Dérivés actions: risques – un (rapide) aperçu

Lorenzo Bergomi

Equity Derivatives Quantitative Research
Société Générale
lorenzo.bergomi@sgcib.com
+33 1 42 13 32 95

Introduction - le Dow Jones 1920-2006 (1)

MARCH 1, 1920

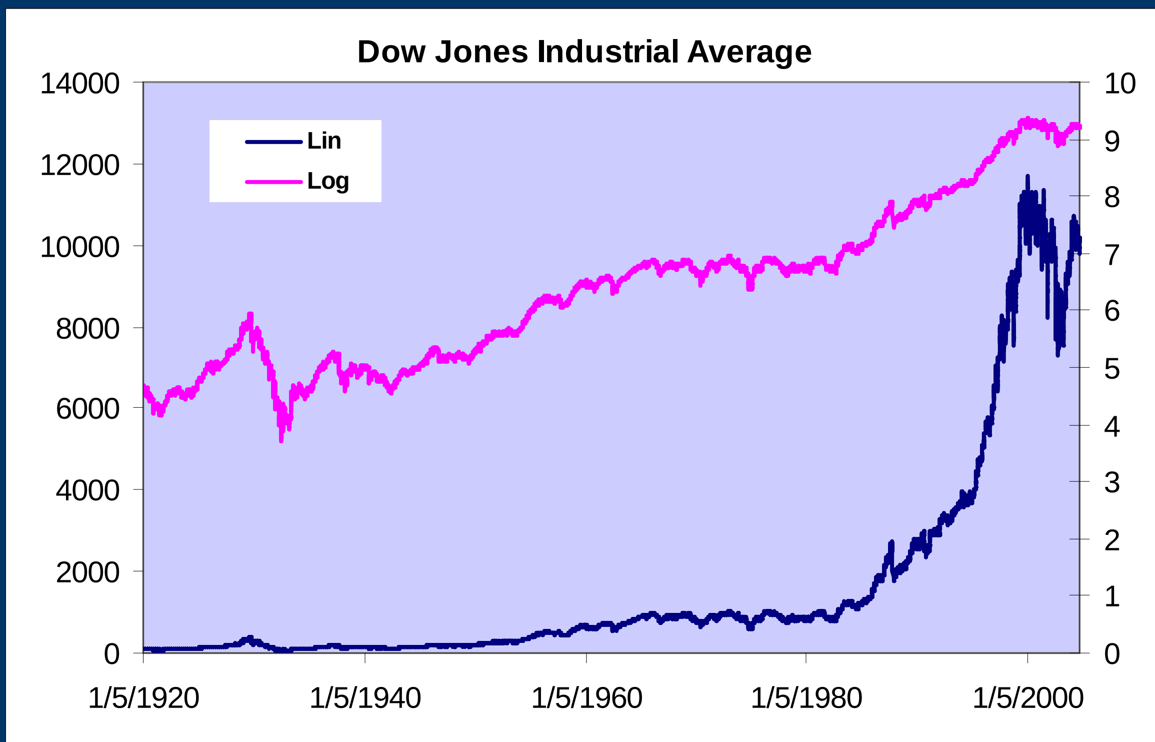
Corn Products replaced American Beet Sugar

American Can	Baldwin Locomotive	Texas Company
American Car & Foundry	Central Leather	U.S. Rubber
American Locomotive	Corn Products	U.S. Steel
American Smelting	General Electric Company	Utah Copper
American Sugar	Goodrich	Western Union
American Telephone & Telegraph	Republic Iron & Steel	Westinghouse
Anaconda Copper	Studebaker	

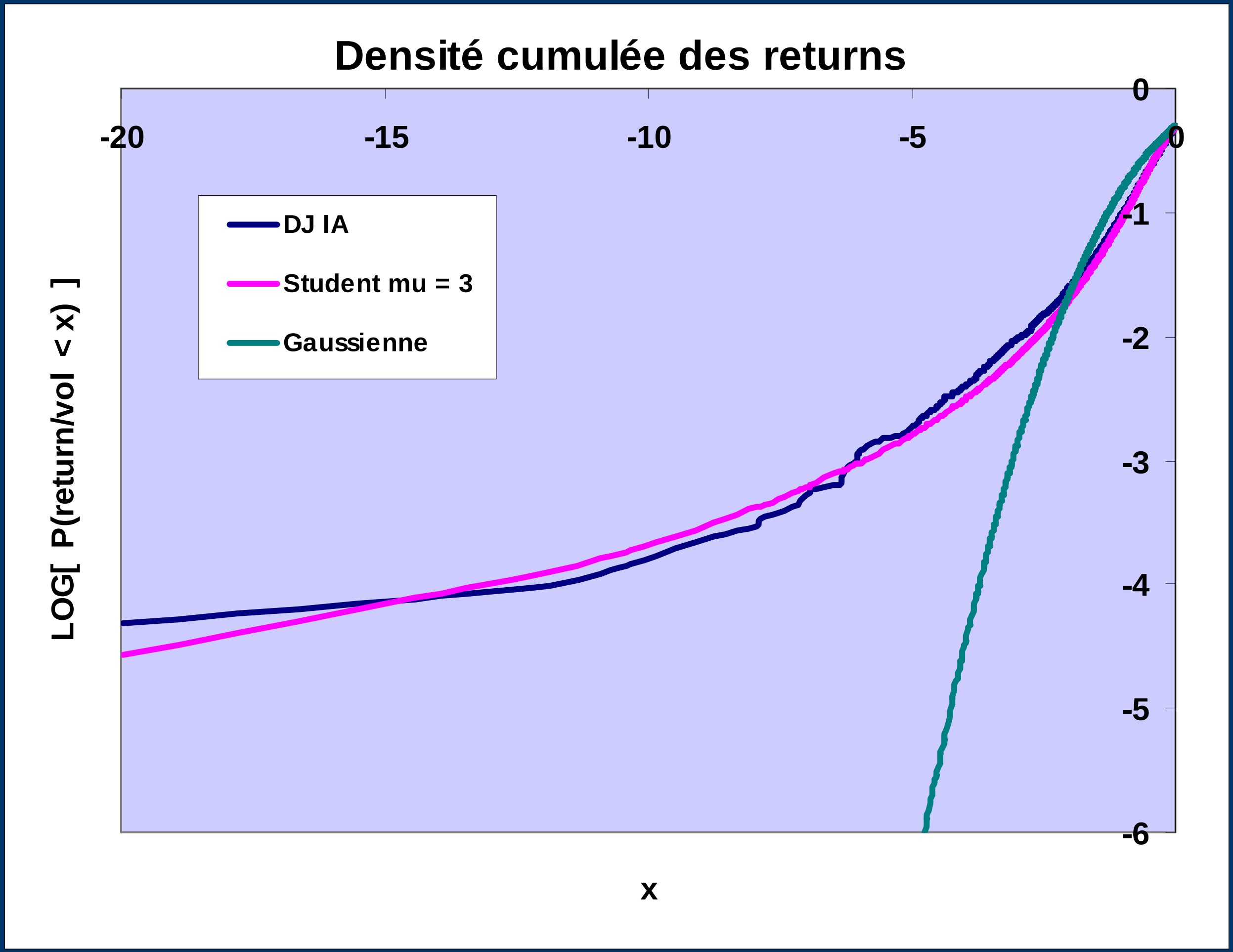
NOVEMBER 21, 2005

Following the completion of its merger with AT&T, SBC Communications Inc. changed its name to AT&T Incorporated

3M Company	DuPont	J.P. Morgan Chase & Company
Alcoa Incorporated	Exxon Mobil Corporation	McDonald's Corporation
Altria Group Incorporated	General Electric Company	Merck & Company, Incorporated
American Express Company	General Motors Corporation	Microsoft Corporation
American International Group	Hewlett-Packard Company	Pfizer Incorporated
AT&T Incorporated	Home Depot Incorporated	Procter & Gamble Company
Boeing Corporation	Honeywell International Inc.	United Technologies
Caterpillar Incorporated	Intel Corporation	Verizon Company
Citigroup Incorporated	International Business Machines	Wal-Mart Stores Incorporated
Coca-Cola Company	Johnson & Johnson	Walt Disney Company



Introduction - le Dow Jones 1920-2006 (2)



$$\rho(x) \propto \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{\mu-2}\right)^{\frac{1+\mu}{2}}}$$

Risques des produits dérivés (1 – le portage)

- Un petit exercice de comptabilité: P&L (profit & loss) entre $t=0$ et la maturité de l'option – à taux nuls pour simplifier:

$$P\&L = -\left[\textbf{Payoff}(S_T) - \textbf{Prime}\right] + \sum_i \Delta_i (S_{i+1} - S_i)$$

$$= -\sum_i \left[P(t_{i+1}, S_{i+1}) - P(t_i, S_i)\right] + \sum_i \left.\frac{dP}{dS}\right|_i (S_{i+1} - S_i)$$

$$= -\sum_i \left[P(t_{i+1}, S_{i+1}) - P(t_i, S_i) - \sum_i \left.\frac{dP}{dS}\right|_i (S_{i+1} - S_i)\right]$$

⇨ **On peut réécrire le P&L total comme une somme de petits P&Ls journaliers: on sait dire si l'on perd/gagne de l'argent sans attendre la maturité.**

⇨ **Il suffit de s'intéresser au P&L élémentaire sur un intervalle [t, $t+\delta t$]**

En intégrant l'effet des taux:

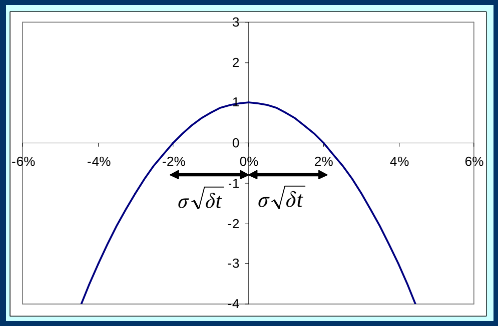
$$P\&L = \left[-P(t+\delta t, S+\delta S) + P(t,S)(1+r\delta t)\right] + \Delta(\delta S - rS\delta t)$$

Risques des produits dérivés (1 – le portage)

- Un petit développement limité :

$$P\&L = [-P(t+\delta t, S+\delta S) + P(t,S)(1+r\delta t)] + \Delta(\delta S - rS\delta t) = -\left[\frac{dP}{dt} - rP + rS\Delta\right]\delta t - \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dS^2}\delta S^2 + \cdots$$

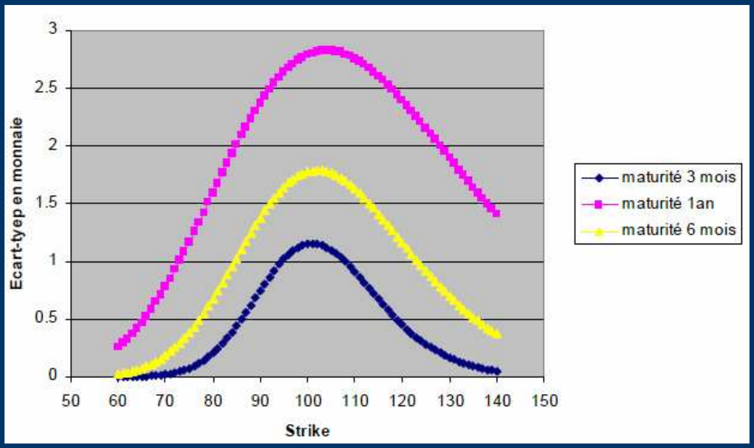
- Risque sur le sous-jacent - ordre dominant : Gamma $\Gamma = S^2\dfrac{d^2P}{dS^2}$
- Est-ce un gros risque ?
- Imaginons que le prix P est calculé avec le modèle Back-Scholes avec σ_P



$$\left[\frac{dP}{dt} - rP + rS\frac{dP}{dS}\right] = -\frac{\sigma_P^2}{2}S^2\frac{d^2P}{dS^2}$$

$$P\&L = -\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dS^2}S^2\left[\left(\frac{\delta S}{S}\right)^2 - \sigma_P^2\delta t\right]$$

- Stdev typique de la somme de ces P&Ls sur la durée de vie d'une option avec un hedge en delta journalier ? Dans Black-Scholes? Dans la réalité ?
- Exemple d'un Call 1 an, vol = 20%

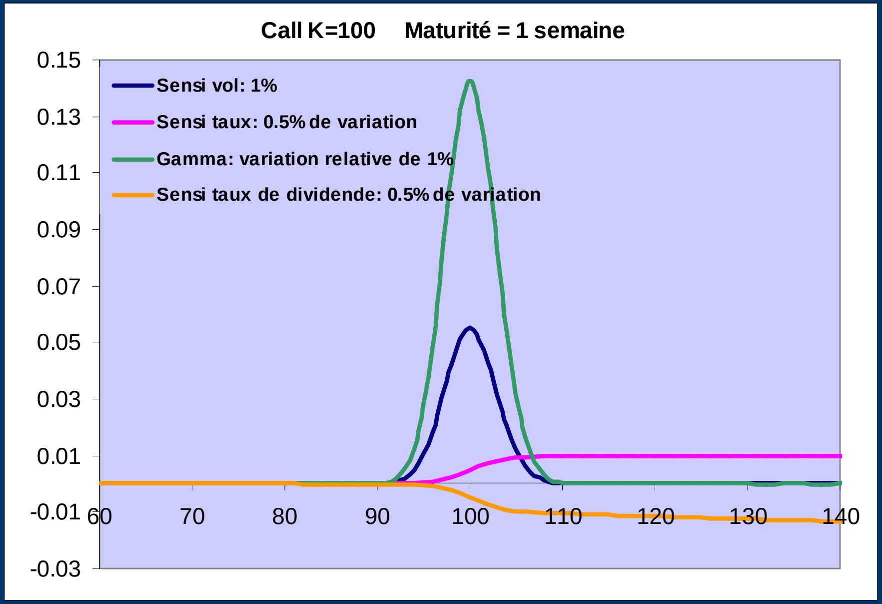


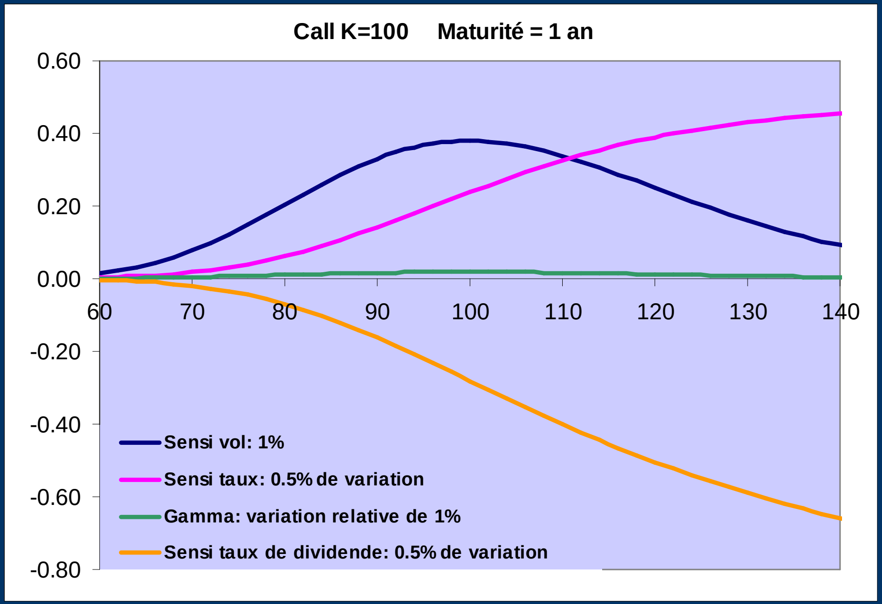
Risques des produits dérivés (2 – le mark-to-market)

- La fonction de pricing fait intervenir d'autres paramètres :

$$-\left[P(t+\delta t, S+\delta S,\ \sigma+\delta\sigma,\ r+\delta r, \mathrm{div}+\delta\mathrm{div}) - P(t,S,\ \sigma,\ r, \mathrm{div})\right]+\Delta\delta S \ = \ -\frac{dP}{dt}\delta t - \left(\frac{dP}{d\sigma}\delta\sigma + \frac{dP}{dr}\delta r + \frac{dP}{d\mathrm{div}}\delta\mathrm{div}\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dS^2}\delta S^2 + \cdots$$

- Sensibilités aux paramètres ?





- En règle générale, pour un payoff sur S
  - Maturités longues : sensibilité par rapport aux paramètres de la dynamique
  - Maturités courtes : sensibilité par rapport aux conditions initiales des sous-jacents

Risques des produits dérivés (3 – le mark-to-market)

- Comment calibre-t-on les paramètres de pricing? Doit-on vraiment calibrer ?
  - A priori non: pricing avec coût de couverture. On couvre le risque sur un paramètre *p* en traitant un instrument *O* de telle sorte à annuler ce risque :

$$\frac{dP}{dp} = \lambda \frac{dO}{dp}$$

Le prix donné au client pour l'option P est ajusté pour tenir compte du prix de marché de l'instrument de couverture

$$\begin{aligned}\text{Prix} &= P(\hat{p}) + \lambda\left(O\left(p_{\text{Market}}\right) - O(\hat{p})\right)\\ &\approx P\left(p = p_{\text{Market}}\right)\end{aligned}$$

- Alors quel avantage de la calibration ?
  - Nous assure que le modèle price bien tous les instruments de couverture: aucun coût supplémentaire n'est encouru *au moment où l'on se couvre.*

⇨ **essentiel de calibrer le modèle sur un choix pertinent d' instruments**

  - Autres raisons :

Standardisation du pricing

Prix « en ligne avec la concurrence »

Bénéfice psychologique

- Quid des paramètres non couvrables ?

Risques des produits dérivés (4 – le mark-to-market)

- Paramètres typiques pour les dérivés actions

  - **Volatilités**
  - **Dividendes**
  - **Taux**
  - **Corrélations**

  - **Volatilités des taux de change / corrélation avec les sous-jacents action**
  - **Volatilité des taux / corrélations avec les sous-jacents action**

  - **Volatilité/smile forward**
  - **Volatilité de la volatilité**
  - **…**

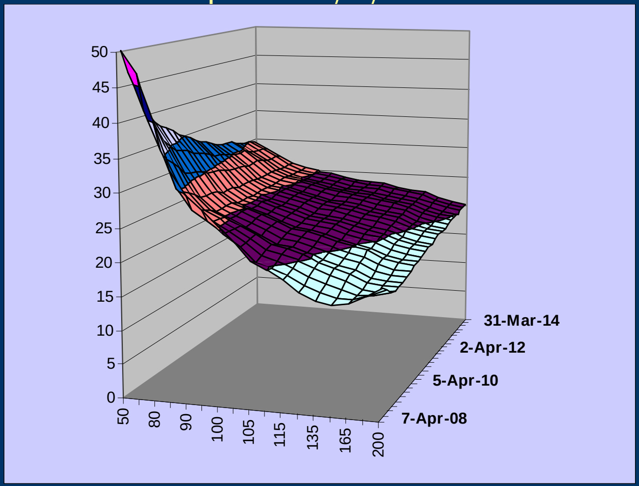
$$\Rightarrow P(t, S, \sigma, r, \text{div}, \ldots)$$

- Indépendamment du modèle de pricing utilisé, il faut (1) caractériser et (2) mesurer les risques sur ces paramètres
- Pertinence de $P(t, S, \sigma, r, \text{div}, \ldots)$: risque de modèle

Volatilités (1)

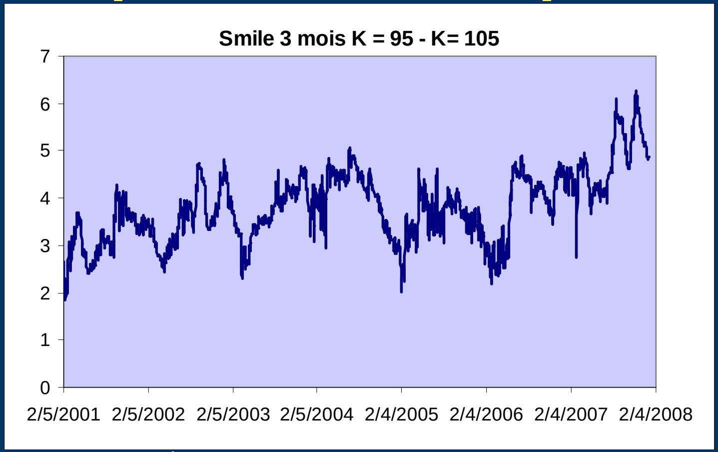
Exemple de l'Eurostoxx 50 – on a tous les jours une matrice complète (K, T) de volatilités implicites

Vols implis au 8 /1 /2008



Historique des volatilités ATM 1 mois (bleu) et 5 ans (rouge)

Historique de la différence des vols implicites 3 mois K= 95% et K = 105%



- Comment décrire de façon économique la variation journalière de la nappe de vols implicites ?

Volatilités (2) – mesure des risques

- **Solution 1: translater uniformément les volatilités implicites**

  Est-ce une bonne idée? Modes propres de déformation des surfaces de volatilité implicite les plus « importants ».

  Critère : fraction de la variance des variations de volatilité implicites expliquée :

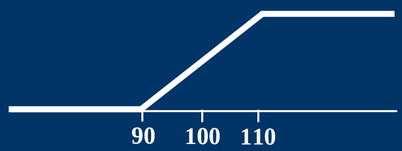
Translation	**90 – 95%**
Torsion en maturité	**2 – 5 %**
Torsion en strike	**1 – 2 %**

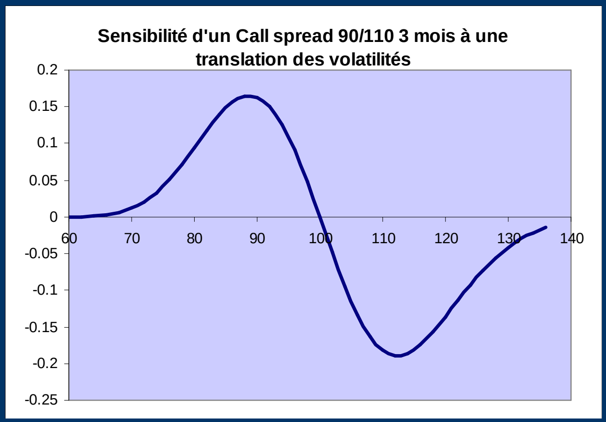
$$\delta P\&L = \sum_i V_i \,\delta\sigma_i$$

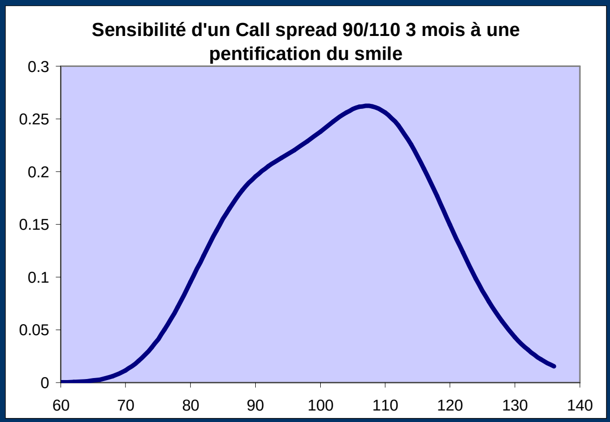
$$V_i = \frac{dP}{d\sigma_i} \qquad M_{ij} = \langle \delta\sigma_i \,\delta\sigma_j \rangle$$

$$\langle \delta P\&L^2 \rangle = {}^tVMV = \sum_k \omega_k \left({}^tT_kV\right)^2$$

- **Pb: un book d'options est en général structuré de façon telle que** ${}^tT_0V \approx 0$
  - exemple d'un Call Spread 90/110 3 mois
    - sensibilité à une translation des vols implis: on ne voit pas de risque
    - & sensibilité à un changement de pente du smile autour du strike 100%







Dividendes (1)

- Au moment où un dividende est versé
  - l'action baisse exactement du montant du dividende $S_{T^+} = S_{T^-} - D(S)$
  - le prix de l'option est inchangé : $P(T^-, S) = P(T^+, S - D(S))$

- Les dividendes prochains sont connus avec une bonne précision

- Ceux versés plus tard dans le futur sont estimés

  - Risque sur leur montant

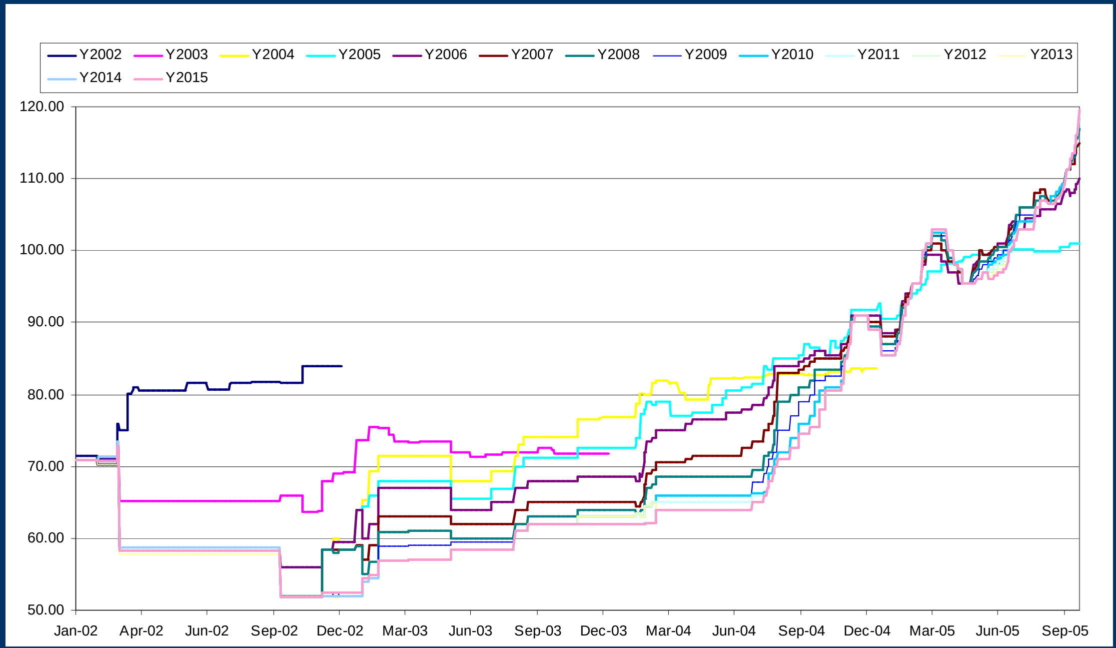
  - Risque sur le modèle de dividendes

    Div. en cash $D(S) = D$

    Div. en yield $D(S) = \mu S$

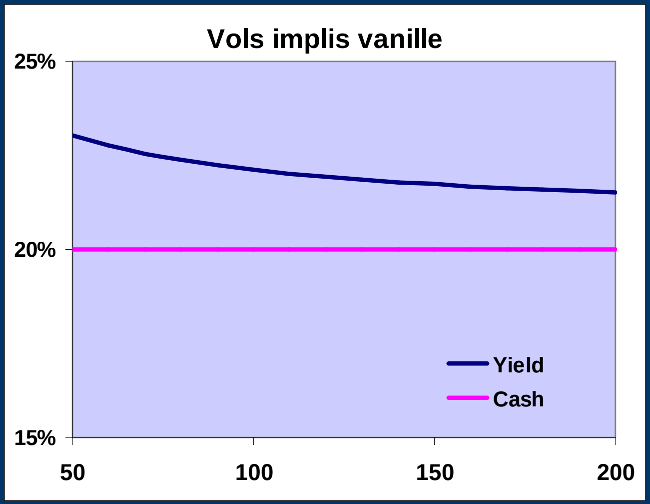
    Autres ...

Sur les indices: div swaps



Dividendes (2)

- Vols implis des vanilles dépendent du modèle de dividende utilisé ⇨ risque de modèle



- Un cas intéressant: le Call sur max

$$\text{Payoff} = (\max_{\tau} S_{\tau} - K)^{+}$$

- Bien couvert en Vega par Calls vanille de même maturité
- Pas d'impact des divs proches de la maturité
- Faible sensibilité intrinsèque au modèle de dividende

- Forte sensibilité au modèle de dividende

La saga récente des produits multi sous-jacents (1) 1997 - 2006

- Produits multi sous-jacents de distribution à capital garanti

  - Everest 1997 — 10 ans / 12 actions — ➩ $100\% + \min_i \left(\frac{S_T^j}{S_0^j} \right)$

  - Altiplano — 10 ans / 12 actions — Si au cours des 5 dernières années, aucune action < 60% de sa valeur intiale
    ➩ 300%
    sinon ➩ $100\% + \left(\frac{1}{N} \sum_j \frac{S_T^j}{S_0^j} - 1 \right)^+$

  - Kilimanjaro — 6 ans / 12 actions — Coupon annuel de 6% tant qu'aucune action du basket < 60% de sa valeur initiale; les actions qui traversent la barrière sont successivement éliminées du basket
    A maturité ➩ 100%

  - Atlas — 6 ans / 16 actions — **Non garanti**
    A maturité on enlève les actions ayant connu les 3 meilleures et les 3 pires performances ➩ 105% du basket equipondéré des 10 restantes

La saga récente des produits multi sous-jacents (2) 1997 - 2005

- Emeraude 2004 10 ans / 20 actions

  Chaque année, l'action dont la performance depuis *t = 0* est la plus élevée est figée à son niveau, avec un minimum de 200% de son niveau initial.

  A maturité ⇨ 100% + la performance maximale par rapport à t = 0 du panier equipondéré, floorée à 0.

- Produits à sortie anticipée – à capital garanti

- Oxygène 2003 6 ans / 3 indices

  A la fin de la 3ème année, sortie possible si la moyenne trimestrielle de la performance du basket depuis t = 0 dépasse 125% ⇨ 125%

  Si on reste dans le produit, à maturité :

  ⇨ Min(125% , 100% + moyenne trim. de la perf. depuis t=0, sur 6 ans)

- Titanium 2003 8 ans / 16 actions

  Coupon annuel $\max\left(\frac{1}{N_S}\sum_j \min\left(\frac{S^j_{\tau}}{S^j_{\tau_{i-1}}}-1, 16\%\right), 0\right)$

  Dès que la somme des coupons versés dépasse 30%, on reçoit chaque année un coupon supplémentaire de 10%

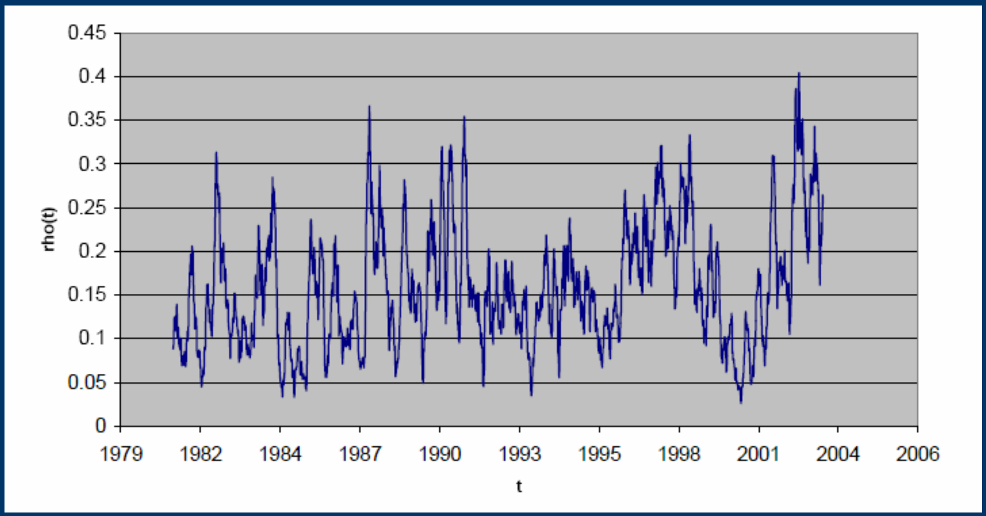
… Et tous les produits hybrides Equity/Forex/Fixed Income/Commodity imaginables

Corrélations (1)

- Une écrasante majorité des dérivés actions sont multi sous-jacents
  - Leur prix fait intervenir des hypothèses de corrélation. Ex : cadre Black-Scholes

$$\frac{dP}{dt} + \sum_i (r_i - q_i) S_i \frac{dP}{dS_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \hat{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j \, S_i S_j \frac{d^2 P}{dS_i dS_j} = rP \qquad P(S_i, \hat{\sigma}_i, \hat{\rho}_{ij}, \ldots)$$

- Comment mesure-t-on des corrélations ?
- Les corrélations sont-elles stables dans le temps ? Exemple d'un basket mondial



- Que se passe-t-il lorsque corrélation implicite et réalisée diffèrent ?

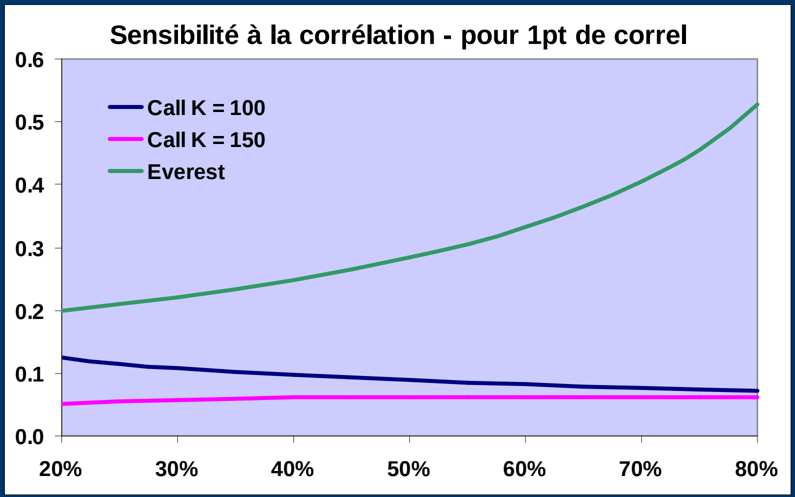
$$P\,\&\,L = -\frac{1}{2}\sum_{ij} S_i S_j \frac{d^2 P}{dS_i dS_j}\left(\frac{\delta S_i \delta S_j}{S_i S_j} - \hat{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j \delta t\right)$$

Corrélations (2)

- Comment se couvrir sur la corrélation réalisée ?

  - le correlation swap   Payoff $= \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \rho_{ij} - \hat{\rho} \right)$ $\rho_{ij} = \frac{\sum_{\tau} x_i^{\tau} x_j^{\tau}}{\sqrt{\sum_{\tau} (x_i^{\tau})^2} \sqrt{\sum_{\tau} (x_j^{\tau})^2}}$ $x_i^{\tau} = \ln\left(\frac{S_i^{\tau}}{S_i^{\tau-1}} \right)$

  - Stabilité de la couverture en corrélation?



- Comment mesurer le risque de corrélation ? $\frac{dP}{d\rho_{ij}}$

  - Comment « déformer » une matrice de corrélation ?   Ex. $\hat{\rho} = \lambda \rho_{\mathbf{Histo}} + (1-\lambda)\mathbf{1}$ $\frac{d\hat{\rho}_{ij}}{d\lambda} = -\left(1-\rho_{ij}^{\mathbf{Histo}}\right)$

- Risque de modèle sur la corrélation ?

Risque de modèle (1)

- Un modèle rustique de pricing d'option
  - Modèle simple de « dynamique » du sous-jacent : sous-jacent gelé

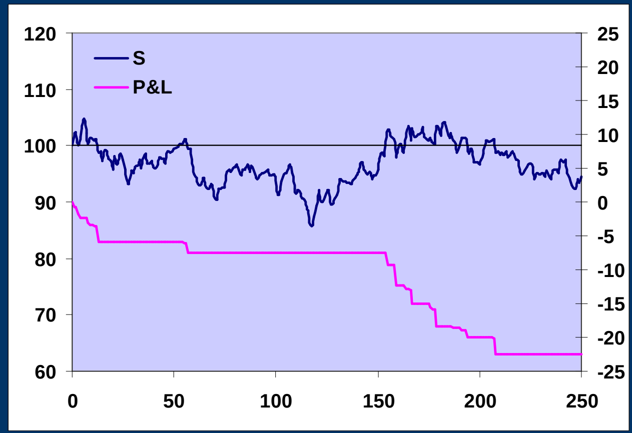
    Equivalent à pricer en BS à vol nulle

$$\frac{dP}{dt} = 0 \qquad P = (S-K)^{+}$$

$$P\&L = -\left[P(t+\delta t, S+\delta S) - P(t,S)\right] + \Delta\delta S = -\frac{dP}{dt}\delta t - \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dS^2}\delta S^2$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dS^2}\delta S^2$$

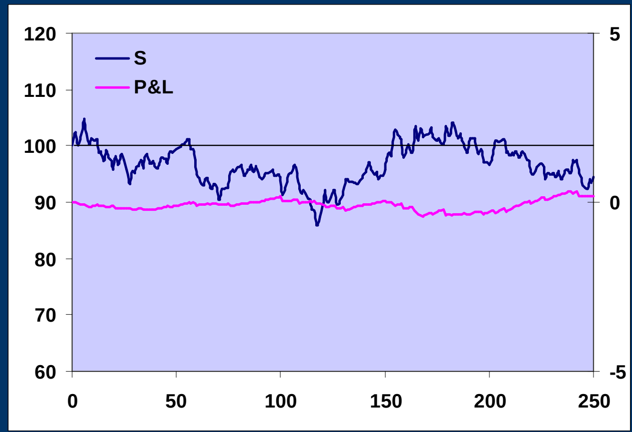
$$= -\frac{1}{2}\delta(S-K)\,\delta S^2$$



- Un modèle un peu moins rustique : Black Scholes

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\hat{\sigma}^2}{2}S^2\frac{d^2P}{dS^2}$$

$$P\&L = -\frac{1}{2}S^2\frac{d^2P}{dS^2}\left(\frac{\delta S^2}{S^2} - \hat{\sigma}^2\delta t\right)$$



Risque de modèle (2)

- A nouveau de la comptabilité - avec quelques paramètres supplémentaires – pas de taux pour simplifier

$$P\&L = -\left[P\left(t+\delta t, S+\delta S,\ \hat\sigma+\delta\hat\sigma,\ p+\delta p\right) - P\left(t,S,\ \hat\sigma,\ p\right)\right] + \Delta\delta S \quad = \quad -\frac{dP}{dt}\delta t - \left(\frac{dP}{d\hat\sigma}\delta\hat\sigma + \frac{dP}{dp}\delta p\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{dS^2}\delta S^2 - \frac{d^2P}{dp^2}\delta p^2 - \frac{d^2P}{d\hat\sigma^2}\delta\hat\sigma^2\right)$$

$$-\left(\frac{d^2P}{dSdp}\delta S\delta p + \frac{d^2P}{dSd\hat\sigma}\delta S\delta\hat\sigma - \frac{d^2P}{dpd\hat\sigma}\delta p\delta\hat\sigma\right) + \dots$$

En utilisant une fonction de pricing P issue du modèle Black-Scholes : $\frac{dP}{dt} = -\frac{\hat\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2P}{dS^2}$

le P&L se réécrit comme :

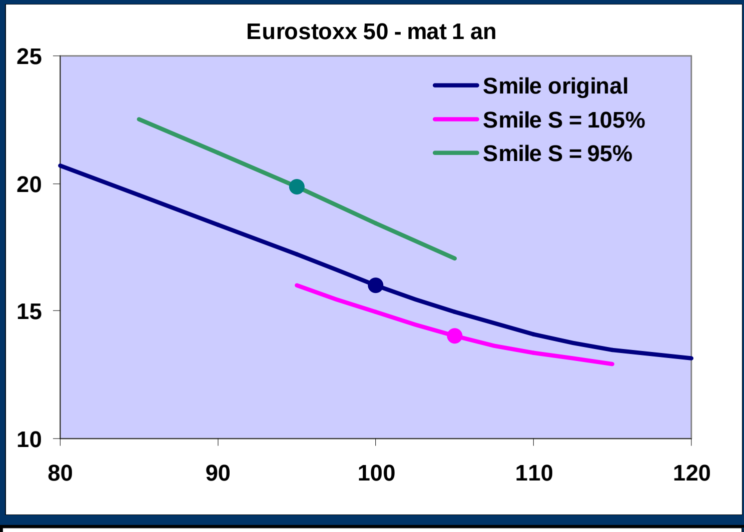
$$P\&L = \underbrace{\left(\frac{dP}{d\hat\sigma}\delta\hat\sigma + \frac{dP}{dp}\delta p\right)}_{\text{Termes d'ordre 1: couvrables en delta}} - \underbrace{\frac{S^2}{2}\frac{d^2P}{dS^2}\left[\frac{\delta S^2}{S^2} - \hat\sigma^2\delta t\right]}_{\text{Gamma / Theta}} \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{dp^2}\delta p^2 - \frac{d^2P}{d\hat\sigma^2}\delta\hat\sigma^2\right) - \left(\frac{d^2P}{dSdp}\delta S\delta p + \frac{d^2P}{dSd\hat\sigma}\delta S\delta\hat\sigma - \frac{d^2P}{dpd\hat\sigma}\delta p\delta\hat\sigma\right)}_{\text{Gammas Theta ??}} + \dots$$

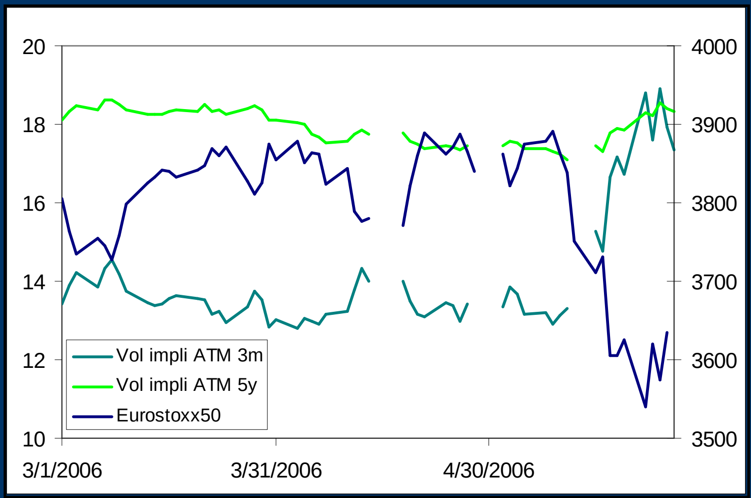
Risque de modèle (3) – le modèle de volatilité locale

- A une nappe de volatilités implicites donnée correspond une surface de volatilité locale qui redonne les prix de marché des options vanille.

$$\sigma(S,t)^2 = 2 \left. \frac{\frac{dC}{dT} + qC + (r-q)K\frac{dC}{dK}}{K^2 \frac{d^2C}{dK^2}} \right|_{\substack{K=S \\ T=t}}$$

$$dS = rSdt + \sigma(S,t)SdW_t$$





- En quoi ce modèle diffère-t-il de Black Scholes ?
- Quelle dynamique jointe du spot / des vols implis implique-t-il ?

  Est-elle plus/moins raisonnable ?

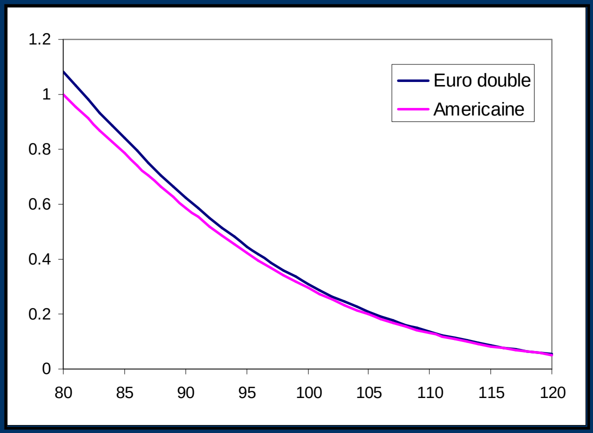
$$\frac{d\sigma_{K=S}}{dS} \approx 2 \left. \frac{d\sigma_K}{dK} \right|_S$$

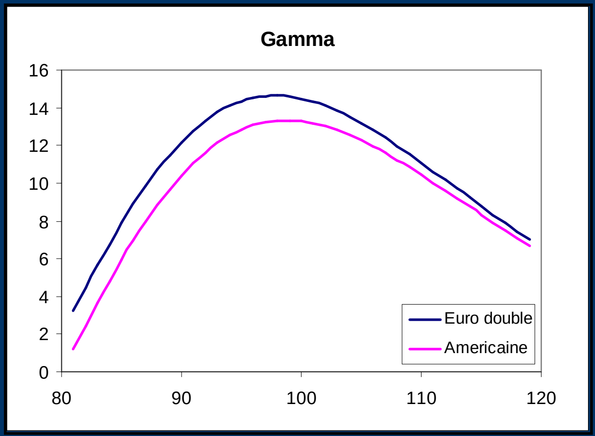
Risque de modèle (4) – l'exemple de la digitale américaine

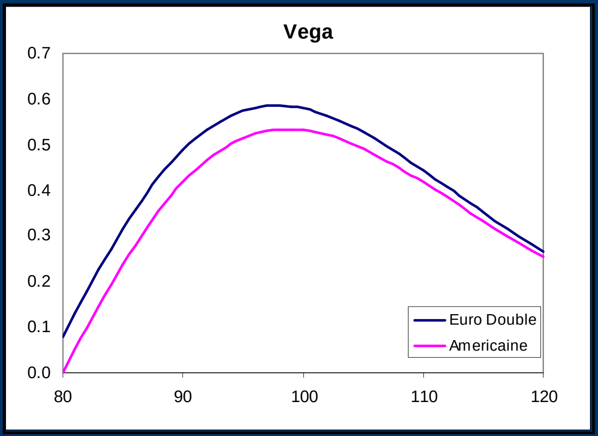
- Digitale americaine – paye 1€ dès que le sous-jacent passe en dessous de la barrière

  Maturité 1 an, limite = 80%

  Dans le cadre B.S. Gamma / Vega bien couverts par la digitale Européenne double:







- A la traversée de la limite, on revend la digitale Européenne

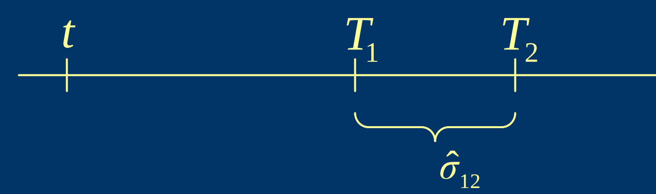
  Risques résiduels :

  - valeur du skew le jour où on traverse la limite
  - risque de gap

⇨ modèles différents impliquent dynamiques du smile différentes ⇨ **prix différents**

Risque de modèle (5) – la volatilité forward – les cliquets

- Exemple: Call ATM forward paye à $t = T_2$ $\left(\dfrac{S_{T_2}}{S_{T_1}} - 1\right)^+$



- **Dans le modèle B.S. la fonction de pricing s'écrit:** $P(\hat{\sigma}_{12}, r, \cdots)$
  - fait intervenir la volatilité forward, $\hat{\sigma}_{12}$, les taux, pas le sous-jacent
  - pas de delta à $t=0$ – trader en vacances jusqu'à T_1
  - dynamique des arguments de la fonction de pricing: $\hat{\sigma}_{12}, r$ pas pricée par le modèle ⇨ indice d'un sérieux risque / problème de modèle

- **Dans le modèle de volatilité locale la fonction de pricing** $P(S, \hat{\sigma}_{T_1}^K, \hat{\sigma}_{T_2}^K, r, \cdots)$ **fait explicitement apparaître** S **et produit un delta non-nul à** $t = 0$
  - est-ce une meilleure solution ?

⇨ **Le cliquet est en réalité une option sur** $\hat{\sigma}_{12}$ **, pas sur** S: ***attention à ne pas se tromper de sous-jacent !!***

Risque de modèle (5) – la volatilité forward – l'exemple du Napoléon

- Napoléon
  - on observe chaque année les 12 performances mensuelles de l'Eurostoxx50
  - on paye en fin d'année un coupon fonction de la plus basse de ces performances

$$\textbf{Coupon} = \left(8\% + \min_i r_i\right)^+ \qquad r_i = \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1$$

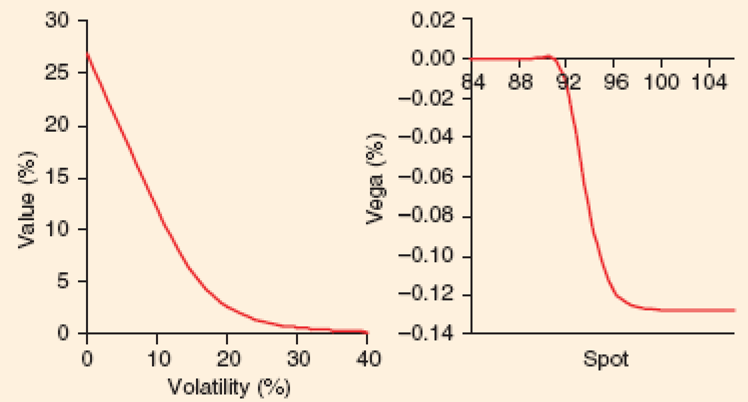
Risk Magazine: juillet 2002

The Napoleon cliquet has helped volumes for Goldman Sachs' structured equity retail products post a threefold increase for the first six months of 2002, compared with the corresponding period last year, Munari claims. And this seems to be a fact not lost on its rivals. "At least two other dealers appear to have reverse-engineered the Napoleon structure and are now aggressively pushing their products," he adds. Again, the question is whether these firms' models are correct, and whether they have managed to reproduce all the intricacies of Goldman's proprietary adapted Monte Carlo pricing model. ■

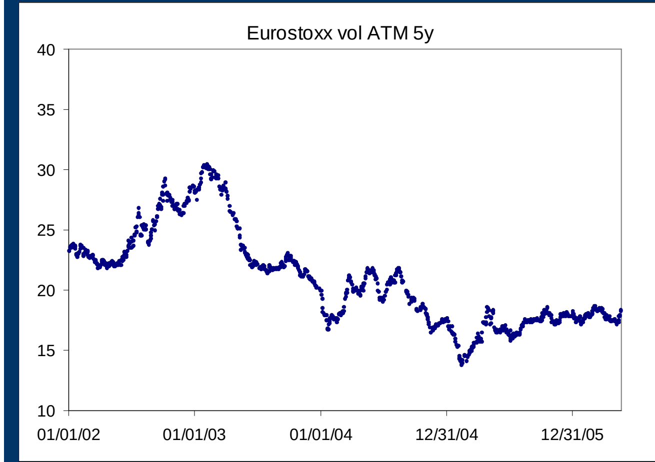
- Risque de modèle:
  - dynamique des vols implis forward
  - dynamique jointe vols implis forward / sous-jacent

$$\Gamma_{\hat{\sigma}\hat{\sigma}} = \frac{d^2P}{d\hat{\sigma}^2} > 0 \qquad \Gamma_{S\hat{\sigma}} = \frac{d^2P}{dSd\hat{\sigma}} < 0$$

1. Price and vega of Napoleon



Note: (left) initial value of coupons of years three, four, five and six as a function of volatility; (right) vega of a coupon at the end of the first month, as a function of the spot price



Risk Magazine: février 2004

Some dealers liken the present situation to that seen in the market in the second half of 2002. During that period, Goldman Sachs won practically every tender process it entered. Subsequently, the US investment bank, according to rival dealers, discovered it had botched its models and was forced to become a very active party in the volatility market in late 2002/early 2003 as it scrambled to hedge out its positions.

Conclusion

- Risques
  - Mesure macroscopique au niveau d'un book
  - Méthodologie de mesure d'un risque doit refléter :
    - sa pertinence au regard des occurrences historiques
    - sa matérialité : impact sur le book

- Risque de modèle:
  - Peut – souvent – être detecté même dans un modèle fruste
  - Questions de base :
    - Quels sont les vrais sous-jacents sur lesquels porte l'option ? Leur dynamique est-elle pricée par le modèle ?
    - Quels sont les instruments de couverture? Leur dynamique est-elle correctement pricée par le modèle ?
    - Si impossibilité de se couvrir: les niveaux de portage des paramètres sont-ils raisonnables ?
    - Le modèle condense-t-il des risques de nature différente en un seul paramètre ? (ex. vol-of-vol & forward skew)
    - Réponses à ces questions s'apprécient produit par produit

  - Ne pas « subir » le modèle – choisir