Mesures de risques en finance (M2)

Mercredi 6 Janvier 2010 (9h00-11h00)

Seul document autorisé : une feuille manuscrite recto verso.

Exercice 1 (Mesures de risques).
Soit $p \in [1, \infty[$. On rappelle que l'application $X \mapsto \|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ définie sur l'ensemble des variables aléatoires bornées est une norme. On note $x_+ = \max(0, x)$. Soit $\alpha \in]0, 1]$. On considère la fonction $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \|(X - \mathbb{E}[X])_+\|_p$.

1. Montrer que ρ est sous-additive.
2. Montrer que $\rho(X) \le 0$ si $X \le 0$.
3. La fonction ρ est-elle une mesure de risque monétaire ? Est-elle une mesure de risque cohérente ?

$\triangle$

Exercice 2 (Loi des valeurs extrêmes pour variables gaussiennes dépendantes[1]).
On rappelle les éléments suivants :

– Si φ est une fonction intégrable définie sur $\mathbb{R}^d$ sa transformée de Fourier est $\hat{\varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle t,x\rangle} \varphi(x)\, dx$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désingne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Si $\hat{\varphi}$ est intégrable, alors on peut inverser la transfomation de Fourier :

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle}\, \hat{\varphi}(t)\, \frac{dt}{(2\pi)^d}.$$

– La densité du vecteur gaussien (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et $\rho = \mathrm{Cov}(X, Y) \in [-1, 1]$ est

$$f_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, \exp -\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)}.$$

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ un processus gaussien centré réduit non dégénéré : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien possédant une densité, $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) = 1$. On note $\rho_{j,k} = \mathrm{Cov}(X_j, X_k)$ et $f_n(x_1, \cdots, x_n, R_n)$ la densité de $(X_1, \ldots, X_n)$, où $R_n = (\rho_{j,k}, 1 \le j < k \le n)$.

1. Montrer en utilisant la transformée de Fourier de f_n que pour $j \neq k$,

$$\partial_{\rho_{j,k}} f_n = \partial_{x_j} \partial_{x_k} f_n.$$

2. Montrer que pour $j \neq k$,

$$\partial_{\rho_{j,k}} \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_n(z^{j,k}) \prod_{i \notin \{j,k\}} \mathbf{1}_{\{z_i \le x_i\}}\, dz_i, \tag{1}$$

où $z^{j,k} = (z_1, \ldots, z_n)$ avec $z_j = x_j$ et $z_k = x_k$.

[1]S. M. Berman. *Limit Theorems for the Maximum Term in Stationary Sequences.* Ann. Math. Statist. Vol. 35, N.2 (1964), pp. 502–516.

3. Montrer que pour $j \neq k$,

$$0 \leq \partial_{\rho_{j,k}} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \leq f_2(x_j, x_k; \rho_{j,k}).$$

4. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $r \in [0, 1[$. Vérifier que $f_2(c, c; \rho) \leq f_2(c, c; r)$ pour tout $\rho \in [-r, r]$.

Soit $(Y_n, n \in N^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite ($\mathbb{E}[Y_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(Y_n) = 1$). On pose $a_n = 1/\sqrt{2\log(n)}$ et $b_n = \sqrt{2\log(n)} - \frac{1}{2}\, a_n(\log(\log(n)) + 4\pi)$. On rappelle que $(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k - b_n)/a_n$ converge vers en loi vers la loi de Gumbel.

5. Montrer en utilisant (1) que

$$|\mathbb{P}(X_1 \leq c, \ldots, X_n \leq c) - \mathbb{P}(Y_1 \leq c, \ldots, Y_n \leq c)| \leq \sum_{1 \leq j < k \leq n} |\rho_{j,k}|\, f_2(c, c; |\rho_{j,k}|).$$

6. Montrer qu'il existe une constante dépendant de $x \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \geq 2$, on a, avec $c_n = a_n x + b_n$,

$$f_2(c_n, c_n, |\rho|) \leq \frac{C}{\sqrt{1-\rho^2}} n^{-2/(1+|\rho|)} \log(n)^{1/(1+|\rho|)}.$$

On suppose que la suite $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est stationaire : autrement dit il existe $(\rho_n, n \in \mathbb{N})$ tel que $\rho_{j,k} = \rho_{|j-k|}$ pour tout $j, k \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer que si

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n-1} |\rho_j|(n-j)(1-\rho_j)^{-1/2} n^{-2/(1+|\rho_j|)} \log(n)^{1/(1+|\rho_j|)} = 0, \tag{2}$$

alors $(\max_{1 \leq k \leq n} X_k - b_n)/a_n$ converge vers en loi vers la loi de Gumbel.

8. Vérifier que si les conditions $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\rho_j| < +\infty$ et il existe $\delta \in [0, 1[$ tel que $|\rho_n| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sont vérifiées, alors la suite $(\max_{1 \leq k \leq n} X_k - b_n)/a_n$ converge vers en loi vers la loi de Gumbel.

La condition (2) est satisfaite dès que la corrélation ρ_n décroit assez rapidement vers 0. Par exemple, on peut vérifier que la condition (2) est satisfaite dès que $\lim_{n \to +\infty} \rho_n \log(n) = 0$ ou dès que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \rho_n^2 < +\infty$. △

Merci de rédiger l'exercice 3 sur une feuille séparée.

Exercice 3 (LA FAMILLE DE COPULES DE BERTINO[2]).

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Soit C une copule et $\delta(u) = C(u,u)$ pour $u \in [0,1]$. Montrer que

$$\delta(1) = 1; \tag{3}$$
$$0 \leq \delta(t) \leq t, \quad 0 \leq t \leq 1; \tag{4}$$
$$0 \leq \delta(t_2) - \delta(t_1) \leq 2(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1. \tag{5}$$

2. Soit $\delta : [0,1] \to [0,1]$ une fonction vérifiant les propriétés (3)–(5). On définit la fonction $B_\delta : [0,1]^2 \to [0,1]$ par

$$B_\delta(u,v) = \begin{cases} u - \inf\limits_{u \leq t \leq v} \{t - \delta(t)\}, & u \leq v \\ v - \inf\limits_{v \leq t \leq u} \{t - \delta(t)\}, & v < u. \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$, $B_\delta(u,0) = B_\delta(0,u) = 0$ et $B_\delta(u,1) = B_\delta(1,u) = u$ et que pour tout $u, v \in [0,1]^2$, $B_\delta(u,v) = B_\delta(v,u)$.

   (b) Pour tout rectangle $[u_1,u_2] \times [v_1,v_2] \subset [0,1]^2$ on définit

$$V([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) := B_\delta(u_2,v_2) + B_\delta(u_1,v_1) - B_\delta(u_1,v_2) - B_\delta(u_2,v_1).$$

   Montrer que pour tout u, v avec $0 \leq u \leq v \leq 1$,

$$V([u,v]^2) = \delta(u) + \delta(v) - 2u + 2 \inf_{t \in [u,v]} (t - \delta(t)).$$

   En déduire que $V([u,v]^2) \geq 0$.

   (c) Montrer que pour tout u_1, u_2, v_1, v_2 avec $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, $V([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) \geq 0$. En déduire que pour tout u_1, u_2, v_1, v_2 avec $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ et $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, $V([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) \geq 0$ et que donc B_δ est une copule.

   (d) Soit C une autre copule telle que $C(u,u) = \delta(u)$. Montrer que $C(u,v) \geq B_\delta(u,v)$ pour tout $u, v \in [0,1]^2$.

3. Calculer B_δ pour $\delta(t) = t$ et $\delta(t) = (2t-1)^+$ et interpreter les résultats.

4. (a) Soit U, V des variables uniformes sur $[0,1]$ ayant C comme fonction de repartition et $u \in [0,1]$. Montrer que $\mathbb{P}[\max(U,V) \leq u] = C(u,u)$.

   (b) Soit S^1 et S^2 deux actifs tels que S^1_T et S^2_T ont la même fonction de repartition F supposée contiunue. Soit G la fonction de repartition de $\max(S^1_T, S^2_T)$. Donner la borne supérieure pour le prix de l'option sur spread de pay-off $(S^1_T - S^2_T - K)^+$ sachant F et G.

$\triangle$

[2]Fredricks G. A. and Nelsen R. B. (2002), *The Bertino family of copulas.* In : Cuardas C. M., Fortiana J., Rodríguez Lallena J. A. (eds.) Distribution with given marginals and statistical modelling, Kluwer, Dordrecht, pp. 81–92.

Correction

Exercice 1 (Mesures de risques).

1. La fonction ρ est sous-additive car $x \mapsto x_+$ et $\|\cdot\|_p$ sont sous-additives.
2. $X - \mathbb{E}[X] \leq -\mathbb{E}[X]$ donc $(X - \mathbb{E}[X])_+ \leq -\mathbb{E}[X]$ et $\rho(X) \leq (1-\alpha)\mathbb{E}[X] \leq 0$.
3. ρ est positivement homogène, invariante par translation et sous-additive. Pour montrer que ρ est une mesure de risque monétaire (cohérente car elle est sous-additive et positivement homogène), il suffit de vérifier que ρ est monotone. Soit $X \leq Y$. On pose $Z = Y - X \geq 0$. On a par sous-addtivité et la question précédente :

$$\rho(X) = \rho(Y - Z) \leq \rho(Y) + \rho(-Z) \leq \rho(Y).$$

$\triangle$

Exercice 2 (Loi des valeurs extrêmes pour variables gaussiennes dépendantes).

1. On a $\hat{f}_n(t, R_n) = \mathrm{e}^{-\langle t, \Sigma t\rangle/2}$ où Σ est la matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$. Il est facile de vérifier à l'aide du théorème de convergence dominée que les interversions de dérivations et d'intégrations qui suivent sont légitimes. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{\rho_{j,k}} f_n(x; R_n) &= \partial_{\rho_{j,k}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle} \, \mathrm{e}^{-\langle t,\Sigma t\rangle/2} \, \frac{dt}{(2\pi)^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle} \, \partial_{\rho_{j,k}} \mathrm{e}^{-\langle t,\Sigma t\rangle/2} \, \frac{dt}{(2\pi)^n} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} t_j t_k \, \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle} \, \mathrm{e}^{-\langle t,\Sigma t\rangle/2} \, \frac{dt}{(2\pi)^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle} \, \mathrm{e}^{-\langle t,\Sigma t\rangle/2} \, \frac{dt}{(2\pi)^n} \\
&= \partial_{x_j} \partial_{x_k} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle t,x\rangle} \, \mathrm{e}^{-\langle t,\Sigma t\rangle/2} \, \frac{dt}{(2\pi)^n} \\
&= \partial_{x_j} \partial_{x_k} f_n(x; R_n).
\end{aligned}$$

2. On déduit de la question précédente

$$\begin{aligned}
\partial_{\rho_{j,k}} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) &= \int_{z_1 \leq x_1, \ldots, z_n \leq x_n} \partial_{\rho_{j,k}} f_n(z; R_n) \, dz \\
&= \int_{z_1 \leq x_1, \ldots, z_n \leq x_n} \partial_{x_j} \partial_{x_k} f_n(z; R_n) \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_n(z^{j,k}) \prod_{i \notin \{j,k\}} \mathbf{1}_{\{z_i \leq x_i\}} \, dz_i.
\end{aligned}$$

3. Comme f_n est positive, on déduit de (1) que $0 \leq \partial_{\rho_{j,k}} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$. On a d'après (1) que

$$
\begin{aligned}
\partial_{\rho_{j,k}} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_n(z^{j,k}) \prod_{i \notin \{j,k\}} \mathbf{1}_{\{z_i \leq x_i\}} \, dz_i \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_n(z^{j,k}) \prod_{i \notin \{j,k\}} \mathbf{1}_{\{z_i < +\infty\}} \, dz_i \\
&= f_2(x_j, x_k; \rho_{j,k}).
\end{aligned}
$$

4. On a

$$
f_2(c, c; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \, \mathrm{e}^{-c^2/(1+\rho)} \,. \tag{6}
$$

Pour $\rho \in [-r, r]$, on a $\sqrt{1-\rho^2} \geq \sqrt{1-r^2}$ et $1/(1+\rho) \geq 1/(1+r)$. On en déduit que $f_2(c, c; \rho) \leq f_2(c, c; r)$ pour tout $\rho \in [-r, r]$.

5. On a $\mathbb{P}(Y_1 \leq c, \ldots, Y_n \leq c) = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x; 0) \mathbf{1}_{\{x_1 \leq c, \ldots, x_n \leq c\}} \, dx$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{P}(X_1 \leq c, \ldots, X_n \leq c) - \mathbb{P}(Y_1 \leq c, \ldots, Y_n \leq c)| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \partial_t f_n(x; tR_n) \, dt \right) \mathbf{1}_{\{x_1 \leq c, \ldots, x_n \leq c\}} \, dx \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \sum_{j \neq k} \rho_{j,k} \partial_{\rho_{j,k}} f_n(x; tR_n) \, dt \right) \mathbf{1}_{\{x_1 \leq c, \ldots, x_n \leq c\}} \, dx \right| \\
&\qquad \leq \sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}| \int_0^1 dt \; \partial_{\rho_{j,k}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x; tR_n) \, \mathbf{1}_{\{x_1 \leq c, \ldots, x_n \leq c\}} \, dx \\
&\qquad \leq \sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}| \int_0^1 dt \; f_2(c, c, t\rho_{j,k}) \\
&\qquad \leq \sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}| \; f_2(c, c, |\rho_{j,k}|),
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé la réponse à la question 3 pour la deuxième inégalité et la réponse à la question 4 pour la troisième.

6. On a $c_n^2 \geq 2\log(n) - \log(\log(n)) + C'$ où C' est une constante qui ne dépend pas de n. Le résultat est alors immédiat en utilisant (6).

7. On a

$$
\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k \leq c_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}((\max_{1 \leq k \leq n} Y_k - b_n)/a_n \leq x) = \mathrm{e}^{-\exp(-x)} \,.
$$

D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}((\max_{1\le k\le n} X_k - b_n)/a_n \le c_n) - \mathbb{P}(\max_{1\le k\le n} Y_k \le c_n)\right| \\
&\qquad \le \sum_{j\ne k} |\rho_{j,k}|\ f_2(c_n, c_n, |\rho_{j,k}|) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{n-1} |\rho_j|(n-j)\ f_2(c_n, c_n, |\rho_j|) \\
&\qquad \le C\sum_{j=1}^{n-1} |\rho_j|(n-j)(1-\rho_j^2)^{-1/2} n^{-2/(1+|\rho_j|)} \log(n)^{1/(1+|\rho_j|)}
\end{aligned}$$

On en déduit que si (2) est vérifiée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}((\max_{1\le k\le n} X_k - b_n)/a_n \le x) = \mathrm{e}^{-\exp(-x)}\,.$$

Donc la suite de terme général $(\max_{1\le k\le n} X_k - b_n)/a_n$ converge vers en loi vers la loi de Gumbel.

8. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} |\rho_j|(n-j)(1-\rho_j)^{-1/2} n^{-2/(1+|\rho_j|)} \log(n)^{1/(1+|\rho_j|)} \\
&\qquad\qquad \le (1-\delta^2)^{-1/2} n^{-(1-\delta)/(1+\delta)} \log(n) \sum_{j=1}^{n-1} |\rho_j|.
\end{aligned}$$

La condition (2) est donc satisfaite et la suite $(\max_{1\le k\le n} X_k - b_n)/a_n$ converge donc vers en loi vers la loi de Gumbel.

△

Exercice 3 (La famille de copules de Bertino)**.**

1. L'équation (3) est évidente ; l'équation (4) est une conséquence de la borne supérieure de Fréchet. Par définition de la copule on obtient que $\delta(t)$ est croissant. Soit (U, V) un couple de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ ayant C comme fonction de repartition.

$$\begin{aligned}
\delta(t_2) - \delta(t_1) = C(t_2, t_2) - C(t_1, t_1) &= \mathbb{P}[U \le t_2, V \le t_2] - \mathbb{P}[U \le t_1, V \le t_1] \\
&\le \mathbb{P}[t_1 \le U \le t_2] + \mathbb{P}[t_1 \le V \le t_2] \\
&= 2(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

2. (a) $B_\delta(0, u) = -\inf_{0\le t\le u}\{t - \delta(t)\} = 0$ car $t - \delta(t) \ge 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\delta(0) = 0$. $B_\delta(u, 1) = u - \inf_{u\le t\le 1}\{t - \delta(t)\} = u$ parce que $\delta(1) = 1$. La symétrie est évidente.

   (b) Par définition de B_δ, on a que $B_\delta(u, u) = 0$ ce qui implique directement la formule pour $V([u, v]^2)$. Soit t^* le point où l'infimum est atteint. On a

$$\begin{aligned}
V([u, v]^2) &= \delta(u) + \delta(v) + 2(t^* - u) - 2\delta(t^*) \\
&= \delta(u) - \delta(t^*) + \delta(v) - \delta(t^*) + 2(t - u) \ge \delta(u) - \delta(t^*) + 2(t - u) \ge 0
\end{aligned}$$

   par la propriété de Lipschitz de δ.

(c) On a par symétrie et sous l'hypothèse $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$:

$$\begin{aligned}
&V([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \\
&= \frac{1}{2}\{V([u_1, v_2]^2) - V([u_1, v_1]^2) - V([u_2, v_2]^2 + V([u_2, v_1]^2))\} \\
&= \inf_{t \in [u_1, v_2]}(t - \delta(t)) - \inf_{t \in [u_1, v_1]}(t - \delta(t)) \\
&- \inf_{t \in [u_2, v_2]}(t - \delta(t)) + \inf_{t \in [u_2, v_1]}(t - \delta(t)).
\end{aligned}$$

Puisque $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$, on a soit $\inf_{t \in [u_1, v_2]}(t - \delta(t)) = \inf_{t \in [u_1, v_1]}(t - \delta(t))$ soit $\inf_{t \in [u_1, v_2]}(t - \delta(t)) = \inf_{t \in [u_2, v_2]}(t - \delta(t))$. D'un autre côté, puisque $[u_2, v_1] \subseteq [u_1, v_1]$ et $[u_2, v_1] \subseteq [u_2, v_2]$,

$$\inf_{t \in [u_2, v_1]}(t - \delta(t)) \geq \inf_{t \in [u_1, v_1]}(t - \delta(t)) \quad \text{et} \quad \inf_{t \in [u_2, v_1]}(t - \delta(t)) \geq \inf_{t \in [u_2, v_2]}(t - \delta(t)).$$

Ensemble, ces observations impliquent que $V([u_1, u_2] \times [v_1, v_2])$. Puisque tout rectangle dans $[0, 1]^2$ peut être representé comme l'union des rectangles avec $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$ et des carrées de la forme $[u, v]^2$, on a que B_δ est une fonction croissante en 2 dimension et donc une copule.

(d) Pour fixer les idées, prenons $u \leq v$. Soit U, V un couple de v.a. uniformes ayant C comme fonction de repartition. On a alors pour tout $t \in [u, v]$

$$u - t + C(t, t) = \mathbb{P}[U \leq t, V \leq t] - \mathbb{P}[u \leq U \leq t] \leq \mathbb{P}[U \leq u, V \leq v],$$

d'où le résultat en prenant le sup sur tous les $t \in [u, v]$.

3. Pour $\delta(t) = t$ on a $B_\delta(u, v) = \min(u, v)$. C'est la borne supérieure de Fréchet. Pour $\delta(t) = (2t - 1)^+$ on a

$$t - \delta(t) = \begin{cases} t, & t \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - t, & t > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Supposons que $u \leq v$ pour fixer les idées. Si $u < \frac{1}{2}$ et $v < \frac{1}{2}$ on a $B_\delta(u, v) = u - \min(u, v) = 0$. Si $u < \frac{1}{2}$ et $v \geq \frac{1}{2}$, on a $B_\delta(u, v) = u - \min(u, 1 - v) = \max(0, u + v - 1)$. Si $u \geq \frac{1}{2}$ et $v \geq \frac{1}{2}$, on a $B_\delta(u, v) = v - \min(1 - u, 1 - v) = \max(2u - 1, u + v - 1) = u + v - 1$. Au final, $B_\delta(u, v) = (u + v - 1)^+$. C'est la borne inférieure de Fréchet.

4. (a) On a directement $\mathbb{P}[\max(U, V) \leq u] = \mathbb{P}[U \leq u, V \leq u] = C(u, u)$.

(b) Les variables $U := F(S_T^1)$ et $V := F(S_T^2)$ sont des variables uniformes sur $[0, 1]$ et

$$\mathbb{P}[\max(U, V) \leq u] = \mathbb{P}[\max(F^{-1}(U), F^{-1}(V)) \leq F^{-1}(u)] = G(F^{-1}(u)).$$

La copule C de S_T^1 et S_T^2 est donc bornée inférieurement par la copule de Bertino B_δ avec $\delta(u) = G(F^{-1})(u)$. Par la formule du cours, le prix de l'option sur spread vérifie

$$\begin{aligned}
p &= e^{-rT} \int_K^\infty \{F(x - K) - C(F(x - K), F(x))\} dx \\
&\leq e^{-rT} \int_K^\infty \{F(x - K) - B_{G \circ F^{-1}}(F(x - K), F(x))\} dx.
\end{aligned}$$

$\triangle$