuscrite recto verso.

Les exercices sont indépendants. La notation log désigne le logarithme népérien : log(e) = 1.

Exercice 1 (Équivalent certain optimisé[1] et mesure de risque)**.**
Soit u une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ croissante et convexe. Comme la fonction u est convexe, elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point :

$$u'_+(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u(x+\varepsilon)-u(x)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad u'_-(x) = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{u(x+\varepsilon)-u(x)}{\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a $u'_+(x) \geq u'_-(x)$ avec égalité sauf en un nombre au plus dénombrable de points et $u(x+y) - u(x) = \int_0^y u'_-(z+x)\, dz = \int_0^y u'_+(z+x)\, dz$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. On suppose que

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad 1 \in [u'_-(0), u'_+(0)].$$

Soit X une variable aléatoire réelle bornée définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La variable X représente une perte future. Pour un investisseur de fonction d'utilité u, une perte instantanée d'un montant η plus une perte future d'un montant $X - \eta$ sont valorisés par $\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)]$. La fonction d'utilité permet de reproduire l'évaluation subjective d'une perte aléatoire future. On note $\rho(X)$ l'**équivalent certain optimisé** de la perte future X défini par

$$\rho(X) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \left(\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)] \right). \tag{1}$$

1. Vérifier que $u(x) \geq x$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que pour $m \in \mathbb{R}$, on a $\rho(m) = m$.
2. Vérifier que ρ est :
   (a) invariant par translation ($\rho(X+m) = \rho(X) + m$ pour $m \in \mathbb{R}$),
   (b) monotone ($\rho(X) \leq \rho(Y)$ si $X \leq Y$),
   (c) invariante pour la loi ($\rho(X) = \rho(Y)$ si X et Y ont même loi),
   (d) convexe ($\rho(\theta X + (1-\theta)Y) \leq \theta\rho(X) + (1-\theta)\rho(Y)$ pour $\theta \in [0,1]$).
3. Donner l'ensemble des positions acceptables pour ρ.
4. Montrer que ρ est sur-homogène : pour $\lambda \in [0,1]$ $\lambda\rho(X) \geq \rho(\lambda X)$, et pour $\lambda \geq 1$, $\lambda\rho(X) \leq \rho(\lambda X)$. Quel est l'intérêt de cette propriété.
5. Montrer que si $u(x) = \gamma_+ \max(x,0) + \gamma_- \min(x,0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \gamma_- \leq 1 \leq \gamma_+$, alors ρ est cohérente.
6. Montrer que pour $u(x) = \gamma_+ \max(x,0)$, $\gamma_+ > 1$, on retrouve $\rho = \mathrm{AVaR}_\alpha$. On identifiera γ_+ en fonction de α.

[1] A. Ben-Tal and M. Teboulle. *An old-new concept of convex risk measures : the optimized certainty equivalent*, Math. Finance, Vol 17, pp. 449–476 (2007).

On note Δ_X est le plus petit intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$.

7. Montrer que si $x\eta \leq 0$ alors on a $\eta + u(x-\eta) \geq u(x)$. En déduire que pour X non constant
$$\rho(X) = \inf_{\eta \in \Delta_X} (\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)]) .$$
8. Soit $\beta > 0$. Pour $u(x) = (x + \beta x^2)\mathbf{1}_{\{2\beta x \geq -1\}} - \frac{1}{4\beta}\mathbf{1}_{\{2\beta x < -1\}}$ exprimer $\rho(X)$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$ quand Δ_X est de longueur inférieure à $1/(2\beta)$.
9. On suppose u de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et strictement convexe. Soit $x \neq 0$ et X_p de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ ($\mathbb{P}(X_p = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_p = 0) = p$). Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\rho(xX_p) \leq pu(x)$. Puis, montrer que $\lim_{p \downarrow 0} \rho(xX_p)/p = u(x)$. Cette formule permet de retrouver la fonction d'utilité à partir de la mesure de risque.

△

Exercice 2 (Loi de valeurs extrêmes associée à la loi gamma).
On considère une suite de variables aléatoires, $(X_n, n \geq 1)$, indépendantes de loi gamma de paramètre $(\alpha, \lambda) \in]0, \infty[^2$ et de densité
$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
où $\Gamma(\alpha) = \int_{]0,\infty[} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \, dx$. On note $M_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$.

1. Pour $x > 0$, montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que
$$\left| \mathbb{P}(X_1 > x) - \frac{f(x)}{\lambda} \right| \leq \frac{|\alpha - 1|}{\lambda} \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x}. \tag{2}$$
2. Soit $c > 0$. Montrer que si $z(n)$ est la plus grande solution de $\dfrac{f(z)}{\lambda} = \dfrac{c}{n}$, alors on a le développement limité suivant (pour n grand) :
$$\lambda z(n) = \log(n) + (\alpha - 1)\log(\log(n)) - \log(\Gamma(\alpha)) - \log(c) + h(n),$$
où $\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$.
3. Exhiber une suite $((a_n, b_n), n \geq 1)$ particulière, telle que $((M_n - b_n)/a_n, n \geq 1)$ converge en loi vers la loi de Gumbel.
4. Vérifier que $\mathbb{P}(X_1 > x) = (\lambda x)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} L(x)$, où L est une fonction à variations lentes en $+\infty$.
5. Soit L une fonction à variations lentes en $+\infty$. Montrer que si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoie réelle et $\bar{F}(x) = (\lambda x)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} L(x)$, avec $\bar{F} = 1 - F$, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, alors la loi de fonction de répartition F est dans le domaine d'attraction, pour le maximum renormalisé, de la loi de Gumbel.

△

Exercice 3 (Méthode POT pour l'estimation du paramètre de la loi de valeurs extrêmes).
Soit $X = (X_k, k \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de fonction de répartition F. On note $x_F = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq 1\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

On pose $\bar{F} = 1 - F$. Le but de cet exercice est de présenter une méthode pour estimer l'indice de la loi de valeurs extrême associée à F, qui repose sur les dépassements de seuils : méthode POT ("pick over a treshold"). Par simplicité, on supposera que F est de classe C^1 de dérivée f (f est la densité de la loi de X_1).

On rappelle que pour une variable aléatoire de Poisson N de paramètre $\theta > 0$, on a $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\theta^k}{k!} \mathrm{e}^{-\theta}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $N_{u,n} = \text{Card } \{k \in \{1, \ldots, n\}; X_k > u\}$ suit un loi binomiale dont on précisera les paramètres. Soit $(u_n, n \in \mathbb{N})$ telle que $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \theta > 0$. Montrer que $N_{u_n,n}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre θ.

On note $k_{1,u} = \inf\{k \geq 1; X_k > u\}$, $s_0 = 0$ et par récurrence pour $r \geq 2$, $s_{r-1} = s_{r-2} + k_{r-1,u}$ et $k_{r,u} = \inf\{k > s_{r-1}; X_k > u\}$. Ainsi $k_{r,u}$ correspond au r-ème dépassement de la valeur u pour la suite X.

2. Montrer que conditionnellement au nombre de dépassement, les dépassements sont indépendants et de même loi : plus précisément, conditionnellement à $N_{u,n} = r$, les variables aléatoires $X_{k_{1,u}}, \ldots, X_{k_{r,u}}$ sont indépendantes de même loi dont on précisera la densité.

On note H_ξ la fonction de répartition de la loi de valeurs extrêmes généralisées de paramètre $\xi \in \mathbb{R}$: $H_\xi(x) = \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi})$ pour $1 + \xi x > 0$. On note $G_\xi(x) = 1 + \log(H_\xi(x))$ pour $x > 0$ et $1 + \xi x > 0$.

On suppose que F appartient au domaine d'attraction de H_ξ pour la convergence en loi du maximum renormalisé.

3. Vérifier que G_ξ est une fonction de répartition. (Il s'agit de la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée.)
4. Montrer qu'il existe une fonction $a : u \mapsto a(u) > 0$ telle que $(X_{k_{1,u}} - u)/a(u)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition G_ξ quand u tend vers x_F par valeurs inférieures.
5. Proposer une méthode pour estimer ξ. À quels problèmes peut-on s'attendre ?
6. Soit $Y = (Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition G_ξ. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta > 0$. On pose $M = \max_{1\leq i\leq N} Y_i$. Montrer que $(M - b)/a$ a pour fonction de répartition H_ξ, pour des valeurs de a et b que l'on explicitera.

$\triangle$

Exercice 4 (Mesure de risque vectorielle).
On se fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sans atomes. Pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^d$, on note par $x \cdot y$ leur produit scalaire et on dit que $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. La base canonique de $\mathbb{R}^d$ est notée $(e_1, \ldots, e_d)$. On notera $L^\infty_d(\mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui sont bornées presque sûrement.

On définit une mesure de risque *vectorielle* (monétaire) convexe comme une application ρ de $L^\infty_d(\mathbb{P})$ à valeurs réelles telle que

(i) $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
(ii) pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $i = 1, \ldots, d$, $\rho(X + me_i) = m + \rho(X)$
(iii) pour tout $\alpha \in (0, 1)$, $\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y)$.

1. Soit ρ_1 une mesure de risque (monétaire) convexe. Parmi les applications suivantes définies pour $X = (X_1 \ldots, X_d) \in L_d^\infty(\mathbb{P})$, lesquelles sont des mesures de risques vectorielles convexes ?
   (a) $\rho(X) = \rho_1 \left(\sum_{i=1}^d X_i\right)$
   (b) $\rho(X) = \rho_1(\max_{1\leq i\leq d} X_i)$

Soit $Z \in L_d^\infty(\mathbb{P})$ telle que $Z \geq 0$ et $\mathbb{E}Z_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. On définit

$$\Psi_Z(X) = \mathbb{E}\left\{X \cdot Z\right\}$$

2. Montrer que Ψ_Z est une mesure de risque vectorielle convexe.

On note $X \sim X'$ si X et X' ont même lois. On dit qu'une mesure de risque est invariante en loi si $X \sim X' \Rightarrow \rho(X) = \rho(X')$.

3. Montrer que Ψ_Z est invariante en loi si et seulement si $Z_i = 1$ p.s. pour tout $i = 1, \ldots, d$.
4. On dit que Y domine X, et on note $X \preceq Y$, si pour tout fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bornée et croissante (c'est-à-dire $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), on a $\mathbb{E}\left\{f(X)\right\} \leq \mathbb{E}\left\{f(Y)\right\}$.
   (a) Montrer que si $X \preceq Y$, alors il existe un couple de vecteurs aléatoires $(X', Y') \sim (X, Y)$ tel que $X' \leq Y'$ p.s.
   [Indication : on commencera par le cas $d = 1$, puis on étendra au cas général en utilisant une copule.]
   (b) Montrer que pour toute mesure de risque vectorielle convexe et invariante en loi, on a

$$X \preceq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

On pose

$$\widehat{\Psi}_Z(X) = \sup_{X' \sim X} \mathbb{E}\left\{X' \cdot Z\right\}.$$

5. Montrer que $\widehat{\Psi}_Z$ est une mesure de risque vectorielle convexe et qu'elle est invariante en loi.
   [Indication : On admettra que si $V \sim \alpha X + (1-\alpha)Y$, alors il existe un couple de vecteurs aléatoires $(X', Y') \sim (X, Y)$ tel que $V = \alpha X' + (1-\alpha)Y'$ p.s.]
6. Montrer que $\widehat{\Psi}_Z(X) = \sup_{X' \sim X, Z' \sim Z} \mathbb{E}\left\{X' \cdot Z'\right\}$.
   [Indication : On admettra le résultat suivant : si (X', Z') est un couple de vecteurs aléatoires tel que $X' \sim X$ et $Z' \sim Z$, alors il existe un vecteur aléatoire tel que $X'' \sim X$ et $(X'', Z) \sim (X', Z')$.]
7. Supposons que $d = 1$. On note F et G les fonctions de répartition de X et de Z respectivement.
   (a) Supposons ici que $X \geq 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left\{XZ\right\} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 1 - F(u) - G(v) + C(F(u), G(v)) du dv$$

   où C est une copule du couple (X, Z).
   (b) Toujours sous l'hypothèse $X \geq 0$, en déduire que

$$\widehat{\Psi}_Z(X) = \int_0^1 F^{-1}(u) G^{-1}(u) du.$$

   (c) Montrer que (b) est vraie pour X de signe quelconque.

△

Correction

Exercice 1 (Équivalent certain optimisé et mesure de risque).

1. Pour $x > 0$, en utilisant que u'_+ est croissante, on a $u(x) = \int_0^x u'_+(z)\ dz \geq \int_0^x u'_+(0)\ dz \geq x$. Pour $x < 0$, en utilisant que u'_- est croissante, on a $-u(x) = \int_x^0 u'_-(z)\ dz \leq \int_x^0 u'_-(0)\ dz \leq -x$. Soit $u(x) \geq x$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a $\rho(m) \leq m + \mathbb{E}[u(0)] = m$ (prendre $\eta = m$ dans (1)). Par ailleurs, comme $u(X - \eta) \geq X - \eta$, il vient

$$\rho(X) \geq \inf_{\eta \in \mathbb{R}} (\eta + \mathbb{E}[X - \eta]) = \mathbb{E}[X].$$

   Il vient $\rho(m) \geq m$ et donc $\rho(m) = m$.

2. (a) est évident. (b) découle de la croissance de u. (c) est vrai car $\mathbb{E}[u(X - \eta)]$ ne dépend que de la loi de X. Pour (d), en utilisant la convexité de u, il vient pour $\theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\rho(\theta X + (1-\theta)Y) &= \inf_{\eta \in \mathbb{R}} (\eta + \mathbb{E}[u(\theta X + (1-\theta)Y - \eta)]) \\
&= \inf_{\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}} \Big(\theta\eta_1 + (1-\theta)\eta_2 + \mathbb{E}[u(\theta(X - \eta_1) + (1-\theta)(Y - \eta_2))]\Big) \\
&\leq \inf_{\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}} \Big(\theta(\eta_1 + +\mathbb{E}[u(X - \eta_1)]) + (1-\theta)(\eta_2 + \mathbb{E}[u(Y - \eta_2)])\Big) \\
&= \theta \inf_{\eta_1 \in \mathbb{R}} \Big(\eta_1 + +\mathbb{E}[u(X - \eta_1)]\Big) + (1-\theta) \inf_{\eta_2 \in \mathbb{R}} \Big(\eta_2 + \mathbb{E}[u(Y - \eta_2)]\Big) \\
&= \theta\rho(X) + (1-\theta)\rho(Y).
\end{aligned}$$

3. $\mathcal{A}_\rho = \{X; \rho(X) \leq 0\} = \{X; \exists \eta \in \mathbb{R}; \mathbb{E}[u(X - \eta)] + \eta \leq 0\}$.

4. Pour $\lambda \in [0, 1]$, par convexité et en utilisant $\rho(0) = 0$, il vient $\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(0) = \lambda\rho(X)$. Pour $\lambda \geq 1$, on a d'après ce qui précède $\rho(Y/\lambda) \leq \rho(Y)/\lambda$. Prendre $X = Y/\lambda$ pour obtenir $\lambda\rho(X) \leq \rho(\lambda X)$.

5. La fonction u est convexe. Les fonctions $x \mapsto \max(x, 0)$ et $x \mapsto \min(x, 0)$ sont positivement homogènes et donc u aussi. On a donc

$$\rho(\lambda X) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \Big(\eta + \lambda\mathbb{E}[u(X - \frac{\eta}{\lambda})]\Big) = \lambda \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \Big(\frac{\eta}{\lambda} + \mathbb{E}[u(X - \frac{\eta}{\lambda})]\Big) = \lambda\rho(X).$$

   La mesure de risque est croissante, invariante par translation, convexe et positivement homogène ; elle est donc cohérente.

6. On a $\rho(X) = \gamma_+ \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \Big(\frac{\eta}{\gamma_+} + \mathbb{E}[\max(X - \eta, 0)]\Big)$. On obtient, pour $\gamma_+ > 1$, que $\rho = \text{AVaR}_\alpha$ pour $\alpha = 1 - (1/\gamma_+)$.

7. Soit $x \geq 0$ et $\eta \leq 0$. On a $\eta + u(x - \eta) - u(x) = \eta + \int_x^{x-\eta} u_+(z) dz \geq \eta + \int_x^{x-\eta} u_+(0) dz \geq \eta - \eta = 0$. Le cas $x \leq 0$, $\eta \geq 0$ est similaire. Soit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $]a, b[\subset \Delta_X \subset [a, b]$. Si $b < +\infty$, $\eta > b$, on a $X - b \leq 0$ p.s. et $\eta - b \geq 0$. On en déduit que $\eta + u(X - \eta) \geq b + u(X - b)$. En particulier l'infimum de $\eta \mapsto \eta + \mathbb{E}[u(X - \eta)]$ est atteint sur $[-\infty, b]$, et par continuité,

on a $\rho(X) = \inf_{\eta<b}(\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)])$. Un raisonnement similaire assure que l'infimum est atteint sur $[a,\infty]$ et donc sur $[a,b]$ et par continuité de u, on a bien

$$\rho(X) = \inf_{\eta\in[a,b]}(\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)]) = \inf_{\eta\in]a,b[}(\eta + \mathbb{E}[u(X-\eta)])\,.$$

Ceci donne le résultat.

8. Comme Δ_X est de longueur inférieure à $1/(2\beta)$, on en déduit que pour $\eta \in \Delta_X$, on a p.s. $|X-\eta| \leq 1/(2\beta)$. Par conséquent, il vient

$$\rho(X) = \inf_{\eta\in\Delta_X}\left(\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[(X-\eta)^2]\right) = \mathbb{E}[X] + \beta\,\mathrm{Var}(X),$$

car comme $\mathbb{E}[(X-\eta)^2] = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}[X]-\eta)^2$, $\eta \mapsto \mathbb{E}[(X-\eta)^2]$ atteint son mimimum en $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X] \in \Delta_X$.

9. On a $\rho(xX_p) = \inf_{\eta\in[0,x]}(\eta + pu(x) + (1-p)u(-\eta))$. En particulier en prenant $\eta = 0$, on obtient que $\rho(pX_p) \leq pu(x)$.

On note $h_p(\eta) = \eta + pu(x) + (1-p)u(-\eta)$. La fonction h_p est strictement convexe, car sa dérivée seconde est stricement positive. Soit $x \neq 0$. On a si $x > 0$ (resp. $x < 0$) $h'_p(0) = p(1-u'(x)) < 0$ (resp. > 0) et $h'_p(x) = (1-p)(1-u'(-x)) > 0$ (resp. < 0), ce qui assure que le mimimum de h_p est atteint en un point unique $\eta^*_p \in]0,x[$ (resp. $\in]x,0[$). On a $h'_p(\eta^*_p) = 0$, soit

$$1 - pu'(x-\eta^*_p) - (1-p)u'(-\eta^*_p) = 0. \tag{3}$$

En faisant tendre p vers 0, on en déduit que $u'(-\eta^*_p)$ tend vers 1, soit η^*_p tend vers 0. En faisant un développement limité de (3), on obtient

$$1 - pu'(x) - (1-p) + (1-p)u''(0)\eta^*_p + o(\eta^*_p) = 0.$$

On en déduit que $\eta^*_p = \dfrac{p(1-u'(x))}{u''(0)} + o(p)$. On en déduit le développement limité de $\rho(xX_p)$ suivant en p :

$$\rho(xX_p) = h_p(\eta^*_p) = \eta^*_p + pu(x-\eta^*_p) + (1-p)u(-\eta^*_p) = \eta^*_p + pu(x) - \eta^*_p + o(p) = pu(x).$$

Ceci assure $\lim_{p\downarrow 0}\rho(xX_p)/p = u(x)$.

△

Exercice 2 (Loi de valeurs extrêmes associée à la loi gamma).

1. À l'aide d'une intégration par partie, il vient

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{\alpha-1}{\lambda}\int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy. \tag{4}$$

On obtient l'inégalité recherché en remarquant que $\displaystyle\int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy \leq x^{-1}\int_x^\infty f(y)\,dy = x^{-1}\mathbb{P}(X > x)$.

2. Pour n suffisament grand, comme la densité f est continue et tend vers 0 à l'infini, il existe z tel que $\dfrac{f(z)}{\lambda} = \dfrac{c}{n}$, soit en posant $a = \log(c) + \log(\Gamma(\alpha)$

$$(\alpha - 1)\log(\lambda z) - \lambda z + \log(n) = a. \tag{5}$$

Comme $z(n)$ est la plus grande racine de l'équation, on en déduit que $z(n)$ tend vers l'infini avec n, et donc $\lambda z(n) = \log(n) + h_1(n)$ avec $h_1(n) = o(\log(n))$. En utilisant (5), il vient

$$(\alpha - 1)\log(\log(n)) - h_1(n) = a - \log(1 + h_1(n)/\log(n)).$$

On en déduit que $h_1(n) = (\alpha - 1)\log(\log(n)) - a + h_2(n)$, avec $h_2(n) = o(1)$. Ce qui démontre le résultat cherché.

3. On choisit $a_n = 1/\lambda$ et $b_n = (\log(n) + (\alpha - 1)\log(\log(n)) - \log(\Gamma(\alpha)))\,/\lambda$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et n qui tend vers l'infini, on obtient le développement suivant :

$$\frac{f(a_n x + b_n)}{\lambda} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\log(x+\lambda b_n)-(x+\lambda b_n)} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(1/n).$$

On a aussi d'après (2) que

$$\mathbb{P}(X > a_n x + b_n) = \frac{f(a_n x + b_n)}{\lambda} + \mathbb{P}(X > a_n x + b_n) O(1/\log(n)) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(1/n).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leq x) = (1 - \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n))^n &= \exp\left(n\log\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(1/n)\right)\right)\\ &= \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) + o(1).\end{aligned}$$

On en déduit que $((M_n - b_n)/a_n, n \geq 1)$ converge en loi vers la loi de Gumbel.

4. D'après (4), on a $\bar{F}(x) = \lambda^{-1} f(x)[1 + G(x)]$, où $G(x) = (\alpha - 1) f(x)^{-1} \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\, dy$. Comme $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$, cela implique que $1 + G(x)$ est à variations lentes en $+\infty$. on en déduit le résultat.

5. On résoud dans un premier temps l'équation $\bar{F}(z) = c/n$, en cherchant une racine qui tende vers l'infini avec n. On obtient $z(n)$ solution de

$$(\alpha - 1)\log(\lambda z) - \lambda z + \log(n) + \log(L(z(n)) = \log(c).$$

On en déduit $\lambda z(n) = \log(n) + h_1(n)$ avec $h_1(n) = o(\log(n))$. Il vient

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)&\log(\log(n)) - h_1(n) + \log(L(\log(n)))\\ &= a - \log(1 + h_1(n)/\log(n)) - \log\left(\frac{L((\log(n) + h_1(n))/\lambda)}{L(\log(n))}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de représentation des fonctions à variations lentes, il est facile de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\log(n)(1 + o(1))/\lambda)}{L(\log(n))} = 1. \tag{7}$$

On déduit de (6) que $h_1(n) = \gamma(n) - a + o(1)$ avec

$$\gamma(n) = (\alpha - 1)\log(\log(n)) + \log(L(\log(n))).$$

On pose $a_n = 1/\lambda$ et $b_n = (\log(n) + \gamma(n))/\lambda$. On en déduit, en utilisant (7)

$$\begin{aligned}\frac{\bar{F}(a_n x + b_n)}{n} &= \mathrm{e}^{(\alpha-1)\log(\log(n)+\gamma(n)+x) - x - \log(n) - \gamma(n) + \log(L(\log(n))}\,\frac{L((\log(n) + \gamma(n) + x)/\lambda)}{L(\log(n))} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} + o(1/n),\end{aligned}$$

Ceci assure que la loi de fonction de répartition F est dans le domaine d'attraction, pour le maximum renormalisé, de la loi de Gumbel.

$\triangle$

Exercice 3 (Méthode POT).

1. La loi de $N_{u,n}$ est la loi binomiale de paramètre $(n, \bar{F}(u))$. La fonction caractéristique de la loi $N_{u_n,n}$ est $\psi_n(v) = (1 - \bar{F}(u_n) + \bar{F}(u_n)\,\mathrm{e}^{iv})^n$. Par passage à la limite, on a $\psi_n(v) \to \mathrm{e}^{-\theta(1-\exp(iv))}$, qui est la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre θ. Ceci assure la convergence en loi.
2. On pose $Y_j = X_{k_j,u}$. On a pour g bornée mesurable $\mathbb{E}[g(Y_1, \ldots, Y_r)|N_{u,n} = r]$ égal à

$$\frac{\sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \mathbb{E}[g(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})\mathbf{1}_{\{X_j \leq u, \text{pour } j \notin \{i_1,\ldots,i_r\}\}}\mathbf{1}_{\{X_{i_1} > u, \ldots, X_{i_r} > u\}}]}{\sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \mathbb{P}(X_j \leq u, \text{pour } j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}, \text{ et } X_{i_1} > u, \ldots, X_{i_r} > u)}.$$

Les variables aléatoires $(X_k, k \geq 1)$ sont de même loi et indépendantes, elles sont donc échangeables et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Y_1, \ldots, Y_r)|N_{u,n} = r] &= \frac{\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_r)\mathbf{1}_{\{X_j \leq u, \text{pour } j > r\}}\mathbf{1}_{\{X_1 > u, \ldots, X_r > u\}}]}{\mathbb{P}(X_j \leq u, \text{pour } j > r, \text{ et } X_1 > u, \ldots, X_r > u)} \\ &= \int g(y_1, \ldots, y_r) \prod_{i=1}^{r} \frac{f(y_r)}{\bar{F}(u)} \mathbf{1}_{\{y_r > u\}}\, dy_1 \ldots dy_r.\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat.
3. La fonction G_ξ est croissante continue (sauf en $1 + \xi x = 0$, si $\xi < 0$, où il faut prendre G continue à droite), et $\lim_{x\to-\infty} G_\xi(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} G_\xi(x) = 1$.
4. Comme F est dans le domaine d'attraction de H_ξ, il existe une fonction mesurable a positive telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 + \xi x > 0$, $\displaystyle\lim_{u\to x_F^-} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = (1 + \xi x)^{-1/\xi}$.

On a pour tout $1 + \xi x > 0$,

$$\mathbb{P}((X_{k_1,u} - u)/a(u) \leq x | X > u) = 1 - \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} \xrightarrow[n\to\infty]{} G_\xi(x).$$

Ceci assure que $(X_{k_1,u} - u)/a(u)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition G_ξ quand u tend vers x_F par valeurs inférieures.

5. La méthode POT consiste a se fixer un niveau u est estimer les paramètres de la loi G_ξ sur les dépassements. Le choix de u pose problème : u grand donne une bonne estimation de ξ (car on est dans le régime asymptotique pour la loi des dépassements) mais beaucoup de bruit (car peu de données), u petit donne une mauvaise estimation de ξ (car on est loin du régime asymptotique pour la loi des dépassements) et on peut avoir un biais important, mais peu de bruit (car beaucoup de données).
6. On pose $a = \theta^\xi$ et $b = (\theta^\xi - 1)/\xi$. il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((M-b)/a \leq x) = \mathbb{P}(M \leq ax+b) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y_1 \leq ax+b)^k \mathbb{P}(N=k) \\ &= \mathrm{e}^{-\theta+\theta G_\xi(ax+b)} \\ &= \mathrm{e}^{-\theta(1+\xi(ax+b))^{-1/\xi}} \\ &= H_\xi(x).\end{aligned}$$

△

Exercice 4 (Mesure de risque vectorielle)**.**

1. (a) est une mesure de risque vectorielle convexe. En effet, $X \leq Y$ implique que $\sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n Y_i$ et la croissance de ρ_1 donne (i). $\sum_{i=1}^n (X+me_k)_i = \sum_{i=1}^n X_i + m$ et l'invariance par translation de ρ_1 donne (ii). $\alpha\sum_{i=1}^n X_i + (1-\alpha)\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \alpha X_i + (1-\alpha)Y_i$ et la convexité de ρ_1 donne (iii).

   (b) ne satisfait pas (ii).
2. Comme $Z \geq 0$, si $X \leq Y$, alors $X \cdot Z \leq Y \cdot Z$ et (i) est vraie pour Ψ_Z. D'autre part, $(X+me_i)\cdot Z = X\cdot Z + mZ_i$ et (ii) est vraie car $\mathbb{E}Z_i = 1$. La convexité (iii) est immédiate.
3. Il est évident que si $Z_i = 1$ p.s. pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors Ψ_Z est invariante en loi. Réciproquement, si Ψ_Z est invariante en loi, alors en prenant $X' \sim X$ indépendant de Z, on obtient

$$\mathbb{E}\{X \cdot Z\} = \mathbb{E}X \cdot 1$$

   où 1 est un vecteur de 1. Ce qui se réécrit encore

$$\mathbb{E}\{X \cdot (Z-1)\} = 0.$$

   On conclut en prenant $X_i = \mathbf{1}_{\{Z_i>1\}}$.
4. (a) En prenant les fonctions $f_i(x) = \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(x_i)$, on voit que si $X \preceq Y$ alors la fonction de répartition de X_i est en dessous de celle de Y_i. En d'autres termes $F_{X_i}(x) \leq F_{Y_i}(x)$ pour tout x. On en déduit aussi que $F_{X_i}^{-1}(u) \leq F_{Y_i}^{-1}(u)$ pour tout $u \in [0,1]$.
   Soit C une copule du vecteur aléatoire X. Soit U un vecteur de variables aléatoires uniformes sur [0,1] de loi donnée par C. Le couple (X', Y') défini comme suit répond à la question.

$$\begin{aligned} X' &= (F_{X_1}^{-1}(U_1), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U_n)) \\ Y' &= (F_{Y_1}^{-1}(U_1), \ldots, F_{Y_n}^{-1}(U_n)). \end{aligned}$$

(b) D'après (a), il existe $(X', Y') \sim (X, Y)$ tel que $X' \leq Y'$. Par invariance en loi et (ii), nous obtenons

$$\rho(X) = \rho(X') \leq \rho(Y') = \rho(Y).$$

5. On pose

$$\widehat{\Psi}_Z(X) = \sup_{X' \sim X} \mathbb{E}\left\{X' \cdot Z\right\}.$$

Il est évident que $\widehat{\Psi}_Z$ est invariante en loi. Montrons que c'est encore une mesure de risque vectorielle convexe.

Fixons $X \leq Y$ p.s. Y domine X au sens de la question 4, donc pour tout $X' \sim X$, il existe un $Y' \sim Y$ tel que $X' \leq Y'$ p.s. D'où, comme ρ satisfait (i),

$$\rho(X') \leq \rho(Y') \leq \sup_{Y' \sim Y} \rho(Y')$$

donc

$$\sup_{X' \sim X} \rho(X') \leq \sup_{Y' \sim Y} \rho(Y').$$

(ii) est évident.

Pour (iii),

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}_Z(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \sup_{V \sim \alpha X + (1-\alpha)Y} \mathbb{E}\{V \cdot Z\} \\
&= \sup_{(X', Y') \sim (X, Y)} \sup_{V = \alpha X' + (1-\alpha)Y'} \mathbb{E}\{V \cdot Z\} \\
&\leq \sup_{(X', Y') \sim (X, Y)} \mathbb{E}\{(\alpha X + (1-\alpha)Y) \cdot Z\} \\
&= \alpha \widehat{\Psi}_Z(X) + (1-\alpha)\widehat{\Psi}_Z(Y)
\end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{XY\} &= \mathbb{E} \int_0^X du \int_0^Z dv \\
&= \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{u \leq X, v \leq Z\}} du dv \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{u \leq X, v \leq Z\} du dv \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 1 - F(u) - G(v) + C(F(u), G(v)) du dv
\end{aligned}$$

où C est une copule du couple (X, Z).

(b) D'après l'inégalité de Fréchet,

$$\begin{aligned}
\sup_{X'\sim X, Z'\sim Z} \mathbb{E}\{XZ\} &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 1 - F(u) - G(v) + \min(F(u), G(v)) dudv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \min(1-F(u), 1-G(v)) dudv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{u \le F^{-1}(U), v \le G^{-1}(U)\} dudv \\
&= \mathbb{E}\left\{F^{-1}(U)G^{-1}(U)\right\} \\
&= \int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(u)du
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{X'\sim X} \mathbb{E}\{XZ\} \le \int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(u)du.$$

On a bien égalité puisque c'est atteint pour $X = F^{-1}(G(Z))$.

(c) Dans le cas où X est de signe quelconque, comme X est bornée on peut supposer que $a+X$ est positive pour un certain a. On note $F_a(x) = F(x-a)$ la fonction de repartition de $X+a$.

$$\begin{aligned}
a + \widehat{\Psi}_Z(X) &= \widehat{\Psi}_Z(a+X) \\
&= \int_0^1 F_a^{-1}(u)G^{-1}(u)du \\
&= \int_0^1 (a + F^{-1}(u))G^{-1}(u)du \\
&= a\int_0^1 G^{-1}(u)du + \int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(u)du \\
&= a\mathbb{E}Z + \int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(u)du
\end{aligned}$$

△