

Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

12 janvier 2011, 09h00 - 12h00.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice : Variables antithétiques

1 Si U est de loi uniforme sur $[0, 1]$, $1-U$ aussi. On a donc clairement $I = \mathbb{E} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right)$. La loi forte des grands nombres montre donc que $I_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(U_i) + f(1-U_i))$ converge vers $\mathbb{E} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right) = I$. De plus, le théorème central limite donne une estimation de l'erreur sous la forme d'un intervalle de confiance :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|I_{2n} - I| \leq \frac{\sigma a}{\sqrt{n}} \right) = \int_{-a}^a \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

où

$$\sigma^2 = \text{Var} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right).$$

En particulier, l'erreur est d'autant plus petite que σ^2 est petit.

2 On a

$$\text{Var}(I_{2n}) = \frac{\text{Var} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right)}{n}$$

et

$$\text{Var}(J_{2n}) = \frac{\text{Var}(f(U))}{2n}.$$

Par conséquent, $\text{Var}(I_{2n}) \leq \text{Var}(J_{2n})$ si et seulement si $\text{Var} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right) \leq \text{Var}(f(U))/2$. Or, on a

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{1}{2}(f(U) + f(1-U)) \right) &= \frac{1}{4} \text{Var}(f(U) + f(1-U)) \\ &= \frac{1}{4} \left[\text{Var}(f(U)) + \text{Var}(f(1-U)) + 2\text{Cov}(f(U), f(1-U)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Var}(f(U)) + \text{Cov}(f(U), f(1-U)) \right] \\ &= \text{Var}(f(U))/2 + \text{Cov}(f(U), f(1-U))/2. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3 Si f est monotone, étant donné que $u \mapsto 1-u$ est décroissante, on a $(f(U_1) - f(U_2))(f(1-U_1) - f(1-U_2)) \leq 0$ p.s., donc en espérance. Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbb{E} \left[(f(U_1) - f(U_2))(f(1-U_1) - f(1-U_2)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(U_1)f(1-U_1) \right] - \mathbb{E} \left[f(U_1)f(1-U_2) \right] - \mathbb{E} \left[f(U_2)f(1-U_1) \right] + \mathbb{E} \left[f(U_2)f(1-U_2) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(U)f(1-U) \right] - I^2 - I^2 + \mathbb{E} \left[f(U)f(1-U) \right] \\ &= 2\text{Cov}(f(U), f(1-U)). \end{aligned}$$

En pratique, on a donc intérêt, quand la fonction f est monotone, et à nombre d'appels à la fonction f fixé, à utiliser l'estimateur I_{2n} plutôt que J_{2n} . Cette méthode est appelée méthode de réduction de variance par variables antithétiques, et admet des généralisations en dimension plus grande (quand $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$).

Problème : Homogénéisation périodique

1.1 C'est l'équation de Kolmogorov backward, que l'on écrit ici en temps forward puisque les coefficients b et σ ne dépendent pas du temps :

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathcal{L}u \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{T}^d, \\ u(0, x) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

1.2 C'est l'équation de Kolmogorov forward, ou de Fokker-Planck. Si on note $\psi(t, dy)$ la loi de Y_t^x à l'instant t , on a :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \mathcal{L}^* \psi \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{T}^d, \\ \psi(0, y) = \delta_x(dy) \text{ pour } y \in \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

2.1 On a (avec ici et dans toute la suite sommation sur les indices répétés, et ∇_i qui désigne la dérivée partielle par rapport à la i -ème composante de la variable d'espace dans \mathbb{T}^d) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* m &= \nabla_i(-b_i m) + \nabla_{i,j}(a_{i,j} m) \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j \ln m)m) - \nabla_i((\nabla_j a_{i,j})m) + \nabla_{i,j}(a_{i,j} m) \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j m)) - \nabla_i((\nabla_j a_{i,j})m) + \nabla_i(\nabla_j(a_{i,j} m)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La mesure m est donc une mesure invariante pour la dynamique. Autrement dit, pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall t \geq 0, \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{E}(\varphi(Y_t^x))m(x) dx = \int_{\mathbb{T}^d} \varphi m.$$

2.2 On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* \varphi &= \nabla_i(-b_i \varphi) + \nabla_{i,j}(a_{i,j} \varphi) \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j \ln m)\varphi) - \nabla_i((\nabla_j a_{i,j})\varphi) + \nabla_{i,j}(a_{i,j} \varphi) \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j \ln m)\varphi) + \nabla_i(a_{i,j} \nabla_j \varphi) \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j \ln m)\varphi) + \nabla_i[a_{i,j} \nabla_j((\varphi/m)m)] \\ &= -\nabla_i(a_{i,j}(\nabla_j \ln m)\varphi) + \nabla_i[a_{i,j}(\varphi/m)\nabla_j m] + \nabla_i[a_{i,j} m \nabla_j(\varphi/m)] \\ &= \nabla_i[a_{i,j} m \nabla_j(\varphi/m)]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi m \mathcal{L} \psi &= \int_{\mathbb{T}^d} \psi \mathcal{L}^*(\varphi m) \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \psi \nabla_i[a_{i,j} m \nabla_j \varphi] \\ &= - \int_{\mathbb{T}^d} a_{i,j}(\nabla_i \psi)(\nabla_j \varphi) m. \end{aligned}$$

Etant donné que cette expression est symétrique en φ et ψ , on obtient aussi l'égalité $\int_{\mathbb{T}^d} \varphi m \mathcal{L}\psi = \int_{\mathbb{T}^d} \psi m \mathcal{L}\varphi$. Autrement dit, l'opérateur \mathcal{L} est symétrique pour le produit scalaire de $L^2(m(x) dx)$

2.3 Soit $\varphi \in H^1(\mathbb{T}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{T}^d} \varphi m = 0$. On a

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{T}^d} (\varphi \mathcal{L}\varphi) m &= \int_{\mathbb{T}^d} a_{i,j} (\nabla_i \varphi) (\nabla_j \varphi) m \\
&\geq \alpha \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 m \\
&\geq \alpha \min m \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 \\
&\geq \frac{\alpha \min m}{C_p} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\varphi - \int_{\mathbb{T}^d} \varphi \right)^2 \\
&\geq \frac{\alpha \min m}{C_p \max m} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\varphi - \int_{\mathbb{T}^d} \varphi \right)^2 m \\
&= \frac{\alpha \min m}{C_p \max m} \int_{\mathbb{T}^d} \left[\varphi^2 + \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi \right)^2 \right] m \\
&\geq \frac{\alpha \min m}{C_p \max m} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^2 m
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $\lambda_0 \geq \frac{\alpha \min m}{C_p \max m} > 0$.

2.4 L'espace fonctionnel

$$V = \left\{ \varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^2 m + \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 m < \infty, \int_{\mathbb{T}^d} \varphi m = 0 \right\}$$

muni du produit scalaire $(\varphi, \psi)_V = \int_{\mathbb{T}^d} \varphi \psi m + \int_{\mathbb{T}^d} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi m$ est bien un espace de Hilbert car (i) $\tilde{V} = \{ \varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^2 m + \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 m < \infty \}$ est clairement un Hilbert (c'est un espace de Sobolev H^1 pour la mesure $m(x) dx$ sur \mathbb{T}^d) et (ii) l'application $\varphi \in \tilde{V} \mapsto \int \varphi m$ est continue, donc V est un fermé de \tilde{V} .

On considère la forme bilinéaire symétrique

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{T}^d} (a \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) m.$$

C'est une forme continue (par Cauchy-Schwarz) et coercive (par (2)). En effet,

$$\begin{aligned}
a(\varphi, \varphi) &= \int_{\mathbb{T}^d} (a \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) m \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{T}^d} (a \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) m + \int_{\mathbb{T}^d} (a \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) m \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\alpha \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 m + \lambda_0 \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^2 m \right) \\
&\geq \frac{\min(\alpha, \lambda_0)}{2} \left(\int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \varphi|^2 m + \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^2 m \right).
\end{aligned}$$

On introduit également la forme linéaire

$$l(\varphi) = - \int_{\mathbb{T}^d} f \varphi m$$

qui est clairement continue sur V , dès que $\int f^2 m < \infty$, par exemple.

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique fonction $\chi \in V$ telle que,

$$\forall \varphi \in V, a(\chi, \varphi) = l(\varphi).$$

Etant donné que $\int f m = 0$, l'égalité est également vraie pour φ une fonction constante, et donc on vérifie qu'en fait,

$$\forall \psi \in H^1(\mathbb{T}^d), a(\chi, \psi) = l(\psi).$$

Noter que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{T}^d)}$ est équivalent à la norme $\|\cdot\|_V$. Autrement dit, $H^1(\mathbb{T}^d) = V + \{\text{les fonctions constantes}\}$.

Par intégration par parties, on a donc $\mathcal{L}\chi = f$ au sens des distributions, et donc dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ étant donné que f est (au moins) $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Par des arguments standards de la théorie des problèmes linéaires elliptiques, on a que χ est plus régulière si les données (f , m et a) sont plus régulières.

C'est un exemple classique d'un problème régi par une alternative de Fredholm : le noyau de l'opérateur \mathcal{L} est non vide (c'est toutes les fonctions constantes), et il faut donc que le second membre f satisfasse une relation dite de compatibilité (l'orthogonalité par rapport aux constantes) pour qu'il y ait une solution au problème. Pour avoir l'unicité, il faut fixer la constante additive, ce que l'on fait ici en imposant $\int \chi m = 0$, mais on pourrait tout aussi bien fixer $\int \chi m = c_0$, avec c_0 une constante qui ne joue aucun rôle dans la suite (en particulier a^ ne dépend pas de c_0).*

2.5 On sait que $\partial_t v_i = \mathcal{L}v_i$ pour $i = 1, 2$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\mathbb{T}^d} v_1(t-s, x) v_2(s, x) m(x) dx &= - \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{L}v_1(t-s, x) v_2(s, x) m(x) dx + \int_{\mathbb{T}^d} v_1(t-s, x) \mathcal{L}v_2(s, x) m(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie de \mathcal{L} dans $L^2(m(x) dx)$. En intégrant cette relation pour $s \in [0, t]$, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}^d} v_1(t, x) f_2(x) m(x) dx = \int_{\mathbb{T}^d} f_1(x) v_2(t, x) m(x) dx$$

soit, en utilisant le fait que $v_i(t, x) = \int_{\mathbb{T}^d} f_i(y) q(t, x, y) dy$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} f_1(y) f_2(x) q(t, x, y) m(x) dx dy &= \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} f_1(x) f_2(y) q(t, x, y) m(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} f_1(y) f_2(x) q(t, y, x) m(y) dx dy. \end{aligned}$$

Comme les fonctions f_1 et f_2 sont quelconques, on en déduit le résultat

$$q(t, x, y) m(x) = q(t, y, x) m(y).$$

C'est une relation d'équilibre détaillé (*detailed balance*) qui traduit la réversibilité du processus Y_t par rapport à la mesure invariante m .

3.1 Il suffit de vérifier que le second membre $l \cdot b$ est bien d'intégrale nulle par rapport à $m(x) dx$. Ceci découle du fait que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} b_i m &= \int_{\mathbb{T}^d} (a_{i,j} \nabla_j \ln m + \nabla_j (a_{i,j})) m \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} (a_{i,j} \nabla_j m + \nabla_j (a_{i,j}) m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par intégration par parties.

3.2 On a

$$\begin{aligned} d\chi_l(Y_t^0) &= \mathcal{L}\chi_l(Y_t^0) dt + (\nabla\chi_l)^T \sigma(Y_t^0) dW_t \\ &= l \cdot b(Y_t^0) dt + (\nabla\chi_l)^T \sigma(Y_t^0) dW_t. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d(l \cdot Y_t^0) &= l \cdot dY_t^0 \\ &= l \cdot b(Y_t^0) dt + l^T \sigma(Y_t^0) dW_t \\ &= d\chi_l(Y_t^0) + (l - \nabla\chi_l(Y_t^0))^T \sigma(Y_t^0) dW_t, \end{aligned}$$

ce qui donne, une fois intégré en temps :

$$l \cdot Y_t^0 = \chi_l(Y_t^0) - \chi_l(0) + \int_0^t (l - \nabla\chi_l(Y_s^0)) \cdot \sigma(Y_s^0) dW_s.$$

En utilisant la définition de Z_t^ε , on a donc :

$$\begin{aligned} l \cdot Z_t^\varepsilon &= \varepsilon l \cdot Y_{t/\varepsilon^2}^0 \\ &= \varepsilon \left[\chi_l(Y_{t/\varepsilon^2}^0) - \chi_l(0) \right] + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} (l - \nabla\chi_l(Y_s^0)) \cdot \sigma(Y_s^0) dW_s \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3.3 Comme b est supposé régulier, la solution χ_l du problème de Poisson est (au moins) continue donc bornée sur \mathbb{T}^d . On en déduit que R_t^ε converge vers 0 presque sûrement quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Concernant M_t^ε , on a

$$\begin{aligned} \langle M^\varepsilon \rangle_t &= \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [(l - \nabla\chi_l(Y_s^0))^T \sigma(Y_s^0)] [(l - \nabla\chi_l(Y_s^0))^T \sigma(Y_s^0)]^T ds \\ &= 2\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} (l - \nabla\chi_l(Y_s^0))^T a(Y_s^0) (l - \nabla\chi_l(Y_s^0)) ds \\ &= 2t \frac{\varepsilon^2}{t} \int_0^{t/\varepsilon^2} (l - \nabla\chi_l(Y_s^0))^T a(Y_s^0) (l - \nabla\chi_l(Y_s^0)) ds \end{aligned}$$

et donc, presque sûrement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle M^\varepsilon \rangle_t = 2t \int_{\mathbb{T}^d} (l - \nabla \chi_l)^T a (l - \nabla \chi_l) m.$$

3.4 On a, par un calcul d'Itô (en utilisant le fait que la variation quadratique de $\langle N \rangle_t$ est nulle) :

$$\begin{aligned} d \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) &= \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) d(iN_t + \langle N \rangle_t/2) + (1/2) \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) d\langle (iN + \langle N \rangle/2) \rangle_t \\ &= i \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) dN_t \\ &\quad + (1/2) \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) d\langle N \rangle_t + (i^2/2) \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) d\langle N \rangle_t \\ &= i \exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) dN_t. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2) = \exp(iN_0 + \langle N \rangle_0/2) + \int_0^t i \exp(iN_s + \langle N \rangle_s/2) dN_s$$

ce qui donne, en prenant l'espérance (puisque $N_0 = \langle N \rangle_0 = 0$) :

$$\mathbb{E} [\exp(iN_t + \langle N \rangle_t/2)] = 1.$$

On vérifie en effet que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t |i \exp(iN_s + \langle N \rangle_s/2) \sigma_s|^2 ds &= \mathbb{E} \int_0^t |\exp(\langle N \rangle_s/2) \sigma_s|^2 ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \left| \exp\left(\int_0^s \sigma_s \sigma_s^T ds/2\right) \sigma_s \right|^2 ds \\ &< \infty \end{aligned}$$

puisque σ_s est borné, ce qui implique que $\mathbb{E} \left(\int_0^t i \exp(iN_s + \langle N \rangle_s/2) dN_s \right) = 0$.

3.5 On applique le résultat précédent à $N_t = \theta M_t^\varepsilon$, ce qui est licite car a et $\nabla \chi_l$ sont des fonctions régulières donc bornées. On a donc,

$$\mathbb{E} (\exp(i\theta M_t^\varepsilon + \theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t/2)) = 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} (\exp(i\theta M_t^\varepsilon)) - \exp(-\theta^2 a_l t)| &= |\mathbb{E} [\exp(i\theta M_t^\varepsilon) (1 - \exp(\theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t/2) \exp(-\theta^2 a_l t))]| \\ &\leq \mathbb{E} |\exp(i\theta M_t^\varepsilon) (1 - \exp(\theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t/2) \exp(-\theta^2 a_l t))| \\ &= \mathbb{E} |1 - \exp(\theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t/2) \exp(-\theta^2 a_l t)|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a, presque sûrement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(\theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t/2) = \exp(\theta^2 a_l t)$$

où $a_l = \int_{\mathbb{T}^d} (l - \nabla \chi_l)^T a (l - \nabla \chi_l) m$. En utilisant le fait que a et χ_l sont des fonctions régulières, on a, presque sûrement,

$$\begin{aligned} |\langle M^\varepsilon \rangle_t| &= t \frac{\varepsilon^2}{t} \int_0^{t/\varepsilon^2} |(l - \nabla \chi_l(Y_s^0))^T a(Y_s^0) (l - \nabla \chi_l(Y_s^0))| ds \\ &\leq Ct, \end{aligned}$$

où C dépend de $|l|$, $\max_{\mathbb{T}^d} |\nabla \chi_l|$ et $\max_{\mathbb{T}^d} |a|$.

Donc, par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} |1 - \exp(\theta^2 \langle M^\varepsilon \rangle_t / 2) \exp(-\theta^2 a_l t)| = 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} (\exp(i\theta M_t^\varepsilon)) = \exp(-\theta^2 a_l t).$$

On reconnaît au membre de droite la fonction caractéristique d'une gaussienne de variance $2a_l t$. La convergence (simple) des fonctions caractéristiques implique la convergence en loi et on en déduit donc que M_t^ε converge en loi vers une gaussienne centrée et de variance $2a_l t$. Par conséquent, par le théorème de Slutsky, $l \cdot Z_t^\varepsilon = R_t^\varepsilon + M_t^\varepsilon$ converge en loi vers une gaussienne centrée et de variance $2a_l t$ (puisque R_t^ε converge vers 0).

3.6 On observe que l'application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}

$$(l_1, l_2) \mapsto \int_{\mathbb{T}^d} (l_1 - \nabla \chi_{l_1})^T a (l_2 - \nabla \chi_{l_2}) m$$

est une forme bilinéaire symétrique positive (car χ_l dépend linéairement de l). Par conséquent, il existe une matrice symétrique positive a^* telle que pour tout l_1, l_2 ,

$$\int_{\mathbb{T}^d} (l_1 - \nabla \chi_{l_1})^T a (l_2 - \nabla \chi_{l_2}) m = (l_1)^T a^* l_2.$$

En particulier, $a_l = l^T a^* l$.

Noter qu'une matrice symétrique A est complètement déterminée par l'application $F : l \mapsto l^T A l$ où l parcourt l'ensemble des vecteurs unitaires, mais que ceci n'est pas vrai pour une matrice non symétrique, puisque F ne voit que la partie symétrique de A . Il suffit de remarquer que $\nabla F(l) = (A + A^T) l$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} (\exp(i v^T (Z_t^\varepsilon))) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\exp \left(i |v| \left(\frac{v}{|v|} \right)^T (Z_t^\varepsilon) \right) \right) \\ &= \exp(-|v|^2 a_{v/|v|} t) \\ &= \exp \left(-|v|^2 \left(\frac{v}{|v|} \right)^T a^* \left(\frac{v}{|v|} \right) t \right) \\ &= \exp(-v^T a^* v t). \end{aligned}$$

Par conséquent, Z_t^ε converge en loi vers un vecteur gaussien centré et de matrice de variance-covariance $2a^*t$, ce qui coïncide bien avec la loi de la variable aléatoire σ^*W_t , si $a^* = \frac{1}{2}\sigma^*(\sigma^*)^T$. Noter qu'ici, on raisonne à t fixé (et non pas sur la loi des processus).

3.7 On a

$$Z_t^\varepsilon = \varepsilon Y_{t/\varepsilon^2}^0 = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} b(Y_s^0) ds + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(Y_s^0) dW_s.$$

Un changement de variable

$$r = \varepsilon^2 s$$

donne

$$Z_t^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \int_0^t b(Y_{r/\varepsilon^2}^0) dr + \varepsilon \int_0^t \sigma(Y_{r/\varepsilon^2}^0) d[W_{r/\varepsilon^2}].$$

Or $W_{r/\varepsilon^2} = \varepsilon^{-1}B_r$ où B_r est un mouvement brownien d -dimensionnel. On a donc

$$Z_t^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \int_0^t b(\varepsilon^{-1}Z_r^\varepsilon) dr + \int_0^t \sigma(\varepsilon^{-1}Z_r^\varepsilon) dB_r.$$

Pour prouver rigoureusement le changement de variable dans l'intégrale stochastique, on peut passer par une discrétisation en temps : pour $(G_k)_{k \geq 0}$ une suite i.i.d. de vecteurs gaussiens centrés de matrice de variance-covariance l'identité (dans $\mathbb{R}^{d \times d}$), on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(Y_s^0) dW_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \sigma(Y_{kt/(\varepsilon^2 n)}^0) \sqrt{\frac{t}{\varepsilon^2 n}} G_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(Y_{kt/(\varepsilon^2 n)}^0) \sqrt{\frac{t}{n}} G_k \\ &= \int_0^t \sigma(Y_{r/\varepsilon^2}^0) dB_r. \end{aligned}$$

3.8 Il suffit de remarquer que l'application

$$J : \varphi \in V \mapsto \int_{\mathbb{T}^d} (l - \nabla \varphi)^T a (l - \nabla \varphi) m$$

est une fonctionnelle convexe continue qui croît à l'infini quand $\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{T}^d)}$ croît à l'infini. Par conséquent, elle admet un unique minimum χ qui est caractérisé par les équations d'Euler-Lagrange : pour tout $\varphi \in V$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} (l - \nabla \chi)^T a \nabla \varphi m = 0$$

soit

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\nabla \chi)^T a \nabla \varphi m = \int_{\mathbb{T}^d} l^T a \nabla \varphi m.$$

On observe que le second membre se réécrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} l_i a_{i,j} \nabla_j \varphi m &= - \int_{\mathbb{T}^d} \varphi \nabla_j (l_i a_{i,j} m) \\
&= - \int_{\mathbb{T}^d} l_i \varphi [\nabla_j (a_{i,j} m) + a_{i,j} \nabla_j m] \\
&= - \int_{\mathbb{T}^d} l_i \varphi [\nabla_j (a_{i,j}) + a_{i,j} \nabla_j \ln m] m \\
&= - \int_{\mathbb{T}^d} l_i \varphi b_i m \\
&= - \int_{\mathbb{T}^d} l \cdot b \varphi m.
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\chi \in V$ satisfait : pour tout $\varphi \in V$,

$$- \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{L} \chi \varphi m = - \int_{\mathbb{T}^d} l \cdot b \varphi m,$$

ce qui montre que $\chi = \chi_l$ et donc

$$\min_{\varphi \in J} J(\varphi) = J(\chi_l) = \int_{\mathbb{T}^d} (l - \nabla \chi_l)^T a (l - \nabla \chi_l) m = l^T a^* l.$$

4.1 Etant donnée l'EDS satisfaite par $Z_t^{\varepsilon, x}$, on a

$$\partial_t u^\varepsilon = \varepsilon^{-1} b(\varepsilon^{-1} \cdot) \cdot \nabla u^\varepsilon + a(\varepsilon^{-1} \cdot) : \nabla^2 u^\varepsilon,$$

avec comme condition initiale $u^\varepsilon(0, x) = f(x)$.

4.2 Par la convergence en loi des variables aléatoires $Z_t^{\varepsilon, x}$, on a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x) = u^*(t, x)$$

avec $u^*(t, x) = \mathbb{E}(f(x + \sigma^* W_t))$. En particulier, la fonction u^* est solution de l'EDP :

$$\partial_t u^* = a^* : \nabla^2 u^*,$$

avec comme condition initiale $u^*(0, x) = f(x)$.

Il existe aussi des approches purement EDPistes pour traiter ce type de problème (problème d'homogénéisation, cf. par exemple le cours de M2 de G. Allaire). Ce sujet d'examen est basé en partie sur les notes de cours de S. Olla¹, où il est montré qu'on peut en fait prouver la convergence du processus Z_t^ε vers le processus $\sigma^ W_t$ (et non pas simplement la convergence des marginales en temps). Pour une preuve complète des résultats énoncés dans l'examen, on renvoie par exemple à l'article [E. Pardoux, Homogenization of Linear and Semilinear Second Order Parabolic PDEs with Periodic Coefficients : A Probabilistic Approach, Journal of Functional Analysis, 167, 498-520, 1999].*

¹cf. <http://www.ceremade.dauphine.fr/~olla/lho.ps>