Solution

Exercice 1

1 On utilise la méthode de la fonction muette. Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}^2$. Les variables U et V étant indépendantes et à densité, le couple (U, V) admet une densité donnée par le produit des densités de U et de V. Aussi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,Y)] &= \mathbb{E}\left[f\left(\frac{U^{1/2}}{U^{1/2}+V^{1/2}}, U^{1/2}+V^{1/2}\right)\right] \\
&= \iint_{[0,1]^2} f\left(\frac{u^{1/2}}{u^{1/2}+v^{1/2}}, u^{1/2}+v^{1/2}\right)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (2)
\end{aligned}$$

On considère l'application:

$$\varphi : \left\{\begin{array}{lcl}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \rightarrow &]0,1[\times]0,+\infty[\\ (u,v) & \mapsto & (x,y) = \left(\dfrac{u^{1/2}}{u^{1/2}+v^{1/2}}, u^{1/2}+v^{1/2}\right) \end{array}\right.$$

Pour $(x, y) \in]0, 1[\times]0, +\infty[$, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & \dfrac{u^{1/2}}{u^{1/2}+v^{1/2}} \\ y = & u^{1/2}+v^{1/2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u = x^2y^2 \\ v = (1-x)^2y^2 \end{array}\right.$$

Donc φ et une bijection de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$. Pour déterminer l'image du domaine $]0, 1[\times]0, 1[$ par cette bijection, on résoud :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < u, v < 1 \\ (x,y) = \varphi(u,v) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 < xy < 1 \\ 0 < (1-x)y < 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < \min\left\{\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{1-x}\right\} \end{array}\right. \qquad (3)$$

On note D le domaine en (x, y) défini en (3). Le changement de variable réalise une bijection C^1 de $]0, 1[\times]0, 1[$ sur D. Le jacobien de la transformation φ s'écrit:

$$D\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ -2(1-x)y^2 & 2(1-x)^2y \end{vmatrix} = 4x(1-x)y^3$$

On a alors par changement de variables dans (2):

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \iint_{(x,y)\in D} f(x,y).4x(1-x)y^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ceci montre que le couple (X, Y) admet la densité $4x(1-x)y^3\mathbf{1}_{(x,y)\in D}$.

2 La densité du couple (X, Y) n'est pas une densité produit en raison de l'indicatrice du domaine D qui n'est pas un domaine produit. Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

3 La densité p_X de X s'obtient par la formule de la densité marginale :

$$p_X(x) = \int 4x(1-x)y^3 \mathbf{1}_{(x,y)\in D} \, \mathrm{d}y$$

Elle est nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$. On observera que

$$\min\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\right\} = \frac{1}{1-x}\mathbf{1}_{0\leq x<\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\mathbf{1}_{\frac{1}{2}\leq x\leq 1}$$

Aussi, pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$, on a:

$$p_X(x) = \int_0^{\frac{1}{1-x}} 4x(1-x)y^3 \, \mathrm{d}y = \frac{x}{(1-x)^3}$$

Et pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

$$p_X(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} 4x(1-x)y^3 \, \mathrm{d}y = \frac{1-x}{x^3}$$

Exercice 2

1a À partir de l'expression $\phi_N(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{N = n\}s^n$, il est clair que $\phi_N^{(n)}(0) = n!\mathbb{P}\{N = n\}$. Par conséquent, la connaissance de ϕ_N, et donc de ses dérivées en 0, est équivalente à la connaissance de la loi de la variable entière N.

1b En dérivant terme à terme la série entière définissant ϕ_N on peut écrire:

$$\forall s \in]-1,1[,\ \phi_N'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}\{N = n\}s^{n-1} = \mathbb{E}[Ns^{N-1}]$$

1c La fonction ϕ_N' est croissante sur $[0,1[$, et sa limite à gauche en 1 est $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}\{N = n\}$. L'équivalence recherchée en découle aussitôt.

1d Soit $s \in [-1,1]$. Les deux variables s^{N_1} et s^{N_2} sont indépendantes (car N_1 et N_2 le sont) et intégrables (car bornées). Leur produit est donc également intégrable et on a:

$$\mathbb{E}\left(s^{N_1+N_2}\right) = \mathbb{E}\left(s^{N_1}s^{N_2}\right) = \mathbb{E}(s^{N_1})\mathbb{E}(s^{N_2})$$

Cette relation étant vraie pour tout $s \in [-1,1]$, le résultat est acquis.

2a On sait que T_1 est une variable géométrique de paramètre p, c'est-à-dire que sa loi est donnée par:

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}\{T_1 = n\} = p(1-p)^{n-1}$$

Soit alors $s \in [-1, 1]$.

$$\phi_{T_1}(s) = \mathbb{E}(s^{T_1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} s^n = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

2b Il suffit de voir que l'une comme l'autre des écritures représentent l'événement "le joueur a gagné aux coups n_1, $n_1 + n_2$,... et perdu aux autres coups".

2c Il découle de l'égalité précédente que pour $(n_1, \ldots, n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{T_1 = n_1, T_2 - T_1 = n_2, \quad \ldots \quad &, T_k - T_{k-1} = n_k\} \\ &= \quad (1-p)^{n_1-1} p (1-p)^{n_2-1} p \ldots (1-p)^{n_k-1} p \end{aligned}$$

Cette assure que les variables $(T_i - T_{i-1})_{1 \leq i \leq k}$ sont i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

2d La variable T_r s'écrit comme la somme des r variables géométriques de paramètre p indépendantes $(T_i - T_{i-1})_{1 \leq i \leq r}$. Ces variables ayant même loi, elles ont également la même fonction génératrice, ϕ_{T_1}. Il résulte donc de (1d) que:

$$G(s) = \phi_{T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_r - T_{r-1})}(s) = (\phi_{T_1}(s))^r = (ps)^r \left(\frac{1}{1-(1-p)s} \right)^r$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le développement en série entière du second terme de ce produit:

$$\begin{aligned} G(s) &= p^r s^r \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-m+1)}{m!} (-1)^m (1-p)^m s^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+r-1}{r-1} p^r (1-p)^m s^{m+r} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} s^n \end{aligned}$$

La loi de T_r est ainsi donnée par:

$$\forall n \geq r,\ \mathbb{P}\{T_r = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

2e On peut écrire pour $n \geq r$:

$$\{T_r = n\} = \{X_n = 1, X_1 + \cdots + X_{n-1} = r - 1\}$$

Or la variable $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ est indépendante de X_n et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, p)$. Le résultat attendu en découle immédiatement:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{T_r = n\} &= \mathbb{P}\{X_n = 1\}\mathbb{P}\{X_1 + \cdots + X_{n-1} = r - 1\} \\
&= p \times \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r}
\end{aligned}$$

3a Il découle de l'égalité proposée que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_1 < D_1\} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{S_1 < D_1, S_1 = n\} \text{ réunion dénombrable disjointe} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{n < D_1, S_1 = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{n < D_1\}\mathbb{P}\{S_1 = n\} \text{ par indépendance de } S_1 \text{ et } D_1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{S_1 = n\}(1-\lambda)^n \text{ car } D_1 \text{ est géométrique de paramètre } \lambda \\
&= G(1-\lambda)
\end{aligned}$$

3b N est l'instant de premier succès du schéma de Bernoulli $(\mathbf{1}_{S_i < D_i})_{i \geq 1}$. C'est donc une variable géométrique de paramètre $\mathbb{P}\{S_1 < D_1\} = G(1-\lambda)$.

3(c)i Il est clair que:

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right)$$

On a par conséquent, en utilisant librement l'interversion $\mathbb{E}$ et $\sum$ pour des variables aléatoires positives:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right]$$

3(c)ii Par définition de N on a:

$$\mathbf{1}_{\{N \geq i\}} = \mathbf{1}_{\{S_1 \geq D_1, \ldots, S_{i-1} \geq D_{i-1}\}}$$

Comme S_i et D_i sont indépendantes de $(S_j, D_j)_{1 \leq j \leq i-1}$, il est clair que $\mathbf{1}_{\{N \geq i\}}$ est indépendant de X_i, et donc:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(1_{\{N \geq i\}}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_1)\mathbb{P}\{N \geq i\}$$

car les X_i ont même loi que X_1 et $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.

3(c)iii Il suffit d'écrire:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{N\geq i\} \;=\; \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}\{N=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{N=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathbb{P}\{N=n\}=\mathbb{E}(N).$$

3(d)i On va décomposer sur les valeurs prises par S_1. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{S_1=n\}}=1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{E}(\min(S_1,D_1))&=\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{S_1=n\}}\min(S_1,D_1)\right)\\ &=\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{S_1=n\}}\min(n,D_1)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{S_1=n\}}\min(n,D_1)\right)\end{aligned}$$

et on conclut par indépendance de S_1 et D_1.

3(d)ii

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((D_1-n)1_{\{D_1>n\}}\right)&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-n)\lambda(1-\lambda)^{k-1}=(1-\lambda)^n\sum_{l=1}^{+\infty}l\lambda(1-\lambda)^{l-1}\\ &=(1-\lambda)^n\mathbb{E}(D_1)=\frac{(1-\lambda)^n}{\lambda}.\end{aligned}$$

3e Comme pour $x,y\in\mathbb{R}$, $\min(x,y)=y-(y-x)1_{\{x>y\}}$,

$$\mathbb{E}\left(\min(n,D_1)\right)=\mathbb{E}\left(D_1-(D_1-n)1_{\{D_1>n\}}\right)=\frac{1-(1-\lambda)^n}{\lambda}.$$

En utilisant cette équation dans le membre de gauche de l'égalité

$$\mathbb{E}(X_1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(\min(n,D_1))\mathbb{P}\{S_1=n\},$$

il vient $\mathbb{E}(X_1)=\frac{1-G(1-\lambda)}{\lambda}$. Comme N est géométrique de paramètre $G(1-\lambda)$, $\mathbb{E}(N)=\frac{1}{G(1-\lambda)}$ et on conclut avec l'égalité $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

3f Comme S_1 est strictement positive $G(0)=\mathbb{P}\{S_1=0\}=0$. Donc

$$\lim_{\lambda\to1^-}\frac{1-G(1-\lambda)}{\lambda G(1-\lambda)}=+\infty.$$

Lorsque leur paramètre λ tend vers 1, les variables géométriques D_i se rapprochent de 1 et le joueur a de plus en plus de mal à terminer le jeu.
Comme $G(1)=1$, pour $\lambda\in]0,1[$ $\frac{1-G(1-\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\int_{1-\lambda}^{1}G'(s)ds$. Comme $\mathbb{E}(S_1)<+\infty$, on en déduit avec la question 1c que

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{1-G(1-\lambda)}{\lambda G(1-\lambda)}=\frac{\mathbb{E}(S_1)}{G(1)}=\mathbb{E}(S_1).$$

Lorsque λ tend vers 0, la probabilité $\mathbb{P}(S_1<D_1)=G(1-\lambda)$ pour que Z soit égale à S_1 tend vers 1. Le résultat n'est donc pas surprenant.