Problème de l'obstacle

L'objectif de ces notes de cours est d'étudier mathématiquement le problème de l'obstacle, qui se formule naturellement comme la minimisation d'une énergie sous une contrainte distribuée. A la différence du Chapitre 4 des notes de cours, le problème comporte **des contraintes** (et en fait une **infinité de contraintes**).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et g une fonction dans $H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, on définit la fonctionnelle

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier le problème d'optimisation

$$\inf \{J(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}\}, \tag{1}$$

où l'ensemble $\mathcal{P}$ est défini par

$$\mathcal{P} = \left\{\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi(x) \geq g(x) \text{ p.p. sur } \Omega\right\}. \tag{2}$$

On cherche donc à minimiser l'énergie J (qui représente l'énergie physique – ou mécanique – du système) sous la contrainte que la solution reste toujours au dessus d'un obstacle dont le profil est donné par la fonction g. On parle de contrainte **distribuée** car il y a une contrainte en **tout** point $x \in \Omega$.

1 Existence et unicité d'une solution à (1)

On rappelle la définition suivante :

Soit $K \subset H$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel H. On dit que K est convexe si, pour tous u et w dans K, l'élément $\theta u + (1-\theta)w$ est dans K pour tout $\theta \in [0,1]$.

On aura besoin dans cette partie du théorème suivant (théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé) :

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$, et soit $K \subset H$ un sous-ensemble de H qui est convexe, fermé et non vide. Soit $u \in H$. Alors le problème

$$\inf_{\varphi \in K} \|u - \varphi\| \tag{3}$$

admet une unique solution, appelée projection orthogonale de u sur K.

Question 1. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On suppose que

$$v(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{4}$$

Montrer que :

$$\text{Pour tout } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant } \phi(x) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega, \quad \int_\Omega v\,\phi \geq 0. \tag{5}$$

On admettra pour la suite la réciproque : si la propriété (5) est vérifiée, alors la propriété (4) est vérifiée.

Question 2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\alpha\|\varphi\|_{H^1}^2 \leq J(\varphi) \leq \beta\|\varphi\|_{H^1}^2.$$

En déduire que l'application

$$\begin{array}{rcl} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi, \psi & \mapsto & \langle \varphi, \psi \rangle_J := \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \end{array}$$

est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, et que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme associée.

Question 3. On étudie ici l'ensemble $\mathcal{P}$ défini par (2).

3a. Montrer que $\mathcal{P}$ est non vide et convexe.

3b. Soit φ_n une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge vers φ^* dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\phi(x) \geq 0$ p.p. sur Ω. Montrer que

$$\int_\Omega (\varphi^* - g)\phi \geq 0.$$

En déduire que $\mathcal{P}$ est fermé dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 4. Montrer que le problème (1) se reformule sous la forme (3), pour un espace H, un sous-ensemble $K \subset H$ et un élément $u \in H$ qu'on précisera (on précisera aussi la norme utilisée sur H). En déduire l'existence et l'unicité d'une solution v^* à (1) :

$$v^* \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad J(v^*) = \inf\{J(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}\}.$$

2 Equation d'Euler-Lagrange

Question 5. On cherche maintenant à établir l'équation dont v^* est solution.

5a. Soit $\alpha \geq 0$, et soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\phi(x) \geq 0$ p.p. dans Ω. Montrer que $J(v^*+\alpha\phi) \geq J(v^*)$, puis que

$$\int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla\phi \geq 0.$$

5b. Pour la fin de cette Question 5 seulement, on se place en dimension $d = 1$. Rappeler la régularité spécifique de $v^* \in H^1(\Omega)$ dans ce cas.

5c. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $v^*(x_0) > g(x_0)$. Montrer que cette inégalité reste vraie dans un voisinage U_{x_0} de x_0 : pour tout $x \in U_{x_0}$, on a $v^*(x) > g(x)$.

5d. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec ϕ supporté dans U_{x_0}. Montrer que, pour tout réel α (positif ou négatif) de valeur absolue suffisamment petite, $J(v^* + \alpha\phi) \geq J(v^*)$, et en déduire que

$$\int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla\phi = 0,$$

puis que $\langle \Delta v^*, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$ (bien qu'on soit en dimension $d = 1$, on a gardé les notation ∇ et Δ).

On admettra pour la suite que cette propriété reste vraie en dimension quelconque sous la forme suivante. On suppose que g est assez régulière pour que $\Delta v^* \in L^2(\Omega)$, et on admet alors que, en tout x tel que $v^*(x) > g(x)$, on a $-\Delta v^*(x) = 0$.

De manière formelle, on a donc la caractérisation suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta v^* &= 0 \quad \text{dans } \omega, \\ v^* &= g \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega, \\ v^* &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où $\omega = \{x \in \Omega, \;\; v^*(x) > g(x)\}$. Cette caractérisation est difficile à utiliser en pratique car on ne connait pas ω.

3 Un intermédiaire utile

Pour $u \in L^2(\Omega)$, on définit les fonctions $u_+(x)$ et $u_-(x)$ par

$$u_+(x) = \max(u(x), 0) \quad \text{et} \quad u_-(x) = \max(-u(x), 0).$$

Ainsi, on a, presque partout sur Ω,

$$u(x) = u_+(x) - u_-(x), \quad u_+(x) \geq 0, \quad u_-(x) \geq 0. \tag{6}$$

Question 6.

6a. Soit $u \in L^2(\Omega)$. Montrer que $u_+(x)\, u_-(x) = 0$ presque partout. En déduire que $u_+ \in L^2(\Omega)$ et $u_- \in L^2(\Omega)$.

6b. Soient u et w dans $L^2(\Omega)$. Montrer que

$$\|u - w\|_{L^2} \geq \|u_+ - w_+\|_{L^2}.$$

Question 7. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $v \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Sans utiliser la formule de Green, mais en passant par les distributions, montrer que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \phi = -\int_\Omega \phi \Delta v.$$

Montrer que cette égalité reste valable pour $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Question 8. On définit $p^* \in L^2(\Omega)$ par

$$p^* = -\Delta v^*. \tag{7}$$

8a. Montrer que, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\phi(x) \geq 0$ p.p. dans Ω, on a

$$\int_\Omega p^* \phi \geq 0.$$

8b. En déduire que $p^*(x) \geq 0$ presque partout sur Ω, puis que, pour tout $\mu > 0$, on a

$$p^* = [p^* + \mu(g - v^*)]_+ \,. \tag{8}$$

On a donc obtenu le problème nonlinéaire couplé suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta v^* &= p^* \quad \text{dans } \Omega, \\ p^* &= [p^* + \mu(g - v^*)]_+ \quad \text{dans } \Omega, \\ v^* &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9}$$

4 Algorithme de calcul

On étudie dans cette partie un algorithme permettant le calcul de v^*. On va suivre une stratégie de type "directions alternées".

Soit un réel $\mu > 0$. Soit $p_0 = 0$. On définit la suite $\{p_n\}$ par récurrence de la manière suivante. Pour tout $n \geq 0$, on définit $v_n \in H_0^1(\Omega)$ et $p_{n+1} \in L^2(\Omega)$ par

$$
\begin{aligned}
-\Delta v_n &= p_n \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), &(10)\\
p_{n+1} &= [p_n + \mu(g - v_n)]_+ \quad \text{dans } \Omega. &(11)
\end{aligned}
$$

Question 9. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, les fonctions v_n et p_{n+1} sont bien définies, respectivement dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Quelles sont les équations sur v^* et p^* qui motivent les équations (10) et (11) ? En quoi les problèmes (10) et (11) sont-ils plus faciles à résoudre que le problème (9) ?

Question 10. On cherche maintenant à montrer que cet algorithme itératif converge effectivement vers la solution de (9).

10a. En utilisant une formulation variationnelle de (7) et de (10), montrer que

$$\|\nabla v_n - \nabla v^*\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (p_n - p^*)(v_n - v^*).$$

10b. Montrer que

$$\|p_{n+1} - p^*\|_{L^2} \leq \| \left(p_n + \mu(g - v_n)\right) - \left(p^* + \mu(g - v^*)\right) \|_{L^2},$$

puis que

$$\|p_{n+1} - p^*\|_{L^2}^2 \leq \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 + (\mu^2 - \mu C)\|v_n - v^*\|_{H^1}^2$$

pour une certaine constante C ne dépendant que de Ω.

10c. En déduire qu'il existe μ_c tel que, si $0 < \mu \leq \mu_c$, la suite $\|p_n - p^*\|_{L^2}^2$ est décroissante. Montrer que ceci implique que

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v^*\|_{H^1} = 0.$$