Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

12 janvier 2009, 14h30 - 17h30.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice : chaîne de Markov sur $\{0,1\}^n$

Noter que $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des n-uplets ne différant de x que de, au plus, une seule coordonnée. En particulier $|\mathcal{V}(x)| = n+1$. On remarque que l'on peut passer de tout point x à tout point y en n itérations, en modifiant ou non x, coordonnée par coordonnée. Par exemple, pour $n = 4$, $x = (0,0,0,0)$, et $y = (1,1,1,1)$, on a

$$x \to x^1 = (1,0,0,0) \to x^2 = (1,1,0,0) \to x^3 = (1,1,1,0) \to y$$

Chaque transition élémentaire se produit avec une probabilité $1/(n+1)$. Par conséquent, nous avons la minoration suivante

$$\begin{aligned} M^n(x,y) &= \sum_{(x^1,\ldots,x^{n-1})\in E^{n-1}} M(x,x^1)M(x^1,x^2)\ldots M(x^{n-1},y) \\ &\geq 1/(n+1) \times \ldots \times 1/(n+1) = 1/(n+1)^n. \end{aligned}$$

Ceci implique que la chaîne de Markov de matrice de transition M vérifie la condition de Dublin. On en déduit que :

- Elle admet une unique loi invariante. On vérifie facilement que la mesure uniforme $\pi(x) = 2^{-n}$ est réversible pour M, on en conclut qu'elle est l'unique mesure invariante de M.
- Elle verifie les propriétés d'ergodocité suivantes :
  - Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, presque sûrement,

    $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(X_k) = \pi(f)$$

    où (X_k) désigne une chaîne de Markov de matrice de transition M.
  - $\exists \alpha > 0$ tel que

    $$\|\mu M^N - \pi\|_1 \leq \alpha^{\lfloor N/n \rfloor},$$

    où $\|\cdot\|_1$ désigne la norme en variation totale.

Problème : discrétisation d'équations différentielles stochastiques

1.a On a :

$$\begin{aligned} |X_{s\wedge\nu_M}|^2 &\leq \left(|Y| + \int_0^{s\wedge\nu_M} |b(r,X_r)|\, dr + \left|\int_0^{s\wedge\nu_M} \sigma(r,X_r)dW_r\right|\right)^2 \\ &\leq 3\left(|Y|^2 + \left|\int_0^s |b(r\wedge\nu_M, X_{r\wedge\nu_M})|\, dr\right|^2 + \left|\int_0^s 1_{r\leq\nu_M}\sigma(r,X_r)\, dW_r\right|^2\right). \end{aligned}$$

Par Cauchy Schwarz on obtient :

$$\sup_{s\in[0,t]} \left(|X_{s\wedge\nu_M}|^2\right) \leq 3 \left(|Y|^2 + t\int_0^t |b(r\wedge\nu_M, X_{r\wedge\nu_M})|^2 \, dr + \sup_{s\in[0,t]} \left| \int_0^s 1_{r\leq\nu_M} \sigma(r, X_r)\, dW_r \right|^2 \right).$$

En utilisant (2) et l'inégalité de Doob, on a alors (la constante C changeant de valeur d'une ligne à l'autre)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_{s\wedge\nu_M}|^2\right) &\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + t\int_0^t \mathbb{E}\left((1+|X_{r\wedge\nu_M}|)^2\right) dr + \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{r\leq\nu_M}|\sigma(r,X_r)|^2\right) dr\right), \\
&\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + t\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left(|X_{r\wedge\nu_M}|^2\right)\right) dr + \int_0^t \mathbb{E}\left(|\sigma(r\wedge\nu_M, X_{r\wedge\nu_M})|^2\right) dr\right), \\
&\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + (1+t)\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,r]} |X_{s\wedge\nu_M}|^2\right)\right) dr\right), \\
&\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + T^2 + T + T\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,r]} |X_{s\wedge\nu_M}|^2\right) dr\right).
\end{aligned}$$

Par le Lemme de Gronwall, on a donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_{s\wedge\nu_M}|^2\right) \leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + T + T^2\right)\exp(CT^2),$$

avec C indépendante de M, T et Y.

1.b En utilisant le Lemme de Fatou, on a donc

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{M\to\infty} \sup_{s\in[0,t]} \left(|X_{s\wedge\nu_M}|^2\right)\right) \leq C\left(1+\mathbb{E}(|Y|^2)\right).$$

où C dépend ici de T. Par continuité des trajectoires de (X_t), on sait que presque sûrement, $\lim_{M\to\infty} \nu_M = T$ et donc, dans la limite $M\to\infty$,

$$\sup_{s\in[0,T]} |X_{s\wedge\nu_M}| = \sup_{s\in[0,T\wedge\nu_M]} |X_s| \longrightarrow \sup_{s\in[0,T]} |X_s|.$$

On peut se poser la question du rôle de l'introduction du temps d'arrêt ν_M. Il sert à pouvoir considérer $\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_{s\wedge\nu_M}|^2\right)$ comme une quantité finie, et donc à pouvoir lui appliquer le lemme de Gronwall (dans la question 1.a). On qualifie cette technique de *procédure de localisation.*

1.c On a

$$X_t - X_s = \int_s^t b(r, X_r)\, dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)\, dW_r.$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^2\right) &\le 2\left(\mathbb{E}\left|\int_s^t b(r, X_r)\,dr\right|^2 + \mathbb{E}\left|\int_s^t \sigma(r, X_r)\,dW_r\right|^2\right), \\
&\le C\left((t-s)\int_s^t (1+\mathbb{E}(|X_r|^2))\,dr + \int_s^t \mathbb{E}\left(|\sigma(r,X_r)|^2\right)\,dr\right), \\
&\le C\left((1+\mathbb{E}(|Y|^2))(t-s)^2 + \int_s^t (1+\mathbb{E}(|X_r|^2))\,dr\right), \\
&\le C(1+\mathbb{E}(|Y|^2))\left((t-s)^2 + (t-s)\right), \\
&\le C(1+\mathbb{E}(|Y|^2))(T+1)(t-s),
\end{aligned}
$$

puisque $0 \le s < t \le T$, ce qui permet de conclure.

2.a Il suffit de savoir générer les incréments $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$ qui sont des gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance Δt. Pour la génération de nombres aléatoires distribués suivant une gaussienne, on renvoie au cours.

2.b Il suffit de remarquer que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\tau_t = t_k$. Ceci permet de montrer (5), puis de vérifier que le processus interpolé est bien celui défini dans l'énoncé.

2.c Si $\sigma = 0$ on est ramené au cas d'une équation différentielle ordinaire. On sait que la convergence du schéma d'Euler est d'ordre 1, et donc on s'attendrait à un C/N^2 plutôt qu'un C/N au membre de droite dans (7).

2.d On a

$$X_u = Y + \int_0^u b(s, X_s)\,ds + \int_0^u \sigma(s, X_s)\,dW_s.$$

De même

$$\overline{X}_u = Y + \int_0^u b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})\,ds + \int_0^u \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})\,dW_s.$$

Par différence, on obtient

$$X_u - \overline{X}_u = \int_0^u (b(s, X_s) - b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,ds + \int_0^u (\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,dW_s.$$

On a donc, par Cauchy Schwarz,

$$
\begin{aligned}
|X_u - \overline{X}_u|^2 &\le 2\left(\left|\int_0^u (b(s, X_s) - b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,ds\right|^2 + \left|\int_0^u (\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,dW_s\right|^2\right) \\
&\le 2\left(u\int_0^u |b(s, X_s) - b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})|^2\,ds + \left|\int_0^u (\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,dW_s\right|^2\right)
\end{aligned}
$$

En prenant le sup puis l'espérance, on obtient (par l'inégalité de Doob) :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{u\le t}|X_u - \overline{X}_u|^2\right) &\le 2\left(t\int_0^t \mathbb{E}\left(|b(s, X_s) - b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})|^2\right)\,ds + \mathbb{E}\left(\sup_{u\le t}\left|\int_0^u (\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}))\,dW_s\right|^2\right)\right) \\
&\le C\left(t\int_0^t \mathbb{E}\left(|b(s, X_s) - b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})|^2\right)\,ds + \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|\sigma(s, X_s) - \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})\right|^2\right)\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Il s'agit maintenant d'analyser les différences $\mathbb{E}\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})|^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(\left|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})\right|^2\right)$, qui se traitent de la même façon. On écrit, en utilisant (2)–(6) :

$$\begin{aligned}|b(s,X_s)-b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})|^2 &\leq 3\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,X_s)|^2+|b(\tau_s,X_s)-b(\tau_s,X_{\tau_s})|^2+|b(\tau_s,X_{\tau_s})-b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})|^2\right)\\ &\leq C\left((1+|X_s|)^2(s-\tau_s)^{2\alpha}+|X_s-X_{\tau_s}|^2+|X_{\tau_s}-\overline{X}_{\tau_s}|^2\right)\\ &\leq C\left((1+|X_s|)^2(s-\tau_s)^{2\alpha}+|X_s-X_{\tau_s}|^2+\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right).\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant (3) et la question 1.c :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})|^2\right) &\leq C\left((1+\mathbb{E}(|X_s|^2))(s-\tau_s)^{2\alpha}+\mathbb{E}\left(|X_s-X_{\tau_s}|^2\right)+\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\right)\\ &\leq C\left((1+\mathbb{E}(|Y|^2))(s-\tau_s)^{2\alpha}+(1+\mathbb{E}(|Y|^2))(s-\tau_s)+\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\right)\\ &\leq C\left((s-\tau_s)+\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\right),\end{aligned}$$

car $\alpha>1/2$ par hypothèse. On a inclus les termes en Y dans la constante C. On en déduit :

$$\mathbb{E}\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})|^2\right)\leq C\left(\frac{1}{N}+\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\right).$$

On obtient la même estimée sur $\mathbb{E}\left(\left|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})\right|^2\right)$. Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\leq C\left((t+1)\int_0^t\left(\frac{1}{N}+\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}_u|^2\right)\right)ds\right).$$

On conclut en utilisant le Lemme de Gronwall. La convergence forte est donc d'ordre 1/2.

Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait introduire un temps d'arrêt $\nu_M=\inf\{t\geq 0,|X_t-\overline{X}_t|\geq M\}$ comme dans la question 1.a, faire le calcul sur $X_{t\wedge\nu_M}-\overline{X}_{t\wedge\nu_M}$, puis passer à la limite $M\to\infty$. En effet, on ne sait pas à ce stade que les moments d'ordre 2 de $\overline{X}_t$ sont bornés.

3.a Si f est Lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}(f(X_T))-E(f(\overline{X}_T^N))\right| &\leq \mathbb{E}\left|f(X_T)-f(\overline{X}_T^N)\right|,\\ &\leq C\,\mathbb{E}\left|X_T-\overline{X}_T^N\right|,\\ &\leq C\sqrt{\mathbb{E}\left|X_T-\overline{X}_T^N\right|^2},\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

3.b On peut utiliser une méthode de Monte Carlo, en faisant une moyenne sur plusieurs réalisations indépendantes de la variable aléatoire $\overline{X}_T^N$. Pour construire des réalisations indépendantes, il suffit de considérer des tirages indépendants des couples (Y,W_t) utilisés pour générer les trajectoires $(\overline{X}_t)$.

3.c C'est une formule de Feynman-Kac vu en cours. On a par un calcul d'Itô,

$$du(t,X_t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t,X_t)\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t)\sigma(t,X_t)\,dW_t.$$

Donc, en tenant compte de l'EDP satisfaite par u et en intégrant entre 0 et T,

$$f(X_T) - u(0,y) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t)\sigma(t,X_t)\,dW_t.$$

Par les propriétés de croissance à l'infini de u et σ, et grâce à (4), on sait que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle, ce qui donne le résultat voulu en prenant l'espérance de cette égalité.

3.d C'est une série téléscopique. Le résultat découle donc immédiatement de la question précédente.

3.e Par un calcul d'Itô et en utilisant l'EDS satisfaite par $(\overline{X}_t)$ (cf. 2.b), on a

$$u(t_{k+1},\overline{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k,\overline{X}_{t_k}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e(t,\overline{X}_t)\,dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(t,\overline{X}_t)\sigma(t_k,\overline{X}_{t_k})\,dW_t.$$

Le fait que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle découle des propriétées de σ et u, et du fait que les moments de $\overline{X}_t$ sont bornés, par combinaison de (4) et (8).

3.f On remarque que $e(t_k,\overline{X}_{t_k}) = 0$, étant donnée l'EDP satisfaite par u. Par conséquent, on a (par un calcul d'Itô) :

$$\begin{aligned} e(t,\overline{X}_t) = &\int_{t_k}^{t} \left(\frac{\partial e}{\partial t}(s,\overline{X}_s) + \frac{\sigma^2}{2}(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s,\overline{X}_s) + b(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial e}{\partial x}(s,\overline{X}_s)\right) ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \frac{\partial e}{\partial x}(s,\overline{X}_s)\sigma(t_k,\overline{X}_{t_k})\,dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant une fois de plus les propriétés de croissance à l'infini des fonctions u, b, σ et donc de e, et le fait que les moments de $\overline{X}_t$ sont bornés, on vérifie que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. On obtient donc

$$\mathbb{E}(e(t,\overline{X}_t)) = \int_{t_k}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{\partial e}{\partial t}(s,\overline{X}_s) + \frac{\sigma^2}{2}(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s,\overline{X}_s) + b(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial e}{\partial x}(s,\overline{X}_s)\right) ds.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}(e(t,\overline{X}_t))\,dt \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{\partial e}{\partial t}(s,\overline{X}_s) + \frac{\sigma^2}{2}(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s,\overline{X}_s) + b(t_k,\overline{X}_{t_k})\frac{\partial e}{\partial x}(s,\overline{X}_s)\right) ds. \end{aligned}$$

Une fois encore, l'espérance est bornée, et donc

$$|\mathcal{E}_k| \leq \frac{C}{N^2}$$

ce qui permet de conclure.

3.g Pour obtenir un équivalent de l'erreur, il suffit d'obtenir un équivalent de $\mathcal{E}_k$. Or on a, à $o(\Delta t)$ près, pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{\partial e}{\partial t}(t, \overline{X}_s) + \frac{\sigma^2}{2}(t_k, \overline{X}_{t_k})\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, \overline{X}_t) + b(t_k, \overline{X}_{t_k})\frac{\partial e}{\partial x}(t, \overline{X}_t)\right) \\
&\simeq \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)(t_k, \overline{X}_{t_k})\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)(t_k, \overline{X}_{t_k})\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_k, \overline{X}_{t_k})\right).
\end{aligned}$$

Donc, à $o(\Delta t)$ près,

$$\mathcal{E}_k = \frac{T^2}{2N^2}\mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma^2\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\sigma^4}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma^2 b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_k, \overline{X}_{t_k})\right).$$

On obtient donc que, à $o(\Delta t)$ près,

$$\mathbb{E}(f(\overline{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) \simeq \frac{T^2}{2N}\mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma^2\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\sigma^4}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma^2 b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_k, \overline{X}_{t_k})\right).$$

L'argument peut être itéré pour obtenit un développement limité à tout ordre, sous réserve de régularité suffisante des données, bien sûr.

3.h Comme les constantes C_k dans le développement limité ne dépendent pas de N, on peut obtenir des approximations d'ordre deux en combinant les résultats des schéma avec un pas de temps T/N et $T/(2N)$. Ainsi, par combinaison linéaire, on a

$$\left|2\mathbb{E}(f(\overline{X}_T^{2N})) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T))\right| \leq \frac{C}{N^2}.$$

De même, en combinant un schéma avec N, $2N$ et $4N$ pas de temps, on peut construire un schéma d'ordre trois. On parle de méthode d'extrapolation de Richardson (ou Romberg).

Ceci dit ceci a des limites car en pratique, une erreur statistique intervient également dans le calcul d'une espérance (*via* la méthode de Monte Carlo) et il est donc en général inutile de chercher à augmenter l'ordre de convergence en temps au-delà de $1/N^2$, car l'erreur statistique domine. On peut également invoquer les problèmes de régularité de la solution qui font que la constante en facteur de $1/N^k$ a tendance à augmenter avec l'ordre k.

4.a Comme dans la question 2.d, on a

$$X_t = Y + \int_0^t b(X_s)\, ds + W_t,$$

et

$$\overline{X}_t = Y + \int_0^t b(\overline{X}_{\tau_s})\, ds + W_t.$$

Par différence, on obtient donc

$$X_t - \overline{X}_t = \int_0^t (b(X_s) - b(\overline{X}_{\tau_s}))\, ds.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
|X_t - \overline{X}_t| &= \left| \int_0^t (b(X_s) - b(\overline{X}_{\tau_s}))\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^t (b(X_s) - b(X_{\tau_s}) + b(X_{\tau_s}) - b(\overline{X}_{\tau_s}))\, ds \right| \\
&\le \left| \int_0^t (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))\, ds \right| + \int_0^t |b(X_{\tau_s}) - b(\overline{X}_{\tau_s})|\, ds \\
&\le \left| \int_0^t (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))\, ds \right| + \sup |b'| \int_0^t |X_{\tau_s} - \overline{X}_{\tau_s}|\, ds.
\end{aligned}$$

4.b Par un calcul d'Itô, on a, pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$b(X_s) = b(X_{t_k}) + \int_{t_k}^s \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_{t_k}^s b'(X_r)\, dW_r.$$

Par conséquent, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} (b(X_s) - b(X_{t_k}))\, ds &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{t_k}^s \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_{t_k}^s b'(X_r)\, dW_r \right) ds \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - r) \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - r) b'(X_r)\, dW_r.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^u (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))\, ds &= \int_{t_0}^{t_1} (b(X_s) - b(X_{t_k}))\, ds + \ldots + \int_{\tau_u - \Delta t}^{\tau_u} (b(X_s) - b(X_{t_k}))\, ds \\
&\quad + \int_{\tau_u}^u (b(X_s) - b(X_{t_k}))\, ds \\
&= \int_0^{\tau_u} (\tau_r + \Delta t - r) \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_0^{\tau_u} (\tau_r + \Delta t - r) b'(X_r)\, dW_r \\
&\quad + \int_{\tau_u}^u (u - r) \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_{\tau_u}^u (u - r) b'(X_r)\, dW_r \\
&= \int_0^u (\min(\tau_r + \Delta t, u) - r) \left(bb' + \frac{b''}{2} \right)(X_r)\, dr + \int_0^u (\min(\tau_r + \Delta t, u) - r) b'(X_r)\, dW_r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, un utilisant Cauchy Schwarz et l'inégalité de Doob,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{u \in [0,t]} \left| \int_0^u (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))\, ds \right| \right) &\le \frac{C}{N} \int_0^t \mathbb{E}\left(\left| bb' + \frac{b''}{2} \right| (X_r) \right) dr \\
&\quad + C \sqrt{\int_0^t \mathbb{E}\left(|(\min(\tau_r + \Delta t, u) - r) b'(X_r)|^2 \right) dr} \\
&\le \frac{C}{N} \left(\int_0^t \mathbb{E}\left(\left| bb' + \frac{b''}{2} \right| (X_r) \right) dr + \sqrt{\int_0^t \mathbb{E}\left(|b'(X_r)|^2 \right) dr} \right).
\end{aligned}$$

Etant données les hypothèses sur b, les espérances au membre de droite sont bornés. En repartant de l'inégalité établie en 4.a, on a donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}|X_u-\overline{X}_u|\right)\le\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}\left|\int_0^u(b(X_s)-b(X_{\tau_s}))\,ds\right|\right)+\sup|b'|\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}|X_u-\overline{X}_u|\right)ds$$
$$\le C\left(\frac{1}{N}+\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}|X_u-\overline{X}_u|\right)ds\right).$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure.

4.c Sur un pas de temps, on a

$$X_{t+\Delta t}=X_t+\int_t^{t+\Delta t}b(X_s)\,ds+\int_t^{t+\Delta t}\sigma(X_s)\,dWs$$

La première intégrale est bien approximée à l'ordre 1 par $b(X_t)\,\Delta t$. C'est ce que démontre les deux questions précédentes, et cela correspond également à notre intuition venant de la discrétisation des équations différentielles ordinaires.

En revanche, l'approximation de l'intégrale stochastique par $\sigma(X_t)(W_{t+\Delta t}-W_t)$ est seulement d'ordre 1/2. On peut s'en convaincre en écrivant par exemple

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_t^{t+\Delta t}\sigma(X_s)\,dW_s-\sigma(X_t)(W_{t+\Delta t}-W_t)\right|^2\right)=\mathbb{E}\left(\left|\int_t^{t+\Delta t}(\sigma(X_s)-\sigma(X_t))\,dW_s\right|^2\right)$$
$$=\int_t^{t+\Delta t}\mathbb{E}\left(|\sigma(X_s)-\sigma(X_t)|^2\right)ds$$
$$\simeq C(\Delta t)^{3/2},$$

ce qui donne bien une consistance d'ordre 1/2.

Pour monter en ordre, l'idée habituelle est de faire un développement limité à l'ordre supérieur. Ainsi, au lieu d'approximer $\sigma(X_s)$, pour $s\in[t,t+\Delta t]$, par $\sigma(X_t)$, on écrit qu'à l'ordre Δt :

$$\sigma(X_s)\simeq\sigma(X_t)+\sigma\sigma'(X_t)(W_s-W_t).$$

On obtient alors l'approximation suivante de l'intégrale stochastique :

$$\int_t^{t+\Delta t}\sigma(X_s)\,dW_s\simeq\int_t^{t+\Delta t}\left(\sigma(X_t)+\sigma\sigma'(X_t)(W_s-W_t)\,dW_s\right)$$
$$=\sigma(X_t)(W_{t+\Delta t}-W_t)+\sigma\sigma'(X_t)\int_t^{t+\Delta t}(W_s-W_t)\,dW_s.$$

Cette fois, on a bien

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_t^{t+\Delta t}\sigma(X_s)\,dW_s-\int_t^{t+\Delta t}\left(\sigma(X_t)+\sigma\sigma'(X_t)(W_s-W_t)\,dW_s\right)\right|^2\right)$$
$$=\int_t^{t+\Delta t}\mathbb{E}\left(|\sigma(X_s)-\sigma(X_t)-\sigma\sigma'(X_t)(W_s-W_t)|^2\right)ds$$
$$\simeq C(\Delta t)^2,$$

ce qui donne bien une consistance d'ordre 1.

Pour retrouver l'expression donnée dans l'énoncé, on remarque alors (par un calcul d'Itô) que

$$(W_{t+\Delta t})^2 - (W_t)^2 = 2\int_t^{t+\Delta t} W_s\, dW_s + \Delta t.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t} (W_s - W_t)\, dWs &= \int_t^{t+\Delta t} W_s\, dWs - W_t(W_{t+\Delta t} - W_t) \\ &= \frac{1}{2}\left((W_{t+\Delta t})^2 - (W_t)^2 - \Delta t\right) - W_t(W_{t+\Delta t} - W_t) \\ &= \frac{1}{2}\left((W_{t+\Delta t} - W_t)^2 - \Delta t\right).\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien une approximation d'ordre 1 en écrivant :

$$\int_t^{t+\Delta t} \sigma(X_s)\, dWs \simeq \sigma(X_t)(W_{t+\Delta t} - W_t) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_t)\left((W_{t+\Delta t} - W_t)^2 - \Delta t\right).$$

La preuve de la convergence de ce schéma appelé schéma de Milshtein se fait par des arguments similaires à ceux employés dans la preuve de convergence du schéma d'Euler. Noter qu'on obtient cependant un résultat sur le suprémum de l'espérance, et non plus sur l'espérance du suprémum.