Examen du cours de M2 :
Méthodes numériques probabilistes

15 janvier 2014, 09h00 - 12h00.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice : équations différentielles stochastiques et temps de sortie

On considère X_t^x un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t^x = \alpha\, dt + dB_t, \\ X_0^x = x, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}$ est une condition initiale déterministe et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un paramètre réel non nul.

1 Donner une formule explicite pour la solution X_t^x. Quelle est la loi de X_t^x ?

2 Soit $a < b$ deux réels, $\tau_a^x = \inf\{t \geq 0, X_t^x = a\}$, $\tau_b^x = \inf\{t \geq 0, X_t^x = b\}$ et $\tau^x = \min(\tau_a^x, \tau_b^x)$.

2.1 On considère une fonction régulière $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} \alpha u'(x) + \dfrac{1}{2} u''(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in (a, b) \\ u(a) = g, \quad u(b) = d \end{cases}$$

où $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière et $(g, d) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler la formule qui permet d'écrire $u(x)$ comme une moyenne sur la trajectoire $(X_t^x)_{0 \leq t \leq \tau^x}$, pour $x \in [a, b]$.

2.2 En utilisant la question 2.1, donner une formule explicite de $\mathbb{P}(\tau_b^x < \tau_a^x)$, en fonction de α, a, b et $x \in [a, b]$. Calculer $\lim_{a \to -\infty} \mathbb{P}(\tau_b^x < \tau_a^x)$ et interpréter le résultat.

On considère maintenant Y_t^y un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dY_t^y = rY_t^y\, dt + Y_t^y dB_t, \\ Y_0^y = y, \end{cases}$$

où $y > 0$ est une condition initiale déterministe positive et $r \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ un paramètre réel différent de $1/2$.

3 En supposant que, presque sûrement, Y_t^y est strictement positif pour tout $t \geq 0$, écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par $\ln(Y_t^y)$. En déduire une formule explicite pour Y_t^y.

4 Soit $0 < c < d$, $\sigma_c^y = \inf\{t \geq 0, Y_t^y = c\}$, $\sigma_d^y = \inf\{t \geq 0, Y_t^y = d\}$ et $\sigma^y = \min(\sigma_c^y, \sigma_d^y)$. En utilisant le résultat de la question 2.2, donner une formule analytique pour $\mathbb{P}(\sigma_d^y < \sigma_c^y)$ pour $y \in [c, d]$. En considérant la limite $c \to 0$, montrer que si $r > 1/2$ presque sûrement, Y_t^y n'atteint jamais zéro. Que dire si $r < 1/2$?

Problème : Simulation d'évènements rares

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de densité $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$. Soit $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction à valeurs réelles strictement positives, et $a \in \mathbb{R}_+$ un seuil fixé. On s'intéresse à l'estimation de la probabilité :

$$p = \mathbb{P}(V(X) > a)$$

que l'on suppose très petite. En pratique, la fonction V représente typiquement une fonction de mesure d'un risque, a un seuil associé, et p est donc une probabilité de défaillance.

1 On propose d'utiliser dans un premier temps une méthode de Monte Carlo très simple, basée sur l'estimateur :

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{V(X^i)>a}$$

où $(X^i)_{i\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi $q(x)\,dx$. Que vaut la limite presque sûre de P_n quand $n \to \infty$? Calculer la variance $\mathrm{Var}(P_n)$ en fontion de p et n. Comment se comporte l'erreur relative $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(P_n)}}{p}$ dans la limite $p \to 0$? Quelles sont les conséquences pratiques de ce comportement asymptotique ?

2 On applique maintenant une méthode d'échantillonnage d'importance, en introduisant une densité de probabilité $\tilde{q} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, et en considérant l'estimateur

$$\tilde{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{q(\tilde{X}^i)}{\tilde{q}(\tilde{X}^i)} 1_{V(\tilde{X}^i)>a}$$

où $(\tilde{X}^i)_{i\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi $\tilde{q}(x)\,dx$. Pour que $\tilde{P}_n$ soit bien défini, on suppose que $\tilde{q}$ vérifie la propriété : $\{x, \tilde{q}(x) = 0\} \subset \{x, q(x)1_{V(x)>a} = 0\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\tilde{P}_n) = p$ et que, presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_n = p$. Calculer la variance $\mathrm{Var}(\tilde{P}_n)$. Comment choisir la densité $\tilde{q}$ de manière à minimiser cette variance ? Discuter les difficultés liées à l'implémentation pratique de cette méthode.

3 Dans cette partie, on introduit une méthode de *splitting* pour estimer p.

3.1 Soit $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a$ une subdivision de l'intervalle $[0, a]$. Montrer que

$$p = \prod_{j=1}^{m} p_j$$

où $p_j = \mathbb{P}(V(X) > a_j | V(X) > a_{j-1})$.

3.2 Pour $j \in \{1, \ldots, m\}$, on suppose que l'on sait simuler une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_j^i)_{i\geq 1}$ de loi $q_{a_{j-1}}(x)\,dx$ avec, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$q_b(x) = \frac{q(x)1_{V(x)>b}}{\int q(x)1_{V(x)>b}\,dx}. \quad (1)$$

On suppose de plus que les variables aléatoires $(X_j^i)_{i\geq 1, j\in\{1,\ldots,m\}}$ sont indépendantes. On considère alors l'estimateur

$$\bar{P}_n = \prod_{j=1}^m \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{V(X_j^i)>a_j}.$$

Montrer que $\mathbb{E}(\bar{P}_n) = p$ et que, presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} \bar{P}_n = p$. Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\bar{P}_n) = mp^2\left(-1 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}\right).$$

3.3 Montrer que pour tout $p_1, \ldots, p_m$ strictement positifs et tels que $\prod_{j=1}^m p_j = p$,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} \geq \frac{1}{p^{1/m}},$$

et que le minimum est atteint dans le cas $p_1 = \ldots = p_m = p^{1/m}$. Dans la suite, on note

$$\alpha = p^{1/m}.$$

Comment faut-il choisir les niveaux $a_1, \ldots, a_m$ pour minimiser la variance de $\bar{P}_n$ dans l'asymptotique $n \to \infty$? Vérifier que si $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = \alpha = p^{1/m}$,

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\bar{P}_n) = \frac{p^2 \ln p}{\ln \alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Comment choisir α pour réduire la variance dans l'asymptotique $n \to \infty$?

3.4 Discuter les difficultés liées à l'implémentation pratique de cette méthode.

4 L'objectif de cette section est d'étudier un algorithme qui permet de générer les niveaux a_j de manière à réaliser approximativement $p_1 = \ldots = p_m = \alpha = 1 - 1/n$ (et donc le nombre de niveaux m sera tel que, approximativement, $(1-1/n)^m = p$). Plus précisément, on considère l'algorithme de *splitting* adaptatif suivant, qui fait évoluer un ensemble de n variables aléatoires :

- **Initialisation** : A l'itération $j = 0$, générer n variables aléatoires i.i.d. $(X_0^i)_{1\leq i\leq n}$ de loi $q(x)\,dx$ et considérer :

$$A_0 = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} V(X_0^i) \text{ et } I_0 = \arg\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} V(X_0^i).$$

- **Itérations** : A l'itération $j \geq 1$, les variables aléatoires $(X_j^i)_{1\leq i\leq n}$ sont obtenues à partir de la configuration précédente $(X_{j-1}^i)_{1\leq i\leq n}$ de la façon suivante :
  - On remplace la particule I_{j-1} par une nouvelle variable aléatoire de loi $q_{A_{j-1}}(x)\,dx$ (définie par l'équation (1)), et on ne modifie pas les autres :

$$X_j^{I_{j-1}} \sim q_{A_{j-1}}(x)\,dx \text{ et } X_j^i = X_{j-1}^i \text{ pour } i \neq I_{j-1}.$$

  - On introduit :

$$A_j = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} V(X_j^i) \text{ et } I_j = \arg\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} V(X_j^i).$$

– **Critère d'arrêt** : L'algorithme est arrêté dès que $A_j > a$. On note $\hat{J}_n = \min\{j \geq 0, A_j > a\}$ et $\hat{P}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\hat{J}_n}$.

Noter que la suite des niveaux $(A_j)_{j\geq 1}$ est une suite aléatoire.

4.1 Soit $F(y) = \mathbb{P}(V(X) \leq y)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $V(X)$. Soit $\Lambda(y) = -\ln(1 - F(y))$. Vérifier que Λ est une fonction croissante et positive, $\Lambda(0) = 0$ et $\Lambda(a) = -\ln p$.

4.2 Dans toute la suite, on suppose que la fonction de répartition F est continue. On note, pour $u \in (0, 1]$, $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq u\}$ l'inverse généralisé de F. Montrer que $F(F^{-1}(u)) = u$. En déduire que $F(V(X))$ est de loi uniforme sur $(0, 1)$, et que $\Lambda(V(X))$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Remarque : L'hypothèse F continue permet de s'assurer que les I_j sont bien définis, car les $\arg\min_{i\in\{1,\dots,n\}} V(X_j^i)$ *contiennent bien un unique élément presque sûrement.*

4.3 Soit $b \in \mathbb{R}$ et Y une variable aléatoire de loi $q_b(y)\,dy$ (définie par l'équation (1)). Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\Lambda(V(Y)) > z) = \exp(\Lambda(b) - \max(z, \Lambda(b))).$$

4.4 Rappeler pourquoi si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors, pour toute fonction mesurable bornée f,

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \mathbb{E}(g(X)) \text{ avec } g(x) = \mathbb{E}(f(x, Y)).$$

4.5 Montrer que les variables aléatoires $(\Lambda(V(X_1^i)) - \Lambda(A_0))_{1\leq i\leq n}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, et sont indépendantes de $\Lambda(A_0)$, une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre n.

Indication : on pourra par exemple prouver que pour tout $z_1, \dots, z_n, z$ des réels positifs,

$$\mathbb{P}(\Lambda(V(X_1^1))-\Lambda(A_0) > z_1, \dots, \Lambda(V(X_1^n))-\Lambda(A_0) > z_n, \Lambda(A_0) > z) = \exp(-(z_1+\dots+z_n+nz)).$$

4.6 Montrer que pour tout $j \geq 1$, les variables aléatoires $(\Lambda(V(X_j^i)) - \Lambda(A_{j-1}))_{1\leq i\leq n}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, et sont indépendantes de $(\Lambda(A_{k-1}) - \Lambda(A_{k-2}))_{1\leq k\leq j}$, des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre n (avec la convention $A_{-1} = 0$).

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur j.

4.7 En déduire la loi de $\hat{J}_n$ et montrer que

$$\mathbb{E}(\hat{P}_n) = p.$$

4.8 Calculer la variance de $\hat{P}_n$. Comment se comporte l'erreur relative $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_n)}}{p}$ dans la limite $p \to 0$. Commenter ce résultat, ainsi que les difficultés liées à l'implémentation pratique de cet algorithme.