Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

16 janvier 2015, 13h30 - 16h30.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 : Stratification

1 Il suffit de considérer $\hat{I}^{\mathrm{MC}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ pour des X_k i.i.d. de même loi que X. On sait que $\hat{I}^{\mathrm{MC}}$ converge presque sûrement vers I (loi forte des grands nombres) et par le théorème central limite, on peut construire un intervalle de confiance de longueur $\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}}$, ce qui donne une expression de l'erreur.

2.1 On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(f(X)) &= \mathbb{E}(f^2(X)) - (\mathbb{E}(f(X)))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X \in A_i)\mathbb{E}(f^2(X)|X \in A_i) - \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X \in A_i)\mathbb{E}(f(X)|X \in A_i)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\mu_i\right)^2.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, on a donc :

$$\mathrm{Var}(f(X)) = \sum_{i=1}^{m} p_i\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\mu_i - \sum_{j=1}^{m} p_j\mu_j\right)^2.$$

Le premier terme représente la somme des variances sur chacune des strates. Le second terme peut aussi être interprété comme une variance pour une variable aléatoire discrète qui prend la valeur μ_i avec probabilité p_i ($i \in \{1, \dots, m\}$).

2.2 Pour tout i, on a $\mathbb{E}(\hat{I}_i) = \mathbb{E}(f(X_1^i)) = \mathbb{E}(f(X)|X \in A_i) = \mu_i$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{I}) &= \sum_{i=1}^{m} p_i\mathbb{E}(\hat{I}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X \in A_i)\mathbb{E}(f(X)|X \in A_i) \\
&= \mathbb{E}(f(X)).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout i, dans la limite $n_i \to \infty$, $\hat{I}_i$ converge presque sûrment vers μ_i par la loi forte des grands nombres. Par conséquent, dans la limite $\min_{1\le i\le m} n_i \to \infty$, $\hat{I}$ converge presque sûrement vers $\sum_{i=1}^{m} p_i\mu_i = I$.

2.3 Par indépendance des variables aléatoires $(X_k^i)_{i\in\{1,\dots,m\},\, k\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{I}) &= \sum_{i=1}^m p_i^2 \mathrm{Var}(\hat{I}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i}.\end{aligned}$$

3.1 Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m p_i\sigma_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i\sigma_i}{\sqrt{n_i}}\sqrt{n_i}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i^2\sigma_i^2}{n_i}\right)\left(\sum_{i=1}^m n_i\right) \\ &= n\sum_{i=1}^m \frac{p_i^2\sigma_i^2}{n_i}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Var}(\hat{I}) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^m p_i\sigma_i\right)^2$$

et on a égalité si et seulement si $n_i = n_i^\star = n\,\frac{p_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^m p_j\sigma_j}$ (cas d'égalité de Cauchy Schwarz). En pratique, l'allocation optimale nécessite de connaître les variance σ_i^2, ce qui n'est pas très réaliste.

Remarque : En pratique, $n_i^\star = n\,\frac{p_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^m p_j\sigma_j}$ n'est pas un entier. Il faut donc plutôt considérer des entiers $\tilde{n}_i$ proches de $n_i^\star$ Dans ce cas, on a

$$\mathrm{Var}(\hat{I}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^m p_i\sigma_i\right)^2 + \sum_{i=1}^m p_i^2\sigma_i^2\left(\frac{1}{\tilde{n}_i} - \frac{1}{n_i^\star}\right)$$

et dans la limite $n\to\infty$, le second terme est négligeable par rapport au premier (typiquement d'ordre $1/n^2$).

3.2 Comme $n_i = np_i$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{I}) &= \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2\sigma_i^2}{n_i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m p_i\sigma_i^2.\end{aligned}$$

En comparant avec le résultat de la question 2.3, on a donc $n\mathrm{Var}(\hat{I}) \leq \mathrm{Var}(f(X))$. Cela implique que l'allocation proportionnelle donne un estimateur de variance plus petite que l'estimateur de Monte Carlo standard $\hat{I}^{\mathrm{MC}}$ introduit à la question 1, puisque $\mathrm{Var}\hat{I}^{\mathrm{MC}} = \mathrm{Var}(f(X))/n$.

Pour énoncer un théorème central limite, on considère (en utilisant le fait que $I = \sum_{i=1}^{m} p_i \mathbb{E}(fX_1^i))$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\hat{I} - I\right) &= \sum_{i=1}^{m} p_i \sqrt{n} \left(\frac{1}{np_i} \sum_{k=1}^{np_i} f(X_k^i) - \mathbb{E}(fX_1^i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i}\sqrt{np_i} \left(\frac{1}{np_i} \sum_{k=1}^{np_i} f(X_k^i) - \mathbb{E}(fX_1^i) \right).\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots m\}$, $\sqrt{np_i}\left(\frac{1}{np_i}\sum_{k=1}^{np_i} f(X_k^i) - \mathbb{E}(fX_1^i)\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne G_i centrée et de variance σ_i^2. De plus, par l'indépendance des échantillons $(X_k^i)_{i\in\{1,\dots,m\},k\geq 1}$, on en déduit que le vecteur

$$\left(\sqrt{np_1}\left(\frac{1}{np_1} \sum_{k=1}^{np_1} f(X_k^1) - \mathbb{E}(fX_1^1) \right), \dots, \sqrt{np_m}\left(\frac{1}{np_m} \sum_{k=1}^{np_m} f(X_k^m) - \mathbb{E}(fX_1^m) \right) \right)$$

converge en loi vers le vecteur gaussien $(G_1, \dots, G_m)$ avec les $(G_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ indépendants. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\hat{I} - I\right) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i} G_i \text{ en loi,}$$

et $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i} G_i$ est une gaussienne centrée et de variance $\sum_{i=1}^{m} p_i \sigma_i^2$.

Pour diminuer l'erreur statistique, il faut diminuer la variance $\sum_{i=1}^{m} p_i \sigma_i^2$: il faut donc choisir les strates de manière à ce que les variances σ_i^2 soient les plus petites possibles (la variance de $f(X)$ conditionnellement à $X \in A_i$ est petite).

Exercice 2 : Variable de contrôle

1 Par la loi forte des grands nombres, $\hat{I}$ converge presque sûrement et dans L^1 vers $\mathbb{E}(X - \alpha Y) = \mathbb{E}(X) = I$. De plus, par le théorème central limite, $\sqrt{n}\left(\hat{I} - I\right)$ converge en loi vers une gaussienne centrée et de variance $\mathrm{Var}(X - \alpha Y)$.

On calcule facilement $\mathbb{E}(\hat{I}) = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{I}) &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X - \alpha Y) \\ &= \frac{1}{n}\left(\mathrm{Var}(X) - 2\alpha \mathrm{Cov}(X,Y) + \alpha^2 \mathrm{Var}(Y) \right).\end{aligned}$$

En particulier, la variance est un trinôme en α, qui est minimum en $\alpha = \alpha^\star = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$ auquel cas la variance vaut $\mathrm{Var}(\hat{I}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)\left(1 - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}\right)$.

On a donc $\mathrm{Var}(\hat{I}) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$ ce qui correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leq \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y).$$

L'égalité est réalisée si et seulement si $X - \mathbb{E}(X)$ est égal, à une constante multiplicative près à $Y - \mathbb{E}(Y) = Y$, autrement dit si il existe une constante λ tel que

$$Y = \lambda(X - \mathbb{E}(X)).$$

Dans ce cas, $\alpha^\star = \frac{1}{\lambda}$ et $X - \alpha^\star Y = \mathbb{E}(X)$ est une quantité déterministe, qui est donc bien de variance nulle. Evidemment, pour utiliser en pratique la variable de contrôle idéale $Y = \lambda(X - \mathbb{E}(X))$, il faut connaître $\mathbb{E}(X)$ que l'on cherche justement à évaluer...

2 Dans la limite $n \to \infty$, par la loi forte des grands nombres, α_n converge presque sûrement vers α^*. Par conséquent, dans la limite $n \to \infty$, $\tilde{I}$ converge vers $\mathbb{E}(X) = I$. De plus, par le théorème de Slutsky, le vecteur

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X)\right), \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Y_k, \alpha_n\right)$$

converge en loi, quand $n \to \infty$, vers $(G_1, G_2, \alpha^\star)$ avec (G_1, G_2) un vecteur gaussien centré tel que $\mathrm{Var}(G_1) = \mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(G_2) = \mathrm{Var}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(G_1, G_2) = \mathrm{Cov}(X, Y)$. Ceci implique que $\sqrt{n}(\tilde{I} - I) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}(X)\right) - \alpha_n \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k$ converge en loi vers $G_1 - \alpha^\star G_2$. La variable aléatoire $G_1 - \alpha^\star G_2$ est une gaussienne centrée telle que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(G_1 - \alpha^* G_2) &= \mathrm{Var}(G_1) - 2\alpha^\star \mathrm{Cov}(G_1, G_2) + (\alpha^\star)^2 \mathrm{Var}(G_2) \\
&= \mathrm{Var}(X) - 2\alpha^\star \mathrm{Cov}(X, Y) + (\alpha^\star)^2 \mathrm{Var}(Y) \\
&= \mathrm{Var}(X)\left(1 - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)^2}{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}\right)
\end{aligned}$$

qui est la variance optimale.

3.1 Par hypothèse, $\mathbb{E}\int_0^T |\partial_z u(s, Z_z)\sigma(s, Z_s)|^2\, ds < \infty$ et donc $\mathbb{E}(Y) = 0$. Par un calcul d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
d(u(t, Z_t)) &= \left(\partial_t u + b\partial_z u + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{z,z} u\right)(t, Z_t)\, dt + (\partial_z u\sigma)(t, Z_t)\, dW_t \\
&= (\partial_z u\sigma)(t, Z_t)\, dW_t
\end{aligned}$$

et donc, par intégration en temps :

$$\begin{aligned}
Y &= \int_0^T (\partial_z u\sigma)(t, Z_t)\, dW_t \\
&= u(T, Z_T) - u(0, z_0) \\
&= \varphi(Z_T) - u(0, z_0) \\
&= X - u(0, z_0).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $X - Y = u(0, z_0)$ est déterministe, et donc de variance nulle. Ceci implique, d'après la question 1, que Y est une variable de contrôle idéale pour X.

En pratique, si on sait calculer Y, c'est que l'on connaît u la solution de l'EDP, et en particulier $\mathbb{E}(X)$ puisque $u(0, z_0) = \mathbb{E}(X)$. Ceci dit, on peut imaginer calculer une solution approchée de l'EDP pour construire une variable de contrôle.

3.2 Supposons qu'il existe une fonction v solution de l'EDP

$$\begin{cases}
\partial_t v + b\,\partial_z v + \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{z,z} v + \psi v = 0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad v(T, z) = \varphi(z).
\end{cases}$$

telle que $\partial_z v$ est bornée sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Par le même raisonnement que ci-dessus (calcul d'Itô sur $d\left(\exp\left(\int_0^t \psi(Z_s)\,ds\right) v(t,Z_t)\right)$, on vérifie que

$$\exp\left(\int_0^T \psi(Z_s)\,ds\right)\varphi(Z_T) - v(0,z_0) = \int_0^T \exp\left(\int_0^t \psi(Z_s)\,ds\right)(\partial_z u\sigma)(t,Z_t)\,dW_t$$

et donc

$$Y = \int_0^T \exp\left(\int_0^t \psi(Z_s)\,ds\right)(\partial_z u\sigma)(t,Z_t)\,dW_t$$

est une variable de contrôle idéale pour X.

Exercice 3 : Transformation de Girsanov

1 On a $X_{t_1} = -h(t_1) + W_{t_1}$, $X_{t_2} - X_{t_1} = -h(t_2) + h(t_1) + W_{t_2} - W_{t_1}$, ... , $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = -h(t_n) + h(t_{n-1}) + W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$. Par conséquent, puisque les variables aléatoires $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des gaussiennes indépendantes centrées et de variances respectives $t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$, on obtient que $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont des gaussiennes indépendantes de moyennes respectives $h(t_1), h(t_2) - h(t_1), \ldots, h(t_n) - h(t_{n-1})$ et de variances respectives $t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$. Par conséquent, pour tout fonction test $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) = \int \varphi(y_1,\ldots,y_n) q(y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\ldots dy_n$$

avec

$$q(y_1,\ldots,y_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}}\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(y_i + h(t_{i+1}) - h(t_i))^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right).$$

On considère alors le changement de variables

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (y_1,\ldots,y_n) \mapsto (y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \end{cases}$$

qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de jacobien 1. Remarquer que $\Psi(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) = (x_1,\ldots,x_n)$ et donc $\Psi^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$. Par conséquent, en utilisant le changement de variable $(x_1,\ldots,x_n) = \Psi(y_1,\ldots,y_n)$, pour une fonction test $\tilde\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde\varphi(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})) &= \mathbb{E}(\tilde\varphi\circ\Psi(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) \\
&= \int \tilde\varphi\circ\Psi(y_1,\ldots,y_n) q(y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\ldots dy_n \\
&= \int \tilde\varphi(x_1,\ldots,x_n) q\circ\Psi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{Jac}(\Psi^{-1})(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \\
&= \int \tilde\varphi(x_1,\ldots,x_n) q(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})\,dx_1\ldots dx_n
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ a pour loi $q(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})\,dx_1\ldots dx_n$.

2 On a, en développant le carré dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\varphi(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})) \\
&= \int \varphi(x_1, \dots, x_n) \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}}\right) \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i+h(t_{i+1})-h(t_i))^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int \varphi(x_1, \dots, x_n) \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)(h(t_{i+1})-h(t_i))}{(t_{i+1}-t_i)} + \frac{(h(t_{i+1})-h(t_i))^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right) \\
&\quad \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}}\right) \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right) dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

On reconnaît sur la dernière ligne la densité du vecteur $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ (cf. la première question avec $h = 0$), et on a donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\varphi(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})) \\
&= \mathbb{E}\left(\varphi(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})(h(t_{i+1})-h(t_i))}{(t_{i+1}-t_i)} + \frac{(h(t_{i+1})-h(t_i))^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\varphi(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) Z_t^{\text{disc}}\right).
\end{aligned}$$

3 La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ et donc h' est borné sur tout intervalle de temps borné. Ceci implique que l'intégrale stochastique $\int_0^t h'(s)\, dW_s$ est bien définie.

Soit $Y_t = -\int_0^t h'(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (h'(s))^2\, ds$. Par un calcul d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
dZ_t &= d\left(\exp\left(Y_t\right)\right) \\
&= \exp(Y_t) dY_t + \frac{1}{2}\exp(Y_t)\, d\langle Y\rangle_t \\
&= Z_t\left(-h'(t)dW_t - \frac{1}{2}(h'(t))^2\, dt\right) + \frac{1}{2} Z_t (h'(t))^2\, dt \\
&= -h'(t) Z_t dW_t.
\end{aligned}$$

Remarque : On peut alors vérifier que $\mathbb{E}(Z_t) = 0$, ce qui est une conséquence de (2) en prenant $\varphi = 1$. En effet, $Z_t = Z_0 - \int_0^t h'(s) Z_s dW_s$ avec $Z_0 = 1$. Par ailleurs

$$\mathbb{E}\int_0^t (h'(s) Z_s)^2\, ds = \int_0^t (h'(s))^2 \mathbb{E}(Z_s)^2\, ds$$

et on vérifie que $\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}(Z_s)^2 < \infty$ car $\int_0^t h'(s) dW_s$ est une gaussienne centrée et de variance $\int_0^t (h'(s))^2\, ds$.

4 Par un calcul d'Itô, on a

$$d(h'(t) W_t) = h''(t) W_t\, dt + h'(t) dW_t$$

et donc

$$h'(t)W_t = \int_0^t h''(s)W_s\,ds + \int_0^t h'(s)dW_s.$$

5 En prenant $\varphi = 1_{\|\cdot\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}$, on a (puisque $X_s = -h(s) + W_s$) :

$$\mathbb{E}\left(1_{\|W_s-h(s)\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon)}\right) = \mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon} Z_t\right)$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\|W_s - h(s)\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right) &= \mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon} \exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t (h'(s))^2\,ds\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (h'(s))^2\,ds\right)\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\mathbb{P}\left(\|W_s - h(s)\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (h'(s))^2\,ds\right)\frac{\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right)\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)}$$

et on veut montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right)\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)} = 1.$$

Ceci est équivalent à

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\left[\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right) - 1\right]\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)} = 0.$$

Or, on a, en utilisant le fait que $|\exp(y)-1| \leq \exp(|y|)|y|$, et en posant $C = \left(\|h'\|_{L^\infty(0,t)} + t\|h''\|_{L^\infty(0,t)}\right)$

$$1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\left|\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right) - 1\right| \leq 1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon} C\varepsilon\exp(C\varepsilon)$$

puisque $1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\left|-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right| \leq \epsilon\left(\|h'\|_{L^\infty(0,t)} + t\|h''\|_{L^\infty(0,t)}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\left[\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right) - 1\right]\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)}\right|\\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(1_{\|W_s\|_{L^\infty(0,t)}\leq\varepsilon}\left|\exp\left(-h'(t)W_t + \int_0^t h''(s)W_s\,ds\right) - 1\right|\right)}{P\left(\|W_s\|_{L^\infty(0,t)} \leq \varepsilon\right)}\\ &\leq C\varepsilon\exp(C\varepsilon)\end{aligned}$$

qui tend effectivement vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.