Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

13 janvier 2016, 9h30 - 12h30.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice : Equation de Langevin

1.1 L'équation de Fokker Planck donnant l'évolution de la loi de (q_t, v_t) est :

$$\partial_t \psi = -v\partial_q \psi + m^{-1}\nabla\pi(q)\partial_v \psi + m^{-1}\mathrm{div}_v(v\psi + \beta^{-1}m^{-1}\nabla_v \psi).$$

1.2 On a :

$$\begin{aligned}
&-v\partial_q f + m^{-1}\nabla\pi(q)\partial_v f + m^{-1}\mathrm{div}_v(vf + m^{-1}\beta^{-1}\nabla_v f)\\
&= \beta\left(v\cdot\nabla\pi - m^{-1}\nabla\pi\cdot mv\right) f + m^{-1}\mathrm{div}_v\left(vf - vf\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que la mesure de probabilité $f(q,v)\,dq\,dv$ est invariante pour la dynamique de Langevin.

2.1 On calcule :

$$\begin{aligned}
m\,d\left(e^{\frac{t}{m}}v_t\right) &= e^{\frac{t}{m}}(m dv_t + v_t\,dt)\\
&= e^{\frac{t}{m}}(-\nabla\pi(q_t)\,dt + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_t)
\end{aligned}$$

d'où, en intégrant en temps :

$$m\left(e^{\frac{t}{m}}v_t - v_0\right) = \int_0^t e^{\frac{s}{m}}(-\nabla\pi(q_s)\,ds + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_s)$$

ce qui donne le résultat annoncé.

2.2 On a, par Fubini,

$$\begin{aligned}
q_t &= q_0 + \int_0^t v_s\,ds\\
&= q_0 + \int_0^t \left(v_0 e^{-\frac{s}{m}}\,ds + \frac{1}{m}\int_0^s e^{-\frac{s-r}{m}}(-\nabla\pi(q_r)\,dr + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_r)\right)\,ds\\
&= q_0 + v_0 m\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right) + \frac{1}{m}\int_0^t\left(\int_r^t e^{-\frac{s-r}{m}}\,ds\right)(-\nabla\pi(q_r)\,dr + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_r)\\
&= q_0 + v_0 m\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right) + \int_0^t\left(1 - e^{-\frac{t-r}{m}}\right)(-\nabla\pi(q_r)\,dr + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_r).
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$X_t = X_0 - \int_0^t \nabla\pi(X_r)\,dr + \sqrt{2\beta^{-1}}\int_0^t dW_r.$$

Par différence, on a donc, puisque $X_0 = q_0$,

$$\begin{aligned}
q_t - X_t &= v_0 m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right) + \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-r}{m}}\right) (-\nabla\pi(q_r)\,dr + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_r) \\
&\quad + \int_0^t \nabla\pi(X_r)\,dr - \sqrt{2\beta^{-1}} \int_0^t dW_r \\
&= v_0 m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right) - \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-r}{m}}\right) (\nabla\pi(q_r) - \nabla\pi(X_r))\,dr \\
&\quad + \int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}} \nabla\pi(X_r)\,dr - \sqrt{2\beta^{-1}} \int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\,dW_r
\end{aligned}$$

Remarque : On a utilisé dans ce résultat que

$$\int_0^t \int_0^s e^{-\frac{s-r}{m}} dW_r\,ds = \int_0^t \int_r^t e^{-\frac{s-r}{m}} dr\,dW_s.$$

Ceci peut-être justifié par un théorème de Fubini stochastique. Plus simplement, on peut aussi remarquer qu'il s'agit de prouver que les deux fonctions : $A : t \mapsto \int_0^t f(s) \int_0^s g(r) dW_r\,ds$ *et* $B : t \mapsto \int_0^t g(r) \int_r^t f(s) ds\,dW_r$ *sont égales, avec* $f(s) = e^{-\frac{s}{m}}$ *et* $g(r) = e^{\frac{r}{m}}$*. Or en différentiant par rapport à* t*, on a* $dA(t) = f(t) \int_0^t g(r) dW_r\,dt$ *et* $dB(t) = 0 + \int_0^t g(r) f(t)\,dW_r\,dt$*, soit* $\dot{A}(t) = \dot{B}(t)$ *d'où* $A(t) = B(t)$ *puisque* $A(0) = B(0) = 0$*. Une autre manière de prouver cette égalité est d'utiliser une intégration par parties.*

2.3 En différentiant par rapport à la variable r, on a :

$$d(e^{-\frac{t-r}{m}} W_r) = \frac{1}{m} e^{-\frac{t-r}{m}} W_r\,dr + e^{-\frac{t-r}{m}} dW_r.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}} dW_r &= W_t - \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}} W_r\,dr \\
&= W_t\,e^{-\frac{t}{m}} - \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}} (W_r - W_t)\,dr.
\end{aligned}$$

2.4 Les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement continus, donc les deux termes convergent vers 0 uniformément sur les compacts en temps.

En effet, considérons l'intervalle $[0, T]$ pour $T > 0$ fixé. Pour le premier terme, pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\sup_{t\in[0,\delta]} |W_t| \le \epsilon/2$ (car $W_0 = 0$). On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} |W_t\,e^{-\frac{t}{m}}| &\le \sup_{t\in[0,\delta]} |W_t\,e^{-\frac{t}{m}}| + \sup_{t\in[\delta,T]} |W_t\,e^{-\frac{t}{m}}| \\
&\le \sup_{t\in[0,\delta]} |W_t| + \sup_{t\in[\delta,T]} |W_t\,e^{-\frac{\delta}{m}}| \\
&\le \epsilon/2 + \sup_{t\in[\delta,T]} |W_t| e^{-\frac{\delta}{m}}.
\end{aligned}$$

On prend ensuit m suffisamment proche de zéro pour que $\sup_{t\in[\delta,T]} |W_t| e^{-\frac{\delta}{m}} \le \epsilon/2$.

Pour le second terme, on utilise le fait que les trajectoires du mouvement brownien sont (presque sûrement) uniformément continues sur $[0,T]$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe α tel que pour tout $r, t \in [0,T]$, $|r-t| \leq \alpha$ implique $|W_r - W_t| \leq \epsilon/2$. Par conséquent, pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m}\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}(W_r - W_t)\,dr\right| &\leq \frac{1}{m}\int_0^{t-\alpha} e^{-\frac{t-r}{m}}|W_r - W_t|\,dr + \frac{1}{m}\int_{t-\alpha}^t e^{-\frac{t-r}{m}}|W_r - W_t|\,dr \\ &\leq \frac{1}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}}2T\sup_{t\in[0,T]}|W_t| + (\epsilon/2)(1-e^{-\frac{\alpha}{m}}) \\ &\leq \frac{1}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}}2T\sup_{t\in[0,T]}|W_t| + \epsilon/2.\end{aligned}$$

Noter que la borne supérieure ne dépend pas de $t \in [0,T]$. On prend ensuite m suffisamment proche de zéro pour que le premier terme soit inférieur à $\epsilon/2$.

2.5 On a

$$q_t - X_t = -\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-r}{m}}\right)(\nabla\pi(q_r) - \nabla\pi(X_r))\,dr + r(t,m)$$

avec

$$r(t,m) = v_0 m\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right) + \int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\nabla\pi(X_r)\,dr - \sqrt{2\beta^{-1}}\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\,dW_r.$$

Le premier terme tend vers 0 quand $m \to 0$, uniformément en $t \in [0,T]$. Pour le second terme, on a

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\nabla\pi(X_r)\,dr - \sqrt{2\beta^{-1}}\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\,dW_r\right| &\leq \sup_{r\in[0,T]}|\nabla\pi(X_r)|\int_0^t e^{-\frac{t-r}{m}}\,dr \\ &= \sup_{r\in[0,T]}|\nabla\pi(X_r)| m\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right)\end{aligned}$$

qui converge bien également vers 0 quand $m \to 0$. Par conséquent, en utilisant le résultat de la question précédente.

$$r_T(m) = \sup_{t\in[0,T]}|r(t,m)|$$

tend vers 0 quand $m \to 0$.

On a donc, pour tout $s \leq t \leq T$, (en utilisant le fait que $\nabla\pi$ est Lipschitz)

$$\begin{aligned}|q_s - X_s| &\leq \left|\int_0^s \left(1 - e^{-\frac{s-r}{m}}\right)(\nabla\pi(q_r) - \nabla\pi(X_r))\,dr\right| + r_T(m) \\ &\leq C\int_0^s |q_r - X_r|\,dr + r_T(m) \\ &\leq C\int_0^t |q_r - X_r|\,dr + r_T(m) \\ &\leq C\int_0^t \sup_{u\leq r}|q_u - X_u|\,dr + r_T(m)\end{aligned}$$

d'où, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\sup_{s\le t}|q_s - X_s| \le C\int_0^t \sup_{u\le r}|q_u - X_u|\; dr + r_T(m).$$

On en déduit par Gronwall que

$$\sup_{s\le T}|q_s - X_s| \le e^{CT} r_T(m)$$

d'où le résultat.

Problème : Modèles de spins

1.1 Il s'agit d'un algorithme de Metropolis Hastings (noter que le noyau de proposition est symétrique ce qui explique la définition de la probabilité d'acceptation). La chaîne de Markov admet donc ν_N comme mesure invariant par construction. Par ailleurs, la dynamique est clairement irréductible. Par conséquent elle est ergodique.

On a $\mathbb{E}(\tau_{x_-}) = \mathbb{E}(\tau_{x_+}) = 1/\nu_N(x_+) = Z_N^{\text{Ising}}\exp(-\beta N)$ et $\mathbb{E}(\tau_{x_0}) = 1/\nu_N(x_0) = Z_N^{\text{Ising}}\exp(\beta N)$. Par conséquent $\frac{\mathbb{E}(\tau_{x_+})}{\mathbb{E}(\tau_{x_0})} = \exp(-2\beta N) \ll 1$ quand N est grand : le temps de retour dans les états x_- et x_+ (qui correspondent à des minima de l'énergie V) est beaucoup plus court que le temps de retour dans l'état x_0.

1.2 Il suffit de modifier l'algorithme de la façon suivante : $X^0 \in \mathcal{X}_N$ est donné tel que $m_N(X_0) = m$, et, pour $k \ge 0$, X^{k+1} est construit à partir de X^k de la manière suivante :

- On tire deux sites I^k et J^k au hasard parmi $\{1,\dots N\}$ et on considère (en supposant sans perte de généralité que $I^k < J_k$)

$$Y^k = (X_1^k, \dots, X_{I^k-1}^k, X_{J^k}^k, X_{I^k+1}^k, \dots, X_{J^k-1}^k, X_{I^k}^k, X_{J^k+1}^k, \dots X_N^k).$$

- On calcule $\alpha^k = \min\Big(1, \exp\big(-\beta(V(Y^k) - V(X^k))\big)\Big)$ et on tire une variable aléatoire U^k uniforme sur $[0,1]$. Si $U^k \le \alpha^k$ on pose $X^{k+1} = Y^k$, sinon, on pose $X^{k+1} = X^k$.

La fonction de proposition consiste donc à échanger deux spins, ce qui conserve la magnétisation moyenne m_N :

$$\forall k \ge 0, m_N(X^k) = m_N(X^0) = m.$$

On montre de la même façon que précédemment que la chaîne ainsi construite est ergodique par rapport à ν_N^m.

2.1 On remarque que pour $m \in \mathcal{M}_N$,

$$\mathbb{P}(m_N(X) = m) = (Z_N)^{-1}\sum_{x,\, m_N(x)=m}\exp(-\beta H(x))$$

et, pour x tel que $m_N(x) = m$, $H(x) = -\frac{N}{2}m^2$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(m_N(X) = m) = (Z_N)^{-1}\exp(\beta N m^2/2)\mathrm{card}\{x \in \mathcal{X}_N\, m_N(x) = m\}.$$

Pour $m \in \mathcal{M}_N$ et $x \in \mathcal{X}_N$,

$$m_N(x) = m \iff x \text{ contient } N(1-m)/2 \text{ spins de valeur } -1$$

car $m_N(x) = \frac{1}{N}(N - 2\text{card}\{i \in \{1, \ldots, N\}, x_i = -1\})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\text{card}\{x \in \mathcal{X}_N\, m_N(x) = m\} &= \text{card}\{x \in \mathcal{X}_N,\ x \text{ contient } N(1-m)/2 \text{ spins de valeur } -1\} \\ &= \binom{N}{N(1-m)/2}.\end{aligned}$$

2.2 Commençons par la borne supérieure. Pour k fixé et en choisissant $p = k/n$, on a

$$1 = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (k/n)^\ell (1 - (k/n))^{n-\ell} \geq \binom{n}{k} (k/n)^k (1 - k/n)^{n-k}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &\leq \exp\left(-k \ln(k/n) - (n-k)\ln(1 - k/n)\right) \\ &= \exp\left(nh\left(\frac{k}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Pour la borne inférieur, on note que $\frac{\binom{n}{\ell+1} p^{\ell+1}(1-p)^{n-(\ell+1)}}{\binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell}} = \frac{n-\ell}{\ell+1}\frac{p}{1-p} \leq 1$ si et seulement si $\ell \geq np + p - 1$. Par conséquent $\max_{\ell \in \{0,\ldots,n\}} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} = \binom{n}{\ell^*} p^{\ell^*} (1-p)^{n-\ell^*}$ avec $\ell^* = \min(\lfloor np + p \rfloor, n)$. Avec $p = k/n$, on a $\ell^* = k$ et on obtient donc

$$1 = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (k/n)^\ell (1 - (k/n))^{n-\ell} \leq (n+1) \binom{n}{k} (k/n)^k (1 - k/n)^{n-k}$$

ce qui implique

$$\binom{n}{k} \geq \frac{1}{n+1} \exp\left(nh\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

2.3 On utilise les bornes démontrées en 2.2. Pour $m \in \mathcal{M}_N$, on a

$$\begin{aligned}Z_N \mathbb{P}(m_N(X) = m) &= \exp\left(\beta \frac{N}{2} m^2\right) \binom{N}{\frac{N(1-m)}{2}} \\ &\leq \exp\left(\beta \frac{N}{2} m^2 + Nh((1-m)/2)\right).\end{aligned}$$

De même,

$$Z_N \mathbb{P}(m_N(X) = m) \geq \frac{1}{N+1} \exp\left(\beta \frac{N}{2} m^2 + Nh((1-m)/2)\right).$$

2.4 On note que $m \in [-1, 1] \mapsto \psi(m)$ est une application continue, dérivable sur $(-1, 1)$ et tel que $\lim_{m \to -1} \psi'(m) = -\lim_{x \to 1} h'(x) = +\infty$ et $\lim_{m \to 1} \psi'(m) = -\lim_{x \to 0} h'(x) = -\infty$. Par conséquent, le suprémum de ψ est atteint en un point $m^* \in (-1, 1)$ tel que $\psi'(m^*) = 0$.

On calcule :

$$\begin{aligned}\psi'(m) &= \beta m - \frac{1}{2}h'((1-m)/2) \\ &= \beta m - \frac{1}{2}\left(-1 - \ln((1-m)/2) + 1 + \ln((1+m)/2)\right) \\ &= \beta m + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-m}{1+m}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\psi'(m) \geq 0$ est équivalent à $\frac{1-m}{1+m} \geq \exp(-2\beta m)$ ce qui donne

$$\psi'(m) \geq 0 \iff m \leq \frac{1-e^{-2\beta m}}{1+e^{-2\beta m}} = \frac{e^{\beta m} - e^{-\beta m}}{e^{\beta m} + e^{-\beta m}} = \tanh(\beta m).$$

Pour $\beta \leq 1$, $\psi'(m) = 0$ admet donc une unique solution $m^* = 0$ et ψ est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $[0, 1]$.

Pour $\beta > 1$, $\psi'(m) = 0$ admet trois solutions $\{-m^*, 0, m^*\}$ avec $m^* > 0$ (noter que la fonction ψ est paire). La fonction ψ est croissante sur $[-1, -m^*]$, décroissante sur $[-m^*, 0]$, croissante sur $[0, m^*]$, puis décroissante sur $[m^*, 1]$. Elle atteint donc son maximum en les deux points $-m^*$ et m^*. On note dans la suite $m^*_- = -m^*$ et $m^*_+ = m^*$.

2.5 On note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\ln Z_N &= \frac{1}{N}\ln\left(\sum_{x\in\mathcal{X}_N}\exp(-\beta H(x))\right) \\ &= \frac{1}{N}\ln\left(Z_N \sum_{m\in\mathcal{M}_N}\mathbb{P}(m_N(X) = m)\right),\end{aligned}$$

où $X \sim \mu_N$. Pour la borne supérieure, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\ln Z_N &\leq \frac{1}{N}\left(\ln\left(\sum_{m\in\mathcal{M}_N}\exp(N\psi(m))\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{N}\left(\ln\left((N+1)\exp(N\psi^*)\right)\right) \\ &\leq \frac{\ln(N+1)}{N} + \psi^*.\end{aligned}$$

2.6 Pour la borne inférieure, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\ln Z_N &\geq \frac{1}{N}\left(\ln\left(\sum_{m\in\mathcal{M}_N}\exp(N\psi(m))\right) - \ln(N+1)\right) \\ &\geq \frac{1}{N}\left(\ln\left(\max_{m\in\mathcal{M}_N}\exp(N\psi(m))\right) - \ln(N+1)\right) \\ &= \max_{m\in\mathcal{M}_N}\psi(m) - \frac{\ln(N+1)}{N}.\end{aligned}$$

Pour N assez grand, le maximum de ψ sur $\mathcal{M}_N$ est atteint en un point m_N^* qui diffère au plus de $1/N$ de m^* (le point qui réalise le maximum de ψ sur $[-1,1]$) :

$$|m_N^* - m^*| \leq \frac{1}{N}.$$

On a donc, pour N assez grand,

$$\begin{aligned}\left|\max_{m\in[-1,1]} \psi(m) - \max_{m\in\mathcal{M}_N} \psi(m)\right| &\leq |\psi(m^*) - \psi(m_N^*)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sup_{x\in[m^*-1/N, m^*+1/N]} |\psi'|.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\psi'(m^*) = 0$, le caractère Lipschitz de ψ' sur un voisinage fixé de m^* montre donc qu'il existe une constante C_0 tel que pour N assez grand

$$\left|\max_{m\in[-1,1]} \psi(m) - \max_{m\in\mathcal{M}_N} \psi(m)\right| \leq \frac{C_0}{N^2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{N} \ln Z_N \geq \psi^* - \frac{\ln(N+1)}{N} - \frac{C_0}{N^2}$$

pour N assez grand.

2.7 On sait que ψ admet un unique maximum en $m^* = 0$, et $\psi^* = \psi(0)$. Par conséquent, pour $\epsilon > 0$ et $X \sim \mu_N$, (en utilisant le fait que $\mathbb{P}(m_N(X) = m) = \mathbb{P}(m_N(X) = -m)$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|m_N(X)| \geq \epsilon) &= 2 \sum_{m\in\mathcal{M}_N, m\geq\epsilon} \mathbb{P}(m_N(X) = m) \\ &\leq \frac{2}{Z_N} \sum_{m\in\mathcal{M}_N, m\geq\epsilon} \exp(N\psi(m)) \\ &\leq \frac{2(N+1)}{Z_N} \exp\Big(N \max_{m\in\mathcal{M}_N, m\geq\epsilon} \psi(m)\Big) \\ &\leq \frac{2(N+1)}{Z_N} \exp\Big(N \max_{m\geq\epsilon} \psi(m)\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le résultat de la question précédente, pour N assez grand,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|m_N(X)| \geq \epsilon) &\leq 2(N+1)^2 \exp(C_0/N) \exp\left(N\left(\max_{m\geq\epsilon} \psi(m) - \psi^*\right)\right) \\ &\leq 2(N+1)^2 \exp(C_0/N) \exp\Big(-N \min_{m\geq\epsilon} (\psi^* - \psi(m))\Big).\end{aligned}$$

En prenant $C_1 \in (0, \min_{m\geq\epsilon} (\psi^* - \psi(m)))$, on obtient donc, pour N assez grand,

$$\mathbb{P}(|m_N(X)| \geq \epsilon) \leq \exp(-C_1 N).$$

2.8 On sait que ψ admet un maximum atteint en m_-^* et m_+^* : $\psi^* = \psi(m_-^*) = \psi(m_+^*)$. Par symétrie, on a $m_-^* = -m_+^*$ et

$$\mathbb{P}(|m_N(X) - m_-^*| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon).$$

On note également que pour $\epsilon \in (0, m_+^*)$

$$\mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(m_N(X) \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

De plus, pour $\epsilon \in (0, m_+^*)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) \leq 0) + \mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0) \\
&= \mathbb{P}(m_N(X) \leq 0) + \mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0) \\
&= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0).
\end{aligned}$$

La preuve est ensuite similaire à celle de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0) &= \sum_{m \in \mathcal{M}_N, |m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} \mathbb{P}(m_N(X) = m) \\
&\leq \frac{1}{Z_N} \sum_{m \in \mathcal{M}_N, |m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} \exp(N\psi(m)) \\
&\leq \frac{(N+1)}{Z_N} \exp\Big(N \max_{m \in \mathcal{M}_N, |m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} \psi(m)\Big) \\
&\leq \frac{(N+1)}{Z_N} \exp\Big(N \max_{|m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} \psi(m)\Big).
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 2.6, pour N assez grand,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0) \\
&\leq (N+1)^2 \exp(C_0/N) \exp\left(N\left(\max_{|m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} \psi(m) - \psi^*\right)\right) \\
&\leq (N+1)^2 \exp(C_0/N) \exp\Big(-N \min_{|m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} (\psi^* - \psi(m))\Big).
\end{aligned}$$

Noter que $\min_{|m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} (\psi^* - \psi(m)) > 0$. En prenant $C_2 \in (0, \min_{|m - m_+^*| \geq \epsilon, m > 0} (\psi^* - \psi(m)))$, on obtient donc, pour N assez grand,

$$\mathbb{P}(|m_N(X) - m_+^*| \geq \epsilon \text{ et } m_N(X) > 0) \leq \exp(-C_2 N).$$

2.9 Quand $\beta \leq 1$, on vérifie facilement en utilisant la question 2.7 que pour tout m $\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(m_N(X) \leq m) = 0$ dès que $m < 0$ et $\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(m_N(X) \leq m) = 1 - \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(m_N(X) > m) = 1$ quand $m > 0$. La fonction de répartition de $m_N(X)$ converge donc vers $1_{m \geq 0}$, la fonction de répartition de δ_0.

Le même raisonnement permet de montrer que quand $\beta > 1$, la loi de $m_N(X)$ converge vers $\frac{1}{2}\left(\delta_{m_-^*} + \delta_{m_+^*}\right)$.

Quand $\beta \leq 1$ (la température est grande), la matériau n'exhibe pas de magnétisation : sa magnétisation est nulle. Quand $\beta > 1$ (la température est petite), la magnétisation du matériau vaut $\pm m_+^*$. Ce modèle permet donc d'expliquer le caractère ferromagnétique comme résultant de l'interaction entre spins. On note par ailleurs un phénomène de transition de phase : le caractère ferromagnétique n'apparaît que quand la température est assez petite.