Examen du cours de M2 :
Méthodes numériques probabilistes

9 janvier 2013, 09h00 - 12h00.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 : Echantillonnage d'importance

On souhaite calculer par une méthode de Monte Carlo $I = \mathbb{E}(f(X))$ où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de densité p, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}(f^2(X)) < \infty$. On veut utiliser une méthode d'échantillonnage d'importance.

1 Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité q, tel que $q(x) = 0 \Rightarrow f(x)p(x) = 0$. On note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{fp}{q}(Y_i)$.

1.1 Que vaut $\mathbb{E}(S_n)$? Donner une expression pour $\mathrm{Var}(S_n)$ en fonction de n et

$$v_1(q) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f^2p^2}{q} - I^2.$$

Donner un intervalle de confiance asymptotique à 95% approchant I, en fonction de S_n, $v_1(q)$ et n.

1.2 Montrer que $v_1(q) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|p\right)^2 - I^2$, et que le minimum de $v_1(q)$ sur toutes les densités q est atteint pour $q_1^*(x) = |f|(x)p(x)/\int_{\mathbb{R}} |f|p$. Comment choisir q de manière à minimiser la longueur de l'intervalle de confiance, à n fixé ?

2 Soit $\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives et intégrables telles que $\tilde{q}(x) = 0 \Rightarrow \tilde{p}(x) = 0$. On note $p(x) = \tilde{p}(x)/\int_{\mathbb{R}} \tilde{p}$, $q(x) = \tilde{q}(x)/\int_{\mathbb{R}} \tilde{q}$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité q. Dans cette partie, on suppose qu'on ne connaît pas de manière explicite les constantes de normalisation $\int_{\mathbb{R}} \tilde{p}$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde{q}$.

2.1 On considère l'estimateur $R_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n \frac{f\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)}$. Que vaut la limite (p.s.) de R_n quand $n \to \infty$? Quel est l'intérêt pratique de l'estimateur R_n par rapport à l'estimateur S_n ?

2.2 On note $\bar{f}(x) = f(x) - I$. Montrer que $\sqrt{n}(R_n - I)$ converge en loi var $\mathcal{N}(0, v_2(q))$ avec

$$v_2(q) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{f}^2p^2}{q}.$$

En déduire un intervalle de confiance asymptotique à 95% approchant I, en fonction de R_n, $v_2(q)$ et n.

2.3 En s'inspirant de la question 1.2, expliciter $\tilde{q}$ qui permet de minimiser la longueur de l'intervalle de confiance construit à la question 2.2, à n fixé.

2.4 Donner le nom d'une méthode qui permet d'échantillonner (pas nécessairement par des réalisations indépendantes) la mesure $q(x)\,dx$, sans connaître la constante de normalisation $\int_{\mathbb{R}} \tilde{q}$.

3 On note $v_1^* = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|p\right)^2 - I^2$ et $v_2^* = \left(\int_{\mathbb{R}} |\bar{f}|p\right)^2$.

3.1 Que représentent v_1^* et v_2^* ? Montrer que $v_1^* = 4\left(\int_{\mathbb{R}} f^+p\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f^-p\right)$ et $v_2^* = 4\left(\int_{\mathbb{R}} \bar{f}^+p\right)^2$, où $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = \max(-x,0)$ désignent la partie positive et la partie négative respectivement.

3.2 On note $\mathrm{Supp}(p) = \{x, p(x) > 0\}$. Dans le cas où f est de signe constant sur $\mathrm{Supp}(p)$ (mais n'est pas une constante), montrer que $v_2^* > v_1^*$.

3.3 On considère le cas particulier où $f(x) = 1_{x\geq 0} + x1_{x<0}$ et $p(x) = \frac{1}{b-a}1_{(a,b)}(x)$, avec $a < 0 < b$ et $b > a^2/2$. En calculant v_1^* et v_2^*, montrer qu'on peut avoir $v_1^* > v_2^*$ pour certaines valeurs de a et b.

3.4 Que peut-on en conclure sur les estimateurs S_n et R_n ?

Exercice 2 : Itô versus Stratonovich

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré, et W_t est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien.

1 Soit X_t un processus continu à valeurs réelles tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t (X_s)^2\, ds\right) < \infty$ pour tout t. On rappelle que l'intégrale d'Itô est définie par :

$$\int_0^t X_s\, dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{it/n}(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On rappelle également la définition de la variation quadratique

$$\langle X, X\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{(i+1)t/n} - X_{it/n})^2 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et la formule de polarisation : $\langle X, W\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle X+W, X+W\rangle_t - \langle X, X\rangle_t - \langle W, W\rangle_t\right)$. La fonction $t \mapsto \langle X, W\rangle_t$ est à variations finies comme différence de deux fonctions croissantes.

1.1 Montrer que

$$\mathcal{I}_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(X_{it/n} + X_{(i+1)t/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n})$$

est bien définie dans $L^2(\Omega)$ et que $\mathcal{I}_t = \int_0^t X_t\, dW_t + \frac{1}{2}\langle X, W\rangle_t$. Dans la suite, on note

$$\mathcal{I}_t = \int_0^t X_s \circ dW_s.$$

1.2 Que valent $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dW_s\right)$ et $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s \circ dW_s\right)$?

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_t) \circ dW_t.$$

3 On suppose que X_t satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t) \circ dW_t$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières.

3.1 Montrer que

$$dX_t = \left(b + \frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)(X_t)\, dt + \sigma(X_t) dW_t.$$

3.2 On suppose que X_t admet une densité $\psi(t, x)$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que ψ satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t \psi = \partial_x \left(-b\psi + \frac{\sigma}{2}\partial_x(\sigma\psi)\right).$$

3.3 On suppose dans cette question que $X_0 = 0$, $b = 0$ et $\sigma > 0$. On a donc $X_t = \int_0^t \sigma(X_s) \circ dW_s$. On note $\Sigma(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma}(x) dx$. Montrer que $d\Sigma(X_t) = dW_t$. On déduire que $X_t = \Sigma^{-1}(W_t)$.

Exercice 3 : Identité de Jarzynski

On considère une fonction régulière $V : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda, x) & \mapsto & V(\lambda, x) \end{array} \right.$. On note

$$Z_\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-V(\lambda, x))\, dx$$

que l'on suppose fini pour tout $\lambda \in [0, 1]$. L'objectif de cet exercice est de décrire une méthode pour calculer le rapport Z_1/Z_0. On note dans la suite $q_\lambda(x) = Z_\lambda^{-1} \exp(-V(\lambda, x))$.

On introduit une fonction régulière déterministe $\Lambda : [0, T] \to [0, 1]$ telle que $\Lambda(0) = 0$ et $\Lambda(T) = 1$, pour $T > 0$ fixé. Soit X_t une processus tel que X_0 a pour densité q_0 et

$$dX_t = -\nabla_x V(\Lambda(t), X_t)\, dt + \sqrt{2} dW_t. \tag{1}$$

On introduit également l'opérateur différentiel $A_\lambda = -\nabla_x V(\lambda, \cdot) \cdot \nabla + \Delta$.

1 Soit $t \in [0, T]$ fixé et $w(s, x)$ une solution régulière de l'équation aux dérivées partielles : pour $s \in (0, t)$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_s w(s, x) + A_{\Lambda(s)} w(s, x) - (\partial_\lambda V)(\Lambda(t), x)\Lambda'(s) w(s, x) = 0, \\ w(t, x) = \varphi(x), \end{array} \right.$$

où φ est une fonction régulière. En supposant que $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\lambda, x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d, \partial_\lambda V(\lambda, x) \geq \alpha$, et que $\exists C > 0, \forall (\lambda, x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d, |\nabla_x w(\lambda, x)| \leq C$, montrer que

$$w(s,x) = \mathbb{E}\left(\varphi\left(X_t^{s,x}\right) \exp\left(-\int_s^t \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x}) \Lambda'(u)\, du\right)\right)$$

où $(X_t^{s,x})_{t \in [s,T]}$ désigne la solution de (1) telle que $X_s^{s,x} = x$.

2 En supposant que pour $s \in (0,t)$, la formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-V(\Lambda(s), x)) \Delta w(s,x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \exp(-V(\Lambda(s), x)) \cdot \nabla w(s,x)\, dx$$

est vérifiée, montrer que

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^d} w(s,x) \exp(-V(\Lambda(s), x))\, dx = 0.$$

3 En déduire que

$$\frac{Z_{\Lambda(t)}}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) q_{\Lambda(t)}(x)\, dx = \mathbb{E}\left(\varphi(X_t) \exp\left(-\mathcal{W}_t\right)\right)$$

où $\mathcal{W}_t = \int_0^t \partial_\lambda V(\Lambda(s), X_s) \Lambda'(s)\, ds$, et X_t désigne la solution de (1) avec X_0 de densité q_0.
Indication : On rappelle que, par la propriété de Markov, $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\mathcal{F}((X_s^{0,x})_{s \in (0,t)})\right) q_0(x)\, dx = \mathbb{E}\left(\mathcal{F}((X_s)_{s \in (0,t)})\right)$, où $\mathcal{F} : \mathcal{C}((0,t), \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ est une fonction test mesurable bornée.

4 Donner une méthode de Monte Carlo pour calculer Z_1/Z_0.

5 Montrer que $\mathbb{E}(\mathcal{W}_T) \geq -\ln(Z_1/Z_0)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

6 On considère dans cette question le cas particulier $d = 1$, $V(\lambda, x) = \frac{1}{2}(x - \lambda L)^2$ et $\Lambda(t) = t/T$, pour $L > 0$ une constante fixée.

6.1 Ecrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par $Q_t = X_t - vt$ où $v = L/T$. Montrer que

$$Q_t = (Q_0 + v) \exp(-t) - v + \sqrt{2} \int_0^t \exp(-(t-s))\, dW_s.$$

6.2 Montrer que

$$\int_0^t \int_0^s \exp(-(s-r))\, dW_r\, ds = W_t - \int_0^t \exp(-(t-r)\, dW_r.$$

En déduire que

$$\mathcal{W}_t = -v(Q_0 + v)\left(1 - \exp(-t)\right) + v^2 t - \sqrt{2} v W_t + \sqrt{2} v \int_0^t \exp(-(t-r)) dW_r.$$

Quelle est la loi de $\mathcal{W}_t$?

6.3 Vérifier que $Z_1/Z_0 = \mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W}_T))$. Calculer $\mathbb{E}(\mathcal{W}_T) + \ln(Z_1/Z_0)$ et $\mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W}_T))$.

6.4 Discuter la variance de l'estimateur de Z_1/Z_0 dans les limites $T \to 0$ et $T \to \infty$ (à L fixé).