

EDP et modélisation (M2 ANEDP, Sorbonne Université)

Examen du 9 janvier 2024 (documents autorisés – durée 3h)

L'examen comporte un exercice et un problème complètement indépendants.

1 Exercice : schéma pour l'équation de transport

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés qualitatives du schéma de Lax-Friedrichs appliqué à l'équation de transport. On se place en dimension $d = 1$ d'espace, sur la droite réelle \mathbb{R} , et on considère le problème : trouver $u : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + V \partial_x u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = g & \text{sur } \mathbb{R} \text{ (condition initiale),} \end{cases} \quad (1)$$

où la vitesse V est constante et strictement positive ($V > 0$) et où T est un temps final. La condition initiale est $g \in L^2(\mathbb{R})$.

On se donne un pas de temps Δt , une grille en espace $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ définie par $x_j = j \Delta x$, et on discrétise (1) par le schéma de Lax-Friedrichs :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = 0 & \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ et tout } n \geq 0, \\ u_j^0 = g_j & \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2)$$

où $g_j = g(j \Delta x)$. La quantité u_j^n est donc une approximation de $u(n \Delta t, j \Delta x)$.

Question 1. Expliquer de manière informelle en quoi le schéma (2) peut être une bonne approximation de (1).

Question 2. On cherche l'équation équivalente au schéma (2). On suppose donc qu'il existe une fonction $v : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u_j^n = v(n \Delta t, j \Delta x)$ et on cherche à identifier l'équation dont v est solution.

2a. Montrer que

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = \partial_x v + O((\Delta x)^2),$$

où, dans le membre de droite, $\partial_x v$ est évaluée en $(n \Delta t, j \Delta x)$.

2b. Montrer que

$$\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} = u_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_{xx} v + O((\Delta x)^4),$$

où $\partial_{xx} v$ est à nouveau évaluée en $(n \Delta t, j \Delta x)$.

2c. Montrer que

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} = \partial_t v + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} v - \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \partial_{xx} v + O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^4/\Delta t),$$

où v et ses dérivées sont encore évaluées en $(n \Delta t, j \Delta x)$.

2d. Dans toute la suite, on suppose que Δx et Δt sont du même ordre de grandeur $O(\varepsilon)$. Montrer que, à l'ordre dominant, on a

$$\partial_t v + V \partial_x v = 0.$$

Quelle propriété du schéma cette égalité reflète-t-elle ?

2e. Montrer que

$$\partial_t v + V \partial_x v + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} v - \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \partial_{xx} v = O(\varepsilon^2),$$

puis que

$$\partial_t v + V \partial_x v - \alpha \partial_{xx} v = O(\varepsilon^2),$$

avec

$$\alpha = \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} - V^2 \frac{\Delta t}{2}. \quad (3)$$

Question 3. Au vu du résultat précédent, on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v + V \partial_x v - \alpha \partial_{xx} v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ v(0, \cdot) = g & \text{sur } \mathbb{R} \text{ (condition initiale)}. \end{cases} \quad (4)$$

3a. Quel type de phénomène physique le terme $-\alpha \partial_{xx} v$ représente-t-il ?

3b. En utilisant une transformée de Fourier de la condition initiale de (4), montrer qu'il suffit de s'intéresser à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v_k + V \partial_x v_k - \alpha \partial_{xx} v_k = 0 & \text{sur } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ v_k(0, x) = \exp(i k x) & \text{sur } \mathbb{R} \text{ (condition initiale)}, \end{cases} \quad (5)$$

pour n'importe quel $k \in \mathbb{R}$ fixé, et que la fonction v définie formellement par

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \tau(k) v_k(t, x) dk \quad (6)$$

pour des coefficients $\tau(k)$ bien choisis est bien solution de (4). On explicitera le choix adéquat des $\tau(k)$.

3c. On cherche la solution de (5) sous la forme $v_k(t, x) = \exp(p(t) + i k x)$. Montrer que $p(t) = (-i k V - \alpha k^2) t$, ce qui donne l'expression $v_k(t, x) = \exp(-\alpha k^2 t) \exp[i k (x - V t)]$.

Question 4. On suppose que $\alpha \geq 0$ et on admet que $\tau \in L^2(\mathbb{R})$.

4a. Montrer que, pour tout $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto \tau(k) v_k(t, x)$ est bien dans $L^1(\mathbb{R})$, ce qui donne bien un sens à (6).

4b. Dans le cas de la condition initiale $v_k(0, x) = \exp(i k x)$, interpréter qualitativement l'expression $v_k(t, x) = \exp(-\alpha k^2 t) \exp[i k (x - V t)]$. A un instant donné,

quelle est la forme du signal, son amplitude? A quelle vitesse le signal se propage-t-il? Ces grandeurs dépendent-elles de k ?

Question 5. On suppose $\alpha < 0$.

5a. Pour $k \in \mathbb{R}$ fixé, quel est le comportement en temps long de $v_k(t, x)$?

5b. On suppose que le support de τ est \mathbb{R} tout entier. Montrer que, quel soit $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, l'intégrale (6) n'est pas bien définie.

Question 6. Dédurre des questions précédentes que le schéma (2) est stable si et seulement si $\alpha \geq 0$. Au vu de (3), à quelle condition sur Δt et Δx cela correspond-il?

2 Problème : modèles effectifs pour des structures minces

On considère un ouvert borné, connexe et régulier $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ (où $d \in \mathbb{N}^*$ est la dimension ambiante) et on introduit l'ouvert $\Omega := \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de \mathbb{R}^d . Pour un paramètre $0 < \varepsilon \leq 1$ petit, on considère l'ouvert $\Omega^\varepsilon := \omega \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ de \mathbb{R}^d . Cet ouvert Ω^ε est dit un ouvert mince (on parle aussi de plaque) car son épaisseur ε dans la direction d est petite par rapport à ses dimensions caractéristiques dans les $d - 1$ autres directions (voir la Figure 1).

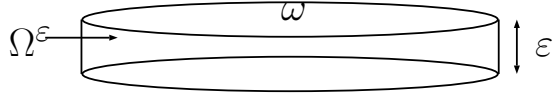


FIGURE 1 – Représentation schématique de la plaque Ω^ε .

On considère une fonction $x \mapsto A(x)$ définie sur Ω et à valeur matricielle : pour tout $x \in \Omega$, on a $A(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$. On suppose de plus que la matrice $A(x)$ est **diagonale**, et que ses éléments diagonaux vérifient les bornes suivantes : il existe $0 < c_- \leq c_+$ tels que

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \forall x \in \Omega, \quad c_- \leq A_{ii}(x) \leq c_+, \quad (7)$$

ce qui implique que, pour tout ξ et η dans \mathbb{R}^d et tout $x \in \Omega$,

$$\xi \cdot A(x)\xi \geq c_- |\xi|^2 \quad \text{et} \quad |\eta \cdot A(x)\xi| \leq c_+ |\xi| |\eta|.$$

On écrit tout $x \in \Omega = \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sous la forme $x = (x', x_d)$ où $x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \omega$ et $x_d \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on se donne une fonction $\tilde{f}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ et on considère le problème suivant : trouver $\tilde{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon$ tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon) = \tilde{f}^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ A^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \omega \times \left\{ \pm \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \end{cases} \quad (8)$$

Dans (8), n^ε est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega^\varepsilon$, A^ε est la fonction à valeur matricielle définie sur Ω^ε par

$$A^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x', x_d) = A\left(x', \frac{x_d}{\varepsilon}\right),$$

et l'espace V^ε est défini par

$$V^\varepsilon := \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon), \quad v = 0 \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\}.$$

Une fonction dans V^ε s'annule sur le bord latéral de Ω^ε (voir la Figure 1) et la seconde ligne de (8) est une condition aux limites de type Neumann homogène sur les faces supérieure et inférieure de la plaque Ω^ε .

L'objectif du problème est d'identifier la limite de \tilde{u}^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Question 1. Montrer de manière formelle (on ne demande pas une preuve mathématique rigoureuse) que le problème (8) est équivalent à la formulation variationnelle suivante : trouver $\tilde{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon$ tel que

$$\forall \tilde{v} \in V^\varepsilon, \quad \int_{\Omega^\varepsilon} A^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v} = \int_{\Omega^\varepsilon} \tilde{f}^\varepsilon \tilde{v}. \quad (9)$$

2.1 Remise à l'échelle et estimations a priori

Pour étudier la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on va écrire le problème (9) comme un problème posé sur Ω , domaine qui a l'avantage d'être indépendant de ε (voir la Figure 2).

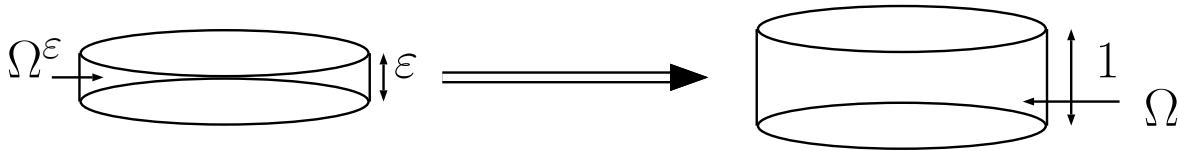


FIGURE 2 – Remise à l'échelle du domaine de travail.

Pour toute fonction u assez régulière, on définit le gradient partiel par

$$\nabla' u = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \partial_\alpha u e_\alpha, \quad (10)$$

et l'opérateur “gradient rescalé” par

$$\nabla^\varepsilon u = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \partial_\alpha u e_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} \partial_d u e_d,$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d .

Question 2. On introduit les fonctions u^ε et f^ε définies sur Ω par : pour tout $x = (x', x_d) \in \Omega$,

$$u^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x', \varepsilon x_d) \quad \text{et} \quad f^\varepsilon(x) = \tilde{f}^\varepsilon(x', \varepsilon x_d). \quad (11)$$

2a. Montrer que $(\nabla^\varepsilon u^\varepsilon)(x) = (\nabla \tilde{u}^\varepsilon)(x', \varepsilon x_d)$ pour tout $x \in \Omega$.

2b. En changeant de variable et de fonction inconnue dans (9) (cf. (11)) et en procédant de manière identique pour la fonction test, montrer que (9) est équivalent à : trouver $u^\varepsilon \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} A \nabla^\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla^\varepsilon v = \int_{\Omega} f^\varepsilon v, \quad (12)$$

où l'espace V est défini par

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \text{ on } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (13)$$

On munit l'espace V de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

2c. On admet le résultat suivant (inégalité de Poincaré dans V). Soit V défini par (13). Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in V, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14)$$

Soit a^ε la forme bilinéaire définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a^\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega} A \nabla^\varepsilon u \cdot \nabla^\varepsilon v.$$

Montrer que a^ε est coercive sur V avec une constante indépendante de ε , i.e. qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\forall v \in V, \quad a^\varepsilon(v, v) \geq m \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

2d. Montrer que le problème (12) est bien posé.

2e. Montrer que

$$\|\nabla^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}, \quad (15)$$

puis que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

pour une constante C indépendante de ε .

2f. On suppose désormais qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$f^\varepsilon = f. \quad (16)$$

Montrer qu'il existe $u^* \in V$ tel que, à extraction près,

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } H^1(\Omega).$$

L'objectif de la suite est d'identifier l'équation satisfaite par u^* .

2.2 Passage à la limite

Question 3. En utilisant les résultats précédents, montrer (attention aux passages à la limite !) que

$$\partial_d u^* = 0.$$

Comme Ω est connexe, ceci implique que u^* est indépendant de x_d .

Question 4. Montrer que $u^* \in H_0^1(\omega)$.

Question 5. Soit $v \in H_0^1(\omega)$, i.e. une fonction ne dépendant que des $d-1$ premières variables.

5a. Montrer qu'on peut considérer v comme un élément de V .

5b. En écrivant (12) avec une telle fonction v , et en utilisant la structure particulière de la matrice A , montrer que

$$\int_{\Omega} A' \nabla' u^\varepsilon \cdot \nabla' v = \int_{\Omega} f v, \quad (17)$$

où le gradient partiel ∇' est défini par (10) et où A' est la matrice de taille $(d-1) \times (d-1)$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq d-1, \quad A'_{\alpha\beta}(x) = A_{\alpha\beta}(x). \quad (18)$$

Il s'agit donc simplement de la sous-matrice supérieure gauche de A .

5c. En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ le long de la suite extraite dans la Question 2f, montrer que

$$\forall v \in H_0^1(\omega), \quad \int_{\Omega} A' \nabla' u^* \cdot \nabla' v = \int_{\Omega} f v.$$

5d. Dédurre de la question précédente que

$$\forall v \in H_0^1(\omega), \quad \int_{\omega} m(A') \nabla' u^* \cdot \nabla' v = \int_{\omega} m(f) v, \quad (19)$$

où, pour tout fonction g , $m(g)$ est la moyenne de g par rapport à sa dernière variable :

$$\forall x' \in \omega, \quad m(g)(x') := \int_{-1/2}^{1/2} g(x', x_d) dx_d.$$

Question 6. On va montrer que (19) caractérise complètement u^* .

6a. Montrer que la fonction à valeur matricielle $A^* = m(A')$ vérifie des bornes similaires à (7).

6b. Montrer que (19) caractérise complètement u^* .

6c. Montrer que toute la suite $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ (et pas seulement la sous-suite identifiée dans la Question 2f) converge vers u^* .

Question 7. Quelle est l'équation aux dérivées partielles associée à (19) ? Commenter (en terme de modélisation) sur le passage de (9) (ou de manière équivalente (12)) à (19).

Question 8. Est-il possible d'affaiblir l'hypothèse que $A(x)$ est diagonale tout en gardant la propriété (17) avec la définition (18) ?