Mesures de risques en finance (M2)

Mercredi 10 Décembre 2008 (9h00-11h00)

Seul document autorisé : une feuille manuscrite recto verso.

Exercice 1 (Mesure de risque).
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\alpha \in]0,1[$. On considère la mesure de risque ρ_α définie sur $L^\infty(\mathbb{P}) = \{X \in \mathcal{F};\ \text{il existe } M \in]0,\infty[\text{ tel que } \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$ par

$$\rho_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)],$$

où $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est le quantile d'ordre α de la loi de X. On désire étudier les propriétés de la mesure de risque ρ_α. (On rappelle que $\mathrm{AVaR}_\alpha(X) \geq \rho_\alpha(X)$ en général avec égalité si $\mathbb{P}(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1 - \alpha$.)

1. Montrer que ρ_α est :
   (a) invariante par translation ($\rho_\alpha(X + m) = \rho_\alpha(X) + m$ pour $m \in \mathbb{R}$) ;
   (b) positivement homogène ($\rho_\alpha(\lambda X) = \lambda \rho_\alpha(X)$ pour $\lambda \geq 0$) ;
   (c) invariante pour la loi ($\rho_\alpha(X) = \rho_\alpha(Y)$ si X et Y ont même loi).
2. ρ_α est-elle pertinente ($\rho_\alpha(\mathbf{1}_A) > 0$ si $\mathbb{P}(A) > 0$) ?
3. Montrer, sous certaines hypothèses sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on précisera, que ρ_α n'est pas continue par dessus : i.e. trouver une suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ qui décroît vers X mais telle que $(\rho_\alpha(X_n), n \geq 1)$ ne décroisse pas vers $\rho_\alpha(X)$.
4. En considérant X, une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, et $Y = X + \mathbf{1}_{\{X=0\}}$, montrer que ρ_α n'est pas une mesure de risque monétaire.

△

Exercice 2 (Domaine d'attraction des lois de valeurs extrêmes).
On note $H(\xi)$ la fonction de répartition de la loi de valeurs extrêmes généralisée d'indice $\xi \in \mathbb{R}$:

$$H_\xi(x) = \mathrm{e}^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}, \quad \text{si } 1 + \xi x > 0.$$

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F. On pose $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. On suppose que F est la loi béta de paramètre $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. Sa densité est donnée par

   $$F'(x) = \beta(a,b)^{-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(x),$$

   où $\beta(a, b)$ est la constante de normalisation. Trouver, en fonction de a et b, une suite $((a_n, b_n), n \in \mathbb{N}^*)$, avec $a_n > 0$, et $\xi \in \mathbb{R}$ telle que la suite $((M_n - b_n)/a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition H_ξ.
2. On suppose qu'il existe suite $((a_n, b_n), n \in \mathbb{N}^*)$, avec $a_n > 0$, et $\xi \in \mathbb{R}$ telle que la suite $((M_n - b_n)/a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition H_ξ. On note $(X_{(1,n)}, \ldots, X_{(n,n)})$ la statistique d'ordre (croissante) de $(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $M_{k,n} = X_{(n-k,n)}$, de sorte que $M_{0,n} = M_n$. Soit k **fixé**. En considérant, $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > a_n x + b_n\}}$

avec $x \in \mathbb{R}$, montrer que $((M_{k,n} - b_n)/a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition

$$H_\xi(x) \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!}(-\log(H_\xi(x)))^r.$$

3. Vers quelle loi de valeurs extrêmes généralisée converge le maximum renormalisé de variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$.

$\triangle$

Exercice 3 (Mesure de concordance β de Blomqvist).

Soit X et Y des variables aléatoires ayant les fonctions de repartition *continues* F et G et soit C l'unique copule de (X,Y). La mesure de concordance appelée β de Blomqvist est définie par

$$\beta_{X,Y} = \mathbb{P}\big((X-\tilde{x})(Y-\tilde{y}) > 0\big) - \mathbb{P}\big((X-\tilde{x})(Y-\tilde{y}) < 0\big),$$

où $\tilde{x}$ est la médiane de X, c'est-à-dire, un nombre tel que $F(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$, et $\tilde{y}$ est la médiane de Y.

1. Montrer que $\beta_{X,Y}$ ne dépend que de la copule C. Donner son expression en fonction de C.
2. Soit (X,Y) un vecteur gaussien de corrélation ρ. Calculer $\beta_{X,Y}$.
3. Dans cette question on cherche à utiliser la connaissance de $\beta_{X,Y}$ pour obtenir des bornes plus précises sur la copule de (X,Y) que les bornes de Fréchet usuels $\max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min(u,v)$. Soit $\beta_{X,Y} = \beta$. On pose $\theta = C(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\beta+1}{4}$. On pose : pour

$$\begin{aligned}
u \in [0,\tfrac{1}{2}], v \in [0,\tfrac{1}{2}] :&\quad C_U(u,v) = \min(u,v,\theta), \quad C_L(u,v) = \max(0,u+v-1+\theta);\\
u \in [0,\tfrac{1}{2}], v \in [\tfrac{1}{2},1] :&\quad C_U(u,v) = \min(u,v-\tfrac{1}{2}+\theta), \quad C_L(u,v) = \max(0,u+v-1,u-\tfrac{1}{2}+\theta);\\
u \in [\tfrac{1}{2},1], v \in [0,\tfrac{1}{2}] :&\quad C_U(u,v) = \min(u-\tfrac{1}{2}+\theta,v), \quad C_L(u,v) = \max(0,u+v-1,v-\tfrac{1}{2}+\theta);\\
u \in [\tfrac{1}{2},1], v \in [\tfrac{1}{2},1] :&\quad C_U(u,v) = \min(u,v,u+v-1+\theta), \quad C_L(u,v) = \max(\theta,u+v-1).
\end{aligned}$$

   Montrer que :

$$C_L(u,v) \leq C(u,v) \leq C_U(u,v), \quad (u,v) \in [0,1]^2.$$

   On se contentera de démontrer la borne supérieure, la démonstration pour la borne inférieure étant similaire.

4. De la question 3 déduire les bornes sur le ρ de Spearman du couple (X,Y) en fonction de son β de Blomqvist (commencer par calculer la borne supérieure ; la borne inférieure s'obtient ensuite par symétrie).
5. On considere une option sur le minimum des actifs S^1 et S^2 de pay-off $h(S^1_T, S^2_T) = (K - \min(S^1_T, S^2_T))^+$. On suppose que les fonctions de repartition risque-neutres F et G de S^1 et S^2 ont été calibrées sur les prix d'options européennes sur S^1 et S^2, et que le β de Blomqvist de S^1 et S^2 a été estimé sur les données historiques.
   - Donner l'expression du prix p de l'option en fonction de F, G et de la copule risque-neutre C de S^1 et S^2.
   - En supposant que la valeur de β est la même sous la probabilité risque-neutre et sous la probabilité historique, donner les bornes sur p en fonction de la valeur de β (on ne demande pas d'obtenir l'expression explicite).

$\triangle$

Correction

Exercice 1 (Mesure de risque).

1. La mesure de risque VaR_α est invariante par translation, positivement homogène et invariante pour la loi. On en déduit que ρ_α vérifie les mêmes propriétés.
2. Comme $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{1}_A) \in \{0,1\}$ pour tout $\alpha \in]0,1[$, on en déduit que, pour $X = \mathbf{1}_A$, on a $X\mathbf{1}_{\{X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\}} = \mathbf{1}_A$ et $\mathbb{P}(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbf{1}_{\{\alpha \leq \mathbb{P}(A^c)\}}$. On a donc
$$\rho_\alpha(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{\{\alpha \leq \mathbb{P}(A^c)\}}\mathbb{P}(A) + \mathbf{1}_{\{\alpha > \mathbb{P}(A^c)\}}.$$
3. Il suffit de prendre une suite décroissante d'événements $(A_n, n \in \mathbb{N})$ telle que $\mathbb{P}(A_n) > 1-\alpha$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1-\alpha$. On a alors $\lim_{n\to\infty} \rho_\alpha(\mathbf{1}_{A_n}) = 1 > 1-\alpha = \rho_\alpha(\mathbf{1}_A)$, où $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. Il est important de remarquer qu'une telle suite n'existe pas si Ω possède un nombre fini d'atomes dont la probabilité totale est 1 (dans ce cas, il est facile de vérifier que ρ_α est continu par dessus).
4. On a $Y \geq X$. On suppose $0 < \mathbb{P}(X=0) < \alpha < \mathbb{P}(X \leq 1) < 1$. Alors on a
$$\rho_\alpha(X) = 1 + \frac{\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} > 1 + \mathbb{P}(X=2) = \rho_\alpha(Y).$$
La mesure de risque ρ_α n'est donc pas croissante. Ce n'est pas une mesure de risque monétaire.

△

Exercice 2 (Domaine d'attraction des lois de valeurs extrêmes).

1. Pour $x \in]0,1/2]$, on a $F'(1-1/x) = \beta(a,b)^{-1}(1-1/x)^{a-1}x^{1-b} = x^{1-b}L(x)$, où L est une fonction à variations lentes. On pose $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. On déduit des propriétés des fonctions à variations lentes que
$$\bar{F}(1-1/x) = \int_{1-1/x}^1 F'(u)\, du = \int_x^\infty F'(1-1/v)\, \frac{dv}{v^2} = \int_x^\infty v^{-b-1}L(v)\, dv \sim \frac{1}{b}\, x^{-b}L(b).$$
Ceci implique que F est dans le domaine d'attraction de la loi de Weibull de paramètre b autrement dit dans le domaine d'attraction de la loi $H_{-1/b}$. On pose $a_n = 1 - F^{-1}(1-1/n)$ et $b_n = 1$. La suite $((M_n - b_n)/a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers W de loi de Weibull de paramètre b. Comme $b(W+1)$ est de loi $H_{-1/b}$, on en déduit que la suite $((M_n - b'_n)/a'_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition $H_{-1/b}$, où $a'_n = a_n/b$ et $b'_n = b_n - a_n$.
2. On pose $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. La variable S_n est de loi binomiale de paramètre $(n, p_n = \bar{F}(a_n x + b_n))$. Par hypothèse $\lim_{n\to\infty} np_n = -\log H_\xi(x)$. On en déduit (en utilisant par exemple les fonctions caractéristiques) que S_n converge en loi vers la loi de Poisson Z de paramètre $\theta = -\log H_\xi(x)$. En particulier, comme $\{S_n \leq k\} = \{(M_{k,n} - b_n)/a_n \leq x\}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_{k,n} - b_n)/a_n \leq x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq k) = \mathbb{P}(Z \leq k) = \sum_{r=0}^k \frac{\theta^r}{r!}\, \mathrm{e}^{-\theta}.$$

On déduit donc que $((M_{k,n} - b_n)/a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition

$$H_\xi(x) \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!}(-\log(H_\xi(x)))^r.$$

3. Aucune, car le maximum d'une nombre suffisament grand de variables est constant et vaut n.

$\triangle$

Exercice 3. 1. En utilisant la continuité de X et Y,

$$\begin{aligned}
\beta_{X,Y} &= 2P[(X-\tilde{x})(Y-\tilde{y}) > 0] - 1 \\
&= 2P[X-\tilde{x} > 0, Y-\tilde{y} > 0] + 2P[X-\tilde{x} < 0, Y-\tilde{y} < 0] - 1 \\
&= 2(1 + 2P[X \leq \tilde{x}, Y \leq \tilde{y}] - P[X \leq \tilde{x}] - P[Y \leq \tilde{y}]) - 1 \\
&= 2(1 + 2C(F(\tilde{x}), G(\tilde{y})) - F(\tilde{x}) - G(\tilde{y})) - 1 \\
&= 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1.
\end{aligned}$$

2. On peut supposer sans perte de généralité que X et Y sont des v.a. gaussiennes centrées reduites, et donc $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$. Comme dans le cours, on pose $\phi = \arcsin\rho \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\beta_{X,Y} &= 2P[XY > 0] - 1 = 4P[X > 0, Y > 0] - 1 \\
&= 4P[X > 0, X\sin\phi + Z\cos\phi > 0] - 1,
\end{aligned}$$

où Z est indépendant de X et de loi $N(0,1)$. On a alors

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Z^2}}, \frac{Z}{\sqrt{X^2+Z^2}}\right) \stackrel{d}{=} (\sin\Phi, \cos\Phi),$$

où Φ est une v.a. uniforme sur $[-\pi, \pi]$. On en deduit

$$\begin{aligned}
\beta_{X,Y} &= 4P[\sin\Phi > 0, \cos(\Phi - \phi) > 0] - 1 \\
&= 4P[\Phi \in [0,\pi] \cap [\phi - \frac{\pi}{2}, \phi + \frac{\pi}{2}]] - 1 = \frac{2\phi}{\pi} = \frac{2}{\pi}\arcsin\rho.
\end{aligned}$$

Pour la copule gaussienne, le β de Blomqvist coïncide donc avec le τ de Kendall.

3. Nous demontrons la borne inférieure, la preuve pour la borne supérieure étant similaire. Soit (U,V) deux variables uniformes sur $[0,1]$ ayant C comme fonction de repartition.
   (a) Soit $(u,v) \in [0, \frac{1}{2}]^2$. Comme $C(u,v) = P[U \leq u, V \leq v]$, elle est croissante en chacun de ses arguments, d'où $C(u,v) \leq C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \theta$. Combinant cela avec la borne supérieure de Fréchet, on a $C(u,v) \leq \min(u,v,\theta) = C_U(u,v)$.
   (b) Soit $(u,v) \in [\frac{1}{2}, 1]^2$. Alors

$$\begin{aligned}
C(u,v) &= P[U > u, V > v] - 1 + u + v \\
&\leq P\left[U > \frac{1}{2}, V > \frac{1}{2}\right] - 1 + u + v \\
&= C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1 + u + v = \theta - 1 + u + v.
\end{aligned}$$

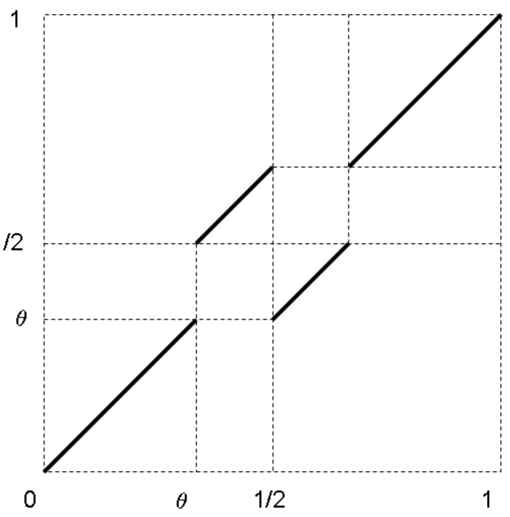

FIG. 1 – Support de la copule C_U.

En utilisant la borne de Fréchet, on en deduit $C(u,v) \leq \min(u, v, \theta - 1 + u + v) = C_U(u,v)$.

(c) Soit $(u,v) \in [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$. En utilisant (3b), on a $C(u,v) \leq C(\frac{1}{2}, v) \leq v + \theta - \frac{1}{2}$, d'où $C(u,v) \leq \min(u, v + \theta - \frac{1}{2}) = C_U(u,v)$.

(d) Le cas $(u,v) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ découle du cas précedent par symétrie.

4. Le ρ de Spearman est donné par

$$\rho = 12 \int_{[0,1]^2} C(u,v)dudv - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} uvdC(u,v) - 3,$$

d'où

$$12 \int_{[0,1]^2} uvdC_L(u,v) - 3 \leq \rho \leq 12 \int_{[0,1]^2} uvdC_U(u,v) - 3.$$

Le support de la mesure dC_U est présenté sur le graphique 1. On en déduit que

$$\int_{[0,1]^2} f(u,v)dC(u,v) = \int_0^\theta f(u,u)du + \int_\theta^{\frac{1}{2}} f(u, u + \frac{1}{2} - \theta)du + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\theta} f(u, u - \frac{1}{2} + \theta)du + \int_{1-\theta}^1 f(u,u)du$$

pour toute fonction $f(u,v)$ (pour verifier cela directement, prendre $f(u,v) = 1_{u \leq u_0, v \leq v_0}$).

D'où

$$\int_{[0,1]^2} uvdC(u,v) = \int_0^\theta u^2du + \int_\theta^{\frac{1}{2}} u(u+\frac{1}{2}-\theta)du + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\theta} u(u-\frac{1}{2}+\theta)du + \int_{1-\theta}^1 u^2du$$
$$= \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}$$

et donc
$$\rho \leq 1 - \frac{3}{16}(1-\beta)^3.$$
En remarquant que $\rho(X,-Y) = -\rho(X,Y)$ et $\beta(X,-Y) = -\beta(X,Y)$, on en déduit directement que
$$\frac{3}{16}(1+\beta)^3 - 1 \leq \rho.$$

5. Le prix p vérifie

$$\begin{aligned} p &= e^{-rT}E[(K-\min(S_T^1,S_T^2))^+] = e^{-rT}E\int_{\mathbb{R}} 1_{\min(S_T^1,S_T^2)\leq x\leq K}dx \\ &= e^{-rT}E\int_{-\infty}^K (1-1_{S_T^1\geq x, S_T^2\geq x})dx = e^{-rT}\int_{-\infty}^K (1-P[S_T^1\geq x, S_T^2\geq x])dx \\ &= e^{-rT}\int_{-\infty}^K (F(x)+G(x)-C(F(x),G(x)))dx. \end{aligned}$$

De la question 3 on déduit

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^K (F(x)+G(x)-C_U(F(x),G(x)))dx$$
$$\leq p \leq e^{-rT}\int_{-\infty}^K (F(x)+G(x)-C_L(F(x),G(x)))dx.$$

△