# Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

13 janvier 2010, 09h00 - 12h00.

*Les notes de cours sont autorisées.*

## Problème 1 : Algorithme de Metropolis-Hastings

**1** L'essentiel de cette question a été traité en cours. On trouve

$$r(x) = q(x,x) + \sum_{y \neq x} q(x,y)(1-a(x,y)) = 1 - \sum_{y \neq x} q(x,y)a(x,y).$$

Pour montrer l'ergodicité, il suffit de vérifier l'irréducibilité de la chaîne de Markov, et pour cela, il suffit que $q$ soit un noyau de transition irréductible.

**2.a** Conditionnellement à $\overline{X}_n$, la variable aléatoire $T$ est le premier temps de succès dans une suite d'expériences indépendantes et identiquement distribuées. Conditionnellement à $\overline{X}_n = x$, la loi de $T$ est donc une loi géométrique de paramètre $s(x)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(T = k|\overline{X}_n = x) = (1-s(x))^{k-1}s(x)$, avec

$$s(x) = \mathbb{P}\left(U_n^1 \leq a(x, \overline{X}_{n+1}^1) \,|\, \overline{X}_n = x\right) = \mathbb{E}\left(a(x, \overline{X}_{n+1}^1) \,|\, \overline{X}_n = x\right) = \sum_{y \in \mathcal{S}} a(x,y)q(x,y).$$

En particulier, $\mathbb{E}(T \,|\, \overline{X}_n = x) = 1/s(x)$.

**2.b** On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X}_{n+1} = y \,|\, \overline{X}_n = x) &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{X}_{n+1} = y, \, T = t \,|\, \overline{X}_n = x) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(U_n^1 > a(x, \overline{X}_{n+1}^1), \, \ldots, \, U_n^{t-1} > a(x, \overline{X}_{n+1}^{t-1}), \, U_n^t \leq a(x,y), \, \overline{X}_{n+1}^t = y \,|\, \overline{X}_n = x\right) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(U_n^1 > a(x, \overline{X}_{n+1}^1) \,|\, \overline{X}_n = x\right) \ldots \mathbb{P}\left(U_n^{t-1} > a(x, \overline{X}_{n+1}^{t-1}) \,|\, \overline{X}_n = x\right) \\
&\qquad \mathbb{P}\left(U_n^t \leq a(x,y), \, \overline{X}_{n+1}^t = y \,|\, \overline{X}_n = x\right) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} (1-s(x))^{t-1} a(x,y)q(x,y) \\
&= \frac{a(x,y)q(x,y)}{s(x)}.
\end{aligned}$$

On a donc $p(x,y) = \dfrac{a(x,y)q(x,y)}{s(x)}$.

**2.c** On cherche une mesure de probabilité $\overline{\pi}$ qui vérifie : $\forall (x,y) \in \mathcal{S}^2$,

$$\overline{\pi}(x)p(x,y) = \overline{\pi}(y)p(y,x)$$

soit

$$\overline{\pi}(x)\frac{a(x,y)q(x,y)}{s(x)} = \overline{\pi}(y)\frac{a(y,x)q(y,x)}{s(y)}.$$

En utilisant le fait que $q$ est symétrique, on a donc

$$\overline{\pi}(x)\frac{\min\left(1,\frac{\pi(y)}{\pi(x)}\right)}{s(x)} = \overline{\pi}(y)\frac{\min\left(1,\frac{\pi(x)}{\pi(y)}\right)}{s(y)}.$$

On voit donc qu'en prenant

$$\overline{\pi}(x) = Z^{-1}\, s(x)\pi(x)$$

où $Z = \sum_{x\in\mathcal{S}} s(x)\pi(x)$, $\overline{\pi}$ est bien une mesure réversible.

**2.d** On a $\overline{\pi} = \pi$ si $s$ ne dépend pas de $x$. Un exemple est donné par l'algorithme de rejet pour échantillonner une mesure uniforme sur un sous-ensemble de $\mathcal{S}$. Ainsi, si $\pi(x) = 1_{\mathcal{S}'}(x)/|\mathcal{S}'|$, où $\mathcal{S}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}$, on a, pour $x\in\mathcal{S}'$, $a(x,y) = 1_{\mathcal{S}'}(y)$. De plus, dans ce cas, la fonction de proposition $q(x,y) = q(y)$ ne dépend pas de $x$, et on a donc, pour $x\in\mathcal{S}'$,

$$s = \sum_{y\in\mathcal{S}'} q(y)$$

qui est bien indépendant de $x$.

**3.a** Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X_1)\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \varphi(y)\mathbb{P}(X_1 = y\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)).$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = y\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)) &= \mathbb{P}(X_1 = y,\, U_0^1 \le a(x,x^1)\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = y,\, U_0^1 > a(x,x^1)\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)) \\ &= a(x,x^1)1_{y=x^1} + (1-a(x,x^1))1_{y=x}.\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X_1)\,|\,(X_0,X_1^1) = (x,x^1)) &= a(x,x^1)\varphi(x^1) + (1-a(x,x^1))\varphi(x) \\ &= \varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1).\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi_{\mathrm{WR}}(X_0,X_1^1)) &= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\,\mathbb{P}((X_0,X_1^1) = (x,x^1)) \\ &= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \mathbb{E}(\varphi(X_1)|(X_0,X_1^1) = (x,x^1))\,\mathbb{P}((X_0,X_1^1) = (x,x^1)) \\ &= \mathbb{E}(\varphi(X_1)).\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on vérifie que $\varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1) = \mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})|(X_n,X_{n+1}^1) = (x,x^1))$ et donc que

$$\mathbb{E}(\varphi_{\mathrm{WR}}(X_n,X_{n+1}^1)) = \mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(I_N^{\mathrm{WR}}(\varphi)\right) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left(\varphi_{\mathrm{WR}}(X_n, X_{n+1}^1)\right)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left(\varphi(X_{n+1})\right)\\ &= \mathbb{E}\left(I_N(\varphi)\right).\end{aligned}$$

**3.b** A l'étape $n$, pour définir $Z_{n+1}$, on a seulement besoin de connaître $Z_n$, et donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ définit bien une chaîne de Markov. Sa probabilité de transition est donnée par :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Z_{n+1} = (y, y^1)|Z_n = (x, x^1))\\ &\quad= \mathbb{P}(X_{n+1} = y, X_{n+2}^1 = y^1|X_n = x, X_{n+1}^1 = x^1)\\ &\quad= \mathbb{P}(X_{n+1} = y, X_{n+2}^1 = y^1, a(x, x^1) \leq U_n^1|X_n = x, X_{n+1}^1 = x^1)\\ &\qquad+ \mathbb{P}(X_{n+1} = y, X_{n+2}^1 = y^1, a(x, x^1) > U_n^1|X_n = x, X_{n+1}^1 = x^1)\\ &\quad= a(x, x^1)q(x^1, y^1)1_{y=x^1} + (1 - a(x, x^1))q(x, y^1)1_{y=x}.\end{aligned}$$

On a donc

$$p_{\mathrm{WR}}\left((x, x^1), (y, y^1)\right) = a(x, x^1)q(x^1, y^1)1_{y=x^1} + (1 - a(x, x^1))q(x, y^1)1_{y=x}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) &= \sum_{x^1\in\mathcal{S}}\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x, X_{n+1}^1 = x^1)\,\mathbb{P}(X_{n+1}^1 = x^1|X_n = x)\\ &= \sum_{(x^1,y^1)\in\mathcal{S}^2}\mathbb{P}(Z_{n+1} = (y, y^1)|Z_n = (x, x^1))\,\mathbb{P}(X_{n+1}^1 = x^1|X_n = x)\end{aligned}$$

et donc

$$p_{\mathrm{MH}}(x, y) = \sum_{(x^1,y^1)\in\mathcal{S}^2} p_{\mathrm{WR}}\left((x, x^1), (y, y^1)\right)\, q(x, x^1).$$

**3.c** Noter que la chaîne $(Z_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans l'espace d'état :

$$\Sigma = \{(x, x^1) \in \mathcal{S}^2,\ q(x, x^1) > 0\}.$$

Elle est irréductible sur $\Sigma$. En effet, en partant d'un point $(x, x^1)$, en utilisant l'irréducibilité de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, on peut atteindre avec probabilité positive en un nombre fini d'itérations tout couple $(y, y^1)$ pour lequel $q(y, y^1) \neq 0$. Etant donné que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet $\pi$ comme mesure invariante, on s'attend à ce que

$$\pi_{\mathrm{WR}}(x, x^1) = \pi(x)q(x, x^1)$$

soit mesure invariante. Vérifions-le (en utilisant la symétrie du noyau $q$ et le fait que

$\pi(x)a(x,y) = \pi(y)a(y,x))$ :

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \pi_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\, p_{\mathrm{WR}}\left((x,x^1),(y,y^1)\right) \\
&\qquad= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \pi(x)q(x,x^1)\left(a(x,x^1)q(x^1,y^1)1_{y=x^1} + (1-a(x,x^1))q(x,y^1)1_{y=x}\right) \\
&\qquad= \sum_{x\in\mathcal{S}^2} \pi(x)q(x,y)a(x,y)q(y,y^1) + \sum_{x^1\in\mathcal{S}^2} \pi(y)q(y,x^1)\,(1-a(y,x^1))q(y,y^1) \\
&\qquad= \sum_{x\in\mathcal{S}^2} \pi(y)q(y,x)a(y,x)q(y,y^1) + \pi(y)q(y,y^1) - \sum_{x^1\in\mathcal{S}^2} \pi(y)q(y,x^1)a(y,x^1)q(y,y^1) \\
&\qquad= \pi(y)q(y,y^1) = \pi_{\mathrm{WR}}(y,y^1).
\end{aligned}$$

Puisque $(Z_n)_{n\geq 0}$ est irréductible sur $\Sigma$, $\pi_{\mathrm{WR}}$ est l'unique mesure de probabilités invariante de la chaîne.

La mesure $\pi_{\mathrm{WR}}$ n'est pas réversible pour la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$. En effet, si c'était le cas, on aurait

$$\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{WR}}}\left(Z_0 = (x,x^1), Z_1 = (y,y^1)\right) = \mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{WR}}}\left(Z_0 = (y,y^1), Z_1 = (x,x^1)\right),$$

où $\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{WR}}}$ indique que l'on considère la probabilité avec une condition initiale $Z_0$ distribuée selon $\pi_{\mathrm{WR}}$. Or, si $x^1 = y$, $x \neq x^1$ (et $q(x,x^1) > 0$), $y \neq y^1$ (et $q(y,y^1) > 0$), et $x \neq y^1$, alors $\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{WR}}}\left(Z_0 = (x,x^1), Z_1 = (y,y^1)\right) > 0$ tandis que $\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{WR}}}\left(Z_0 = (y,y^1), Z_1 = (x,x^1)\right) = 0$.

**3.d** On a (en utilisant à nouveau la symétrie du noyau $q$ et le fait que $\pi(x)a(x,y) = \pi(y)a(y,x))$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\,\pi_{\mathrm{WR}}(x,x^1) &= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \left(a(x,x^1)\varphi(x^1) + (1-a(x,x^1))\varphi(x)\right)\,\pi(x)q(x,x^1) \\
&= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} a(x,x^1)\varphi(x^1)\pi(x)q(x,x^1) \\
&\quad + \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi(x)\pi(x)q(x,x^1) - \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} a(x,x^1)\varphi(x)\pi(x)q(x,x^1) \\
&= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} a(x^1,x)\varphi(x^1)\pi(x^1)q(x^1,x) \\
&\quad + \sum_{x\in\mathcal{S}} \varphi(x)\pi(x) - \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} a(x,x^1)\varphi(x)\pi(x)q(x,x^1) \\
&= \sum_{x\in\mathcal{S}} \varphi(x)\pi(x) = I(\varphi).
\end{aligned}$$

Par le théorème ergodique, étant donné que la chaîne $(Z_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et admet $\pi_{\mathrm{WR}}$ comme mesure invariante, on a, p.s.

$$\lim_{N\to\infty} I_N^{\mathrm{WR}}(\varphi) = \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\,\pi_{\mathrm{WR}}(x,x^1) = I(\varphi).$$

**3.e** Si $X_0$ a pour loi $\pi$, alors, pour tout $n$, $(X_n, X^1_{n+1})$ a pour loi $\pi_{\mathrm{WR}}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\pi(\varphi_{\mathrm{WR}}(X_n, X^1_{n+1})) &= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi^2_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\pi(x)q(x,x^1) - \left(\sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \varphi_{\mathrm{WR}}(x,x^1)\pi(x)q(x,x^1)\right)^2 \\ &= \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \left(a(x,x^1)\varphi(x^1) + (1-a(x,x^1))\varphi(x)\right)^2 \pi(x)q(x,x^1) - (I(\varphi))^2 .\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, le premier terme se majore par :

$$\begin{aligned}&\sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \left(a(x,x^1)\varphi(x^1) + (1-a(x,x^1))\varphi(x)\right)^2 \pi(x)q(x,x^1) \\ &\qquad \le \sum_{(x,x^1)\in\mathcal{S}^2} \left(a(x,x^1)\varphi^2(x^1) + (1-a(x,x^1))\varphi^2(x)\right) \pi(x)q(x,x^1) \\ &\qquad = I(\varphi^2)\end{aligned}$$

en utilisant le calcul de la question 3.d. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\pi(\varphi_{\mathrm{WR}}(X_n, X^1_{n+1})) &\le I(\varphi^2) - (I(\varphi)) \\ &= \mathrm{Var}_\pi(\varphi(X_{n+1})).\end{aligned}$$

Ceci ne permet pas de comparer les variances asymptotiques des deux estimateurs $I_N(\varphi)$ et $I^{\mathrm{WR}}_N(\varphi)$ car les variances asymptotiques contiennent également des termes de covariances impliquant les chaînes de Markov à deux itérations différentes.

*Pour plus d'informations sur l'algorithme "waste recycling Monte Carlo", on peut consulter : [D. Frenkel, Waste recycling Monte Carlo,* Lect. Notes in Phys.*, 703 :127–137, Springer, 2006] et [J.F. Delmas, B. Jourdain, Does waste-recycling really improve Metropolis-Hastings Monte Carlo algorithm ?,* `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00117197/fr/`*, à paraître dans Journal of Applied Probability].*

## Problème 2 : Interprétation probabiliste de problèmes elliptiques et dynamique réduite

**1.a** La variable aléatoire $\tau_{\mathcal{D}}$ est bien un temps d'arrêt car $\{\tau_D > t\} = \{\forall s \in [0,t], X_s \in \mathcal{D}\} = \{\forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}, X_s \in \mathcal{D}\}$ est bien mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(X_s)_{0\le s\le t}$.

On vérifie que, pour $\nu > \beta \|\partial_{x_1} V\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$ et $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\left(-\nabla V \cdot \nabla h + \beta^{-1}\Delta h\right)(x) &= \mu\nu \exp(\nu x_1)\left(\partial_{x_1} V(x) - \beta^{-1}\nu\right) \\ &\le \mu\nu \exp(\nu x_1)\left(\|\partial_{x_1} V\|_{L^\infty(\mathcal{D})} - \beta^{-1}\nu\right) \\ &\le \mu\nu \exp\left(\nu \inf_{x\in\mathcal{D}} x_1\right)\left(\|\partial_{x_1} V\|_{L^\infty(\mathcal{D})} - \beta^{-1}\nu\right).\end{aligned}$$

Comme $\nu > \beta\|\partial_{x_1} V\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$, le second membre est négatif, et pour $\mu$ assez grand, il est bien inférieur à $-1$. Par un calcul d'Itô, on a

$$d(h(X_t)) = \left(-\nabla h \cdot \nabla V + \beta^{-1}\Delta h\right)(X_t)\,dt + \sqrt{2\beta^{-1}}\nabla h(X_t)\cdot dB_t.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} h(X_{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n}) &= h(X_0) + \int_0^{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n} \left(-\nabla h\cdot\nabla V + \beta^{-1}\Delta h\right)(X_s)\,ds + \sqrt{2\beta^{-1}}\int_0^{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n}\nabla h(X_s)\cdot dB_s \\ &\leq h(X_0) - \tau_{\mathcal{D}}\wedge n + \sqrt{2\beta^{-1}}\int_0^n 1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla h(X_s)\cdot dB_s. \end{aligned}$$

L'espérance du dernier terme est nul car, comme $\tau_{\mathcal{D}}$ est un temps d'arrêt, $1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla h(X_t)$ est un processus progressivement mesurable, qui de plus vérifie $\mathbb{E}\left(\int_0^n \left|1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla h\right|^2(X_t)dt\right) < \infty$ puisque $\nabla h$ est continue sur $\overline{\mathcal{D}}$ et donc bornée. On a donc

$$\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{D}}\wedge n) \leq h(x) - \mathbb{E}_x\left(h(X_{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n})\right)$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{D}}\wedge n) \leq 2\sup_{x\in\mathcal{D}}|h(x)|.$$

En passant à la limite $n\to\infty$, le théorème de convergence monotone permet de conclure

$$\mathbb{E}_x(\tau_{\mathcal{D}}) \leq 2\sup_{x\in\mathcal{D}}|h(x)| < \infty.$$

En particulier, $\mathbb{P}_x$-p.s., $\tau_{\mathcal{D}}<\infty$.

**1.b** Par un calcul d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d(u(X_t)) &= \left(-\nabla u\cdot\nabla V + \beta^{-1}\Delta u\right)(X_t)\,dt + \sqrt{2\beta^{-1}}\nabla u(X_t)\cdot dB_t \\ &= \sqrt{2\beta^{-1}}\nabla u(X_t)\cdot dB_t. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left(u(X_{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n})\right) &= u(x) + \sqrt{2\beta^{-1}}\,\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n}\nabla u(X_t)\cdot dB_t\right) \\ &= u(x) + \sqrt{2\beta^{-1}}\,\mathbb{E}\left(\int_0^n 1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla u(X_t)\cdot dB_t\right). \end{aligned}$$

Le second terme est nul car, comme $\tau_{\mathcal{D}}$ est un temps d'arrêt, $1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla u(X_t)$ est un processus progressivement mesurable, qui de plus vérifie $\mathbb{E}\left(\int_0^n \left|1_{t<\tau_{\mathcal{D}}}\nabla u\right|^2(X_t)dt\right) < \infty$ puisque $\nabla u$ est continue sur $\overline{\mathcal{D}}$ et donc bornée.

On conclut ensuite par convergence dominée, puisque $u(X_{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n})$ est majoré p.s. par $\|u\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$ et que $u(X_{\tau_{\mathcal{D}}\wedge n})$ converge presque sûrement vers $u(X_{\tau_{\mathcal{D}}})$ quand $n$ tend vers l'infini (puisque $\tau_{\mathcal{D}}$ est fini presque sûrement et $u$ est continue).

**1.c** Puisque $X_{\tau_{\mathcal{D}}}\in\partial\mathcal{D}$ p.s., on a p.s.

$$u(X_{\tau_{\mathcal{D}}}) = f(X_{\tau_{\mathcal{D}}})$$

et donc on en déduit que $u(x) = \mathbb{E}_x\left(f(X_{\tau_{\mathcal{D}}})\right)$. Ceci implique un résultat d'unicité pour les solutions régulières de l'EDP.

**2.a** En utilisant le résultat de la question 1.c, on sait que $p(x) = \mathbb{E}_x(f(X_\tau))$, où $f$ est une fonction qui vaut 0 sur $\partial A$ et 1 sur $\partial B$. En particulier, $f(X_\tau) = 1_{T_B < T_A}$, puisque $X_\tau \in \partial A \cup \partial B$. Par conséquent

$$\begin{aligned} p(x) &= \mathbb{E}_x\left(1_{T_B<T_A}\right) \\ &= \mathbb{P}_x\left(T_B < T_A\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, $p(x)$ représente la probabilité, pour le processus $X_t$ qui part du point $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$, de toucher $B$ avant $A$.

**2.b** Par continuité des trajectoires, il est clair que la première sous-variété touchée après $\Sigma(z_0)$ est nécessairement $\Sigma(z_1)$, et, que la première sous-variété touchée après $\Sigma(z_{m+1})$ est nécessairement $\Sigma(z_m)$. Plus généralement, la première sous-variété touchée après $\Sigma(z_i)$ est nécessairement $\Sigma(z_{i+1})$ ou $\Sigma(z_{i-1})$. Le fait que p.s. $T_A < \infty$ et $T_B < \infty$ quelque soit le point de départ de la trajectoire implique, par continuité des trajectoire, que p.s. $T_n < \infty$ pour tout $n \geq 0$.

**2.c** En utilisant les résultats de la question 2.a, on sait que $\tilde{p}$ est solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\nabla V \cdot \nabla \tilde{p} + \beta^{-1}\Delta \tilde{p} = 0 \text{ sur } \displaystyle\bigcup_{z_{k-1}<z<z_{k+1}} \Sigma(z), \\ \tilde{p} = 0 \text{ sur } \Sigma(z_{k-1}), \\ \tilde{p} = 1 \text{ sur } \Sigma(z_{k+1}). \end{cases}$$

Par conséquent, par unicité de la solution régulière à cette EDP, on vérifie facilement que

$$\tilde{p}(x) = \frac{p(x) - z_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}}.$$

En particulier, pour tout $x \in \Sigma(z_k)$

$$\tilde{p}(x) = \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}},$$

indépendemment de la position exacte de $x \in \Sigma(z_k)$. Par un raisonnement équivalent, on montre que pour tout $x \in \Sigma(z_k)$, la probabilité de toucher $\Sigma(z_{k-1})$ avant $\Sigma(z_{k+1})$ est $\dfrac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} - z_{k-1}}$.

**2.d** Les résultats de la question précédente montre qu'à l'étape $n$, il suffit de connaître la valeur de $I_n$ pour construire $I_{n+1}$. En effet, la loi de $I_{n+1}$ sachant $(X_t)_{t \leq T_n}$ ne dépend que de $I_n$, et en particulier pas de la position précise de $X_{T_n}$ dans $\Sigma(z_{I_n})$. Les valeurs pour $q(i,j)$ se déduisent de l'expression obtenue pour $\tilde{p}$ à la question 2.c.

**2.e** Soit $F(t) = P(T > t)$. La fonction $F$ est bornée, continue à droite, et vérifie $F(t + s) = F(t)F(s)$. On vérifie alors que pour $k$ et $p$ deux entiers, $F(k) = F(1)^k$, puis que $F(k/p) = F(1)^{k/p}$, et on prolonge enfin par continuité à droite pour obtenir $F(t) = F(1)^t$ pour tout $t > 0$. Ceci caractérise les variables exponentielles (sauf si $F(1) = 0$ auquel cas $T$ est identiquement nulle).

Le processus $J_t$ représente la dernière nouvelle sous-variété $(\Sigma(z_k))_{0 \leq k \leq m+1}$ visitée. Sous les hypothèses données dans l'énoncé, c'est bien un processus de Markov, car, si à un instant $t_0$, on a $J_{t_0} = i$, on sait que la prochaine sous-variété visitée sera la sous-variété $\Sigma_{z_j}$ avec probabilité $q(i, j)$ (cf. la question 2.d), et que le temps qu'il reste à attendre pour atteindre la prochaine nouvelle sous-variété est exponentiellement distribué, avec un paramètre qui ne dépend que de $i$ (et pas de $t_0$, c'est-à-dire pas du temps déjà écoulé dans l'état $i$).

*On trouvera des informations supplémentaires sur l'interprétation probabiliste de la solution d'un problème elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet dans les ouvrages suivants : [I. Karatzas and S.E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer-Verlag, 1988] (Section 5.7)* et *[R. Dautray, Méthodes probabilistes pour les équations de la physique, Eyrolles, 1989] (Section 6).*

*L'application mentionnée en Section 2 est tirée de l'article : [E. Vanden-Eijnden, M. Venturoli, G. Ciccotti and R. Elber, On the assumptions underlying milestoning, J. Chem. Phys., 129 :174102, 2008]. On construit ainsi une dynamique réduite, (un processus de Markov à valeurs dans un espace d'états fini), à partir d'une dynamique à espace d'états continu. La dynamique réduite permet d'extraire les informations importantes de la dynamique continue, et est typiquement beaucoup plus facile à simuler.*