Exercice (variante de l'exercice 3.10 du poly)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère une fonction A, définie sur Ω et à valeur matricielle (on parle parfois de champ A) : pour tout $x \in \Omega$, on a $A(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$. On suppose que A appartient à $\left(L^\infty(\Omega)\right)^{d\times d}$, c'est à dire que toutes les composantes A_{ij} de la matrice A sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$, pour tout $1 \le i, j \le d$. On suppose aussi qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \xi^T A(x) \xi \ge \alpha\, \xi^T \xi \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

On se donne aussi une fonction $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ et on suppose que

$$\lambda(x) \ge \alpha \quad \text{presque partout sur } \Omega$$

pour la même constante $\alpha > 0$.

On considère le problème aux limites suivant : Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$-\text{div } (A\nabla u) + \lambda\, u = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où on rappelle que, pour toute fonction σ à valeur vectorielle ($\sigma(x) \in \mathbb{R}^d$), on pose $\text{div } \sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^d \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}$.

1. Montrer que le problème aux limites ci-dessus est équivalent à la formulation variationnelle suivante : Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

   $$\forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad a(u, v) = b(v)$$

   avec
   $$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla v)^T A \nabla u + \int_\Omega \lambda\, u\, v, \qquad b(v) = \int_\Omega f\, v.$$

   On pourra remarquer que

   $$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_\Omega (\nabla v) \cdot (A\nabla u) + \int_\Omega \lambda\, u\, v \\ &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \int_\Omega \lambda\, u\, v. \end{aligned}$$

2. Montrer que la forme bilinéaire a est coercive sur $H^1(\Omega)$ et donc sur $H^1_0(\Omega)$.
3. Montrer que la formulation variationnelle ci-dessus est bien posée.