Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

10 janvier 2017, 14h00-17h00.

Les notes de cours sont autorisées. La partie 2-B est facultative.

Exercice : Formule de Jarzynski discrète

1.1 On vérifie que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_M) &= \mathbb{E}\left(\exp(-V(1,X_0^1)+V(0,X_0^1))\right)\\ &= \int \exp(-V(1,x_0)+V(0,x_0))q_0(x_0)dx_0\\ &= Z_0^{-1}\int \exp(-V(1,x_0))dx_0\\ &= Z_0^{-1}Z_1.\end{aligned}$$

Par la loi forte des grands nombres, on a, presque sûrement, $\lim_{M\to\infty} I_M = Z_1/Z_0$.

1.2 On a $-V(1,x)+V(0,x) = L(x-L/2)$, et par conséquent

$$I_M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \exp(LX_0^m - L^2/2)$$

avec $(X_0^m)_{m\geq 1}$ i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Noter que dans ce cas, $Z_1 = Z_0 = \sqrt{2\pi}$ et on vérifie qu'on a bien

$$\mathbb{E}\exp(LX_0^1 - L^2/2) = 1,$$

car pour une gaussienne G centrée réduite, $\mathbb{E}\exp(LG) = \exp(L^2/2)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(I_M) &= M^{-1}\mathrm{Var}(\exp(LX_0^1 - L^2/2))\\ &= M^{-1}\left(\mathbb{E}\exp(2LX_0^1 - L^2) - 1\right)\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}\exp(2LX_0^1) = \exp(2L^2)$ d'où

$$\mathrm{Var}(I_M) = M^{-1}\left(\exp(L^2) - 1\right)$$

Quand $L\to\infty$, l'erreur relative $\sqrt{\mathrm{Var}(I_M)}/\,|\mathbb{E}(I_M)| = \sqrt{\mathrm{Var}(I_M)}$ explose.

2.1 On peut utiliser un algorithme de Metropolis Hastings.

2.2 Pour toute fonction test $\varphi : (\mathbb{R}^d)^N \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X_0,X_1,\ldots,X_{N-1})) = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \varphi(x_0,\ldots,x_{N-1})q_0(x_0)dx_0 P_{\lambda_1}(x_0,dx_1)\ldots P_{\lambda_{N-1}}(x_{N-2},dx_{N-1}).$$

2.3 On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) &= \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \prod_{n=0}^{N-1} \exp(-V(\lambda_{n+1},x_n)+V(\lambda_n,x_n))q_0(x_0)dx_0 \prod_{n=1}^{N-1} P_{\lambda_n}(x_{n-1},dx_n)\\ &= Z_0^{-1}\int_{(\mathbb{R}^d)^N} \exp(-V(\lambda_1,x_0)) \prod_{n=1}^{N-1} \exp(-V(\lambda_{n+1},x_n)+V(\lambda_n,x_n))dx_0 \prod_{n=1}^{N-1} P_{\lambda_n}(x_{n-1},dx_n).\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que pour tout fonction test $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x_1) P_{\lambda_1}(x_0, dx_1) \exp(-V(\lambda_1, x_0)) dx_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x_1) \exp(-V(\lambda_1, x_1)) dx_1$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) &= Z_0^{-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^{N-1}} \exp(-V(\lambda_1, x_1)) \prod_{n=1}^{N-1} \exp(-V(\lambda_{n+1}, x_n) + V(\lambda_n, x_n)) dx_1 \prod_{n=2}^{N-1} P_{\lambda_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= Z_0^{-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^{N-1}} \exp(-V(\lambda_2, x_1)) \prod_{n=2}^{N-1} \exp(-V(\lambda_{n+1}, x_n) + V(\lambda_n, x_n)) dx_1 \prod_{n=2}^{N-1} P_{\lambda_n}(x_{n-1}, dx_n).
\end{aligned}$$

En itérant l'argument, par récurrence, on prouve que pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) = Z_0^{-1} &\int_{(\mathbb{R}^d)^{N-k}} \exp(-V(\lambda_{k+1}, x_k)) \\
&\times \prod_{n=k+1}^{N-1} \exp(-V(\lambda_{n+1}, x_n) + V(\lambda_n, x_n)) dx_k \prod_{n=k+1}^{N-1} P_{\lambda_n}(x_{n-1}, dx_n) \\
= Z_0^{-1} &\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-V(\lambda_N, x_{N-1})) dx_{N-1} \\
= Z_0^{-1} &Z_1.
\end{aligned}$$

On en déduit un nouvel estimateur de Z_1/Z_0 :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \exp(-\mathcal{W}^m)$$

où $\mathcal{W}^m$ sont i.i.d. et de même loi que $\mathcal{W}$.

2.4 Soit X_0 de loi $q_\lambda(x)\,dx$. X_0 est donc de loi gaussienne centrée en λL et de variance 1. Soit X_1 de loi, conditionnellement à X_0, $P_\lambda(X_0, dy)$. On a donc

$$X_1 = m_\lambda^\alpha(X_0) + \sigma_\lambda^\alpha G$$

avec G une gaussienne centrée réduite indépendante de X_0. X_1 est donc de loi gaussienne (comme combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes). On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mathbb{E}(X_0) + \frac{2\alpha\lambda L}{1+\alpha} \\
&= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \lambda L + \frac{2\alpha\lambda L}{1+\alpha} \\
&= \lambda L
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1) &= \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \mathrm{Var}(X_0) + \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \\
&= \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

X_1 est donc bien de même loi que X_0, ce qui montre que P_λ laisse invariante la loi normale centrée en λL et de variance 1.

2.5 Dans ce cas particulier, $Z_0 = Z_1 = \sqrt{2\pi}$ et donc $Z_1/Z_0 = 1$ ce qui implique

$$\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) = 1.$$

Par ailleurs, on a X_0 de loi gaussienne centrée réduite, et la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}X_n + \frac{2\alpha L\lambda_{n+1}}{1+\alpha} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}G_n \tag{1}$$

avec les G_n i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite, indépendantes de X_0. On note que $V(\lambda_{n+1}, x) - V(\lambda_n, x) = -\frac{L}{N}(x - \lambda_{n+1/2}L)$ et donc

$$\mathcal{W} = -\frac{L}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(X_n - \lambda_{n+1/2}L). \tag{2}$$

On en déduit que $\mathcal{W}$ est une gaussienne, comme combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes. Par conséquent, $\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) = \exp(-\mathbb{E}(\mathcal{W})+\mathrm{Var}(\mathcal{W})/2)$. Puisque $\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W})) = 1$, on a $\mathbb{E}(\mathcal{W}) = \mathrm{Var}(\mathcal{W})/2$. Et donc $\mathbb{E}(\exp(-2\mathcal{W}) = \exp(-2\mathbb{E}(\mathcal{W})+2\mathrm{Var}(\mathcal{W})) = \exp(\mathrm{Var}(\mathcal{W}))$. D'où le résultat :

$$\mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W})) = \exp(\mathrm{Var}(\mathcal{W})) - 1.$$

2.6 On a par (1),

$$X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(X_n - \mathbb{E}(X_n)) + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}G_n$$

et donc

$$\mathrm{Var}(X_{n+1}) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \mathrm{Var}(X_n) + \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \tag{3}$$

et, pour $m < n$,

$$X_n - \mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m}(X_m - \mathbb{E}(X_m)) + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1-k}G_k$$

dont on déduit

$$\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m}\mathrm{Var}(X_m).$$

On déduit de (3) et du fait que $\mathrm{Var}(X_0) = 1$ que $\mathrm{Var}(X_n) = 1$ pour tout n, et donc $\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m}$.

2.7 D'après la question 2.5, on peut estimer $\mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W}))$ en estimant $\mathrm{Var}(\mathcal{W})$. On déduit de (2) que

$$\mathrm{Var}(\mathcal{W}) = \frac{L^2}{N^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{Var}(X_n) + 2\sum_{0\le m<n\le N-1}\mathrm{Cov}(X_m, X_n)\right).$$

Par conséquent, dans l'asymptotique $N \to \infty$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\mathcal{W}) &= \frac{L^2}{N^2}\left(N + 2\sum_{0\le m<n\le N-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m}\right)\\ &\sim \frac{L^2}{N^2}\left(N + 2\frac{1-\alpha}{2\alpha}N\right) = \frac{L^2}{\alpha N}.\end{aligned}$$

A L et $\alpha > 0$ fixé, dans l'asymptotique $N \to \infty$, on a donc

$$\operatorname{Var}(\exp(-\mathcal{W})) \sim \frac{L^2}{\alpha N}.$$

On peut donc diminuer la variance en augmentant le nombre d'étapes intermédiaires N.

L'estimation $\sum_{0\le m<n\le N-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m} \sim \frac{1-\alpha}{2\alpha}N$ *se vérifie par un calcul direct :*

$$\begin{aligned}\sum_{0\le m<n\le N-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m} &= \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-m}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{k}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n}{1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n\right)\\ &= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(N-1-\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n\right)\\ &= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(N-1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{N-1}}{1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)\\ &= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(N-1-\frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{N-1}\right)\right)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Problème : Une équation différentielle stochastique avec un coefficient de dérive singulier

Partie 1 : Temps d'atteinte pour un mouvement brownien avec dérive constante

1 τ^x est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt car c'est le premier temps d'atteinte d'un fermé pour un processus stochastique adapté continu.

2 Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Les solutions se calculent donc de manière analytique : elles sont dans l'espace vectoriel engendré par $\exp(\mu_+ y)$ et $\exp(\mu_- y)$ où $\mu_\pm$ sont les deux racines du trinôme

$$\frac{\sigma^2}{2}\mu^2 + b\mu - \lambda = 0.$$

On trouve

$$\mu_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 2\sigma^2\lambda}}{\sigma^2}.$$

On veut $u(0) = 1$ et u bornée sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que

$$u(y) = \exp\left(-\frac{b + \sqrt{b^2 + 2\sigma^2\lambda}}{\sigma^2} y\right).$$

Noter que u' est également bornée sur $\mathbb{R}_+$.

3 Par un calcul d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
d\phi(t, Y_t^x) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, Y_t^x)\, dt + \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, Y_t^x)\, dY_t^x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(t, Y_t^x)\, d\langle Y^x \rangle_t \\
&= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} u(Y_t^x)\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda t} u'(Y_t^x)(b\, dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t} u''(Y_t^x)\sigma^2\, dt \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(-\lambda u(Y_t^x) + b u'(Y_t^x) + \frac{\sigma^2}{2} u''(Y_t^x)\right) dt + \mathrm{e}^{-\lambda t} u'(Y_t^x)\sigma dW_t \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} u'(Y_t^x)\sigma dW_t.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\phi(t, Y_t^x) = \phi(0, Y_0^x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} u'(Y_s^x)\sigma dW_s,$$

ce qui est le résultat demandé.

4 Comme u' est borné sur $\mathbb{R}_+$, et que sur l'intervalle $[0, \tau^x]$, $Y_t^x \geq 0$ (cf. $x \geq 0$ et $(Y_t^x)_{t \geq 0}$ est un processus à trajectoires continues), on a que presque sûrement, $H_s \leq \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \mathrm{e}^{-\lambda s}$ et donc, $\mathbb{E}\int_0^\infty H_s^2\, ds < \infty$. On en déduit que $\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} H_s dW_s\right) = 0$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dW_s\right) = 0$.

En prenant $t = t \wedge \tau^x$ dans l'égalité prouvée à la question 3, on a :

$$\begin{aligned}
Z_{t\wedge\tau^x}^x &= u(x) + \sigma \int_0^{t\wedge\tau^x} \mathrm{e}^{-\lambda s} u'(Y_s^x) \mathrm{d}W_s \\
&= u(x) + \sigma \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on a donc

$$\mathbb{E}\left(Z^x_{t\wedge\tau^x}\right) = u(x).$$

5 On écrit, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z^x_{t\wedge\tau^x}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x=\infty\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}u(Y^x_t)\mathbf{1}_{\{\tau^x=\infty\}}\right).\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a : d'une part, presque sûrement $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}} = \mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}u(Y^x_{\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}$ et d'autre part, $\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}$ est majoré par $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$. Donc, par convergence dominée,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t\wedge\tau^x}u(Y^x_{t\wedge\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}u(Y^x_{\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right).$$

Pour le second terme, par le même argument, on a

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}u(Y^x_t)\mathbf{1}_{\{\tau^x=\infty\}}\right) = 0.$$

Par conséquent, par continuité des trajectoires de $(Y^x_t)_{t\geq 0}$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(Z^x_{t\wedge\tau^x}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}u(Y^x_{\tau^x})\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) \\ &= u(0)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right).\end{aligned}$$

6 Il suffit de combiner les résultats des questions 4 et 5. On a d'une part $\mathbb{E}\left(Z^x_{t\wedge\tau^x}\right) = u(x)$ et d'autre part $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(Z^x_{t\wedge\tau^x}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right)$. On en déduit que pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\tau^x}\mathbf{1}_{\{\tau^x<\infty\}}\right) &= u(x) \\ &= \exp\left(-\frac{bx}{\sigma^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\lambda\sigma^2}{b^2}}\right)\right).\end{aligned}$$

7 On considère la limite $\lambda \to 0$ dans l'égalité précédente. Le membre de droite converge vers $\exp\left(-2\frac{bx}{\sigma^2}\right)$. Par convergence dominée, le membre de gauche converge vers $\mathbb{P}(\tau^x < \infty)$. On en déduit

$$\mathbb{P}(\tau^x < \infty) = \exp\left(-2\frac{bx}{\sigma^2}\right).$$

Partie 2 : Limite de petit bruit pour des EDO mal posées

8 On a

$$\mathrm{d}\left(X^{x,\epsilon}_t - \xi^x_t\right) = \left(b(X^{x,\epsilon}_t) - b(\xi^x_t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{2\epsilon}\,\mathrm{d}W_t$$

avec la condition initiale $X_0^{x,\epsilon} - \xi_0^x = 0$. Et donc, par intégration

$$X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x = \int_0^t \left(b(X_s^{x,\epsilon}) - b(\xi_s^x)\right) \mathrm{d}s + \sqrt{2\epsilon} W_t.$$

En prenant la valeur absolue, on obtient

$$\begin{aligned} |X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x| &\leq \int_0^t |b(X_s^{x,\epsilon}) - b(\xi_s^x)| \,\mathrm{d}s + \sqrt{2\epsilon}|W_t| \\ &\leq L \int_0^t |X_s^{x,\epsilon} - \xi_s^x| \,\mathrm{d}s + \sqrt{2\epsilon}|W_t|. \end{aligned}$$

où L est la constante de Lipschitz de la fonction b. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(|X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x|\right) \leq L \int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s^{x,\epsilon} - \xi_s^x|\right) \mathrm{d}s + \sqrt{2\epsilon}\, \mathbb{E}\left(|W_t|\right).$$

Par Gronwall, on a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(|X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x|\right) \leq \sqrt{2\epsilon} \int_0^t \exp(L(t-s)) \mathbb{E}\left(|W_s|\right) \, ds$$

et puisque $\mathbb{E}(|W_s|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|W_s|^2)} = \sqrt{s}$, on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(|X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x|\right) \leq \sqrt{2\epsilon} \int_0^t \exp(L(t-s)) \sqrt{s} \, ds$$

ce qui implique que pour tout $T > 0$, $\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left(|X_t^{x,\epsilon} - \xi_t^x|\right) = 0$.

L'existence d'une unique solution forte à l'EDS dans le cas où b est discontinue n'est pas un résultat trivial. Cf. par exemple le papier : A.J. Veretennikov, On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations. Sbornik : Mathematics, 39(3) :387-403, 1981.

Partie 2-A : Cas de non-existence.

9 La fonction $t \mapsto \xi_t^0$ est dérivable au sens des distributions, et sa dérivée est la fonction bornée $t \mapsto b(\xi_t^0)$. La fonction $t \mapsto \xi_t^0$ est donc une fonction absolument continue. Par conséquent, on a

$$\frac{d}{dt}(\xi_t^0)^2 = 2\xi_t^0 \frac{d}{dt}\xi_t^0 = 2\xi_t^0 b(\xi_t^0)$$

et par intégration, on obtient

$$(\xi_t^0)^2 = 2 \int_0^t \xi_s^0 b(\xi_s^0) \, ds.$$

Pour le lecteur qui n'est pas à l'aise avec la dérivation des fonctions composées pour des fonctions absolument continues, on peut aussi raisonner de manière élémentaire, en utili-

sant Fubini :

$$\begin{aligned}2\int_0^t b(\xi_s^0)\xi_s^0\,ds &= 2\int_0^t b(\xi_s^0)\int_0^s b(\xi_r^0)\,dr\,ds\\ &= 2\int_0^t b(\xi_r^0)\int_r^t b(\xi_s^0)\,ds\,dr\\ &= 2\int_0^t b(\xi_r^0)(\xi_t^0-\xi_r^0)\,dr\\ &= 2\xi_t^0\int_0^t b(\xi_r^0)\,dr - 2\int_0^t b(\xi_r^0)\xi_r^0\,dr\\ &= 2(\xi_t^0)^2 - 2\int_0^t b(\xi_s^0)\xi_s^0\,ds.\end{aligned}$$

On en déduit $(\xi_t^0)^2 = 2\int_0^t b(\xi_s^0)\xi_s^0\,ds$.

10 On calcule :

$$\begin{aligned}(\xi_t^0)^2 &= 2\int_0^t \xi_s^0 b(\xi_s^0)\,ds\\ &= 2\int_0^t \xi_s^0\left(b_+\mathbf{1}_{\{\xi_s^0\geq 0\}} + b_-\mathbf{1}_{\{\xi_s^0<0\}}\right)\,ds.\end{aligned}$$

On remarque que la fonction $y\mapsto y\left(b_+\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + b_-\mathbf{1}_{\{y<0\}}\right)$ est négative ou nulle, et donc, on en déduit que pour presque tout s, $\xi_s^0\left(b_+\mathbf{1}_{\{\xi_s^0\geq 0\}} + b_-\mathbf{1}_{\{\xi_s^0<0\}}\right) = 0$, ce qui implique (par continuité de $s\mapsto\xi_s^0$) : pour tout $s\geq 0$, $\xi_s^0 = 0$. Ceci implique : pour tout $t\geq 0$,

$$0 = \int_0^t b(0)\,ds$$

ce qui est impossible puisque $b(0) = b_+ < 0$.

11 Par Itô, on a :

$$d(X_t^{0,\epsilon})^2 = 2X_t^{0,\epsilon}dX_t^{0,\epsilon} + \frac{1}{2}2d\langle X^{0,\epsilon}\rangle_t$$

et donc

$$d(X_t^{0,\epsilon})^2 = 2X_t^{0,\epsilon}b(X_t^{0,\epsilon})\,dt + 2X_t^{0,\epsilon}\sqrt{2\epsilon}dW_t + 2\epsilon dt.$$

Par intégration en temps,

$$(X_t^{0,\epsilon})^2 = \int_0^t 2X_s^{0,\epsilon}b(X_s^{0,\epsilon})\,ds + 2\sqrt{2\epsilon}\int_0^t X_s^{0,\epsilon}dW_s + 2\epsilon t. \tag{4}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}(X_t^{0,\epsilon})^2 &= \left(\int_0^t b(X_s^{0,\epsilon})\,ds + \sqrt{2\epsilon}W_t\right)^2\\ &\leq 2\left(\int_0^t b(X_s^{0,\epsilon})\,ds\right)^2 + 4\epsilon\mathbb{E}(W_t^2)\\ &\leq 2t^2\max(|b_+|,|b_-|) + 4\epsilon t\end{aligned}$$

et donc, pour tout $t > 0$, $\int_0^t \mathbb{E}(X_s^{0,\epsilon})^2\, ds < \infty$, ce qui implique $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^{0,\epsilon} dW_s\right) = 0$.

En prenant l'espérance de (4), on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t^{0,\epsilon})^2 &= \int_0^t 2\mathbb{E}\left(X_s^{0,\epsilon} b(X_s^{0,\epsilon})\right)\, ds + 2\epsilon t \\
&= \int_0^t 2\mathbb{E}\left(X_s^{0,\epsilon}\left(b_+ \mathbf{1}_{\{X_s^0 \geq 0\}} + b_- \mathbf{1}_{\{X_s^0 < 0\}}\right)\right)\, ds + 2\epsilon t \\
&\leq 2\epsilon t.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $T > 0$, $\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left((X_t^{0,\epsilon})^2\right) = 0$.

12 On a, par un changement de variable $s = \epsilon r$,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^{0,\epsilon} &= \epsilon^{-1} X_{\epsilon t}^{0,\epsilon} \\
&= \epsilon^{-1}\left(\int_0^{\epsilon t} b(X_s^{0,\epsilon})\, ds + \sqrt{2\epsilon} W_{\epsilon t}\right) \\
&= \int_0^t b(X_{\epsilon r}^{0,\epsilon})\, dr + \sqrt{2}\epsilon^{-1/2} W_{\epsilon t}.
\end{aligned}$$

D'après l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle, on sait que

$$(\epsilon^{-1/2} W_{\epsilon t})_{t \geq 0}$$

est un mouvement brownien. On en déduit le résultat demandé car l'EDS

$$\tilde{X}_t^0 = \int_0^t b(\tilde{X}_s^0) \mathrm{d}s + \sqrt{2}\tilde{W}_t$$

admet une unique solution en loi. *L'unicité en loi est une conséquence de l'unicité trajectorielle, par le théorème de Yamada Watanabe.*

13 *Le fait que la mesure invariante du processus admette une densité régulière découle de résultats généraux sur les EDS avec diffusion minorée. On peut aussi le voir de manière élémentaire en utilisant le théorème de Girsanov.*

L'équation de Fokker Planck associée au processus s'écrit

$$\partial_t \psi = -\partial_x(b(x)\psi) + \partial_{x,x}\psi.$$

On cherche des solutions stationnaires de cette EDP. Comme on est en dimension 1, b peut s'écrire sous la forme $b = -B'$ avec $B(x) = -b_+ x \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} - b_- x \mathbf{1}_{\{x < 0\}}$, et on considère donc le problème (qui est en fait une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre) :

$$0 = \partial_x(B'(x)\psi + \partial_x \psi)$$

qui admet comme unique solution régulière d'intégrale 1

$$\psi(x) = Z^{-1} \exp(-B(x))$$

avec $Z = \int_{\mathbb{R}} \exp(-B(x))\,dx < \infty$. La mesure μ demandée est donc la mesure qui admet ψ comme densité.

14 Par un changement de variable $s = r\epsilon$, on a

$$\begin{aligned}\eta_T^\epsilon &= \int_0^T \mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon} \geq 0\}} \mathrm{d}s \\ &= \epsilon \int_0^{T/\epsilon} \mathbf{1}_{\{X_{\epsilon r}^{0,\epsilon} \geq 0\}} \mathrm{d}r \\ &= \epsilon \int_0^{T/\epsilon} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_r^{0,\epsilon} \geq 0\}} \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

15 On réécrit l'égalité précédente sous la forme :

$$\eta_T^\epsilon = T(T/\epsilon)^{-1} \int_0^{T/\epsilon} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_r^{0,\epsilon} \geq 0\}} \mathrm{d}r.$$

Par conséquent, on a l'égalité en loi :

$$\eta_T^\epsilon \overset{\mathcal{L}}{=} T(T/\epsilon)^{-1} \int_0^{T/\epsilon} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_r^{0} \geq 0\}} \mathrm{d}r.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, sous hypothèse d'ergodicité [1], on obtient donc, presque sûrement,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} (T/\epsilon)^{-1} \int_0^{T/\epsilon} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_r^{0} \geq 0\}} \mathrm{d}r &= T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} Z^{-1} \exp(-B(x))\,dx \\ &= TZ^{-1} \int_0^\infty \exp(b_+ x)\,dx.\end{aligned}$$

On calcule $\int_0^\infty \exp(b_+ x)\,dx = -1/b_+$ et

$$\begin{aligned}Z &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-B(x))\,dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp(b_- x) + \int_0^{+\infty} \exp(b_+ x) \\ &= 1/b_- - 1/b_+.\end{aligned}$$

Puisque la convergence presque sûr implique la convergence en loi, on en déduit qu'en loi,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \eta_T^\epsilon &= T \frac{-1/b_+}{1/b_- - 1/b_+} \\ &= T \frac{b_-}{b_- - b_+}.\end{aligned}$$

On utilise enfin que la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité vers la constante.

1. Le fait que le processus admette une unique mesure invariante implique la propriété d'ergodicité utilisée ici.

Partie 2-B : Cas de non-unicité.

16 Il suffit de considérer les fonctions $\xi_t^{0,+} = b_+ t$ et $\xi_t^{0,-} = b_- t$.

17 Il suffit de résoudre le problème

$$\begin{cases} \epsilon v''(x) + b(x)v'(x) = 0, & x \in [-\delta, \delta], \\ v(-\delta) = 0 \text{ et } v(\delta) = 1, \end{cases}$$

et de considérer $v(0)$. On a, pour $x \in [-\delta, \delta]$, $\frac{v''}{v'} = -\frac{b}{\epsilon}$. On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$,

$$v(x) = v(0) + C \int_0^x \exp\left(-\epsilon^{-1} \int_0^y b(s)\, ds\right) dy.$$

On écrit ensuite les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} 1 &= v(+\delta) \\ &= v(0) + C \int_0^\delta \exp\left(-\epsilon^{-1} \int_0^y b(s)\, ds\right) dy \\ &= v(0) + C \int_0^\delta \exp\left(-\epsilon^{-1} b_+ y\right) dy \\ &= v(0) + C\epsilon(b_+)^{-1} \left(1 - \exp\left(-\epsilon^{-1} b_+ \delta\right)\right). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 0 &= v(-\delta) \\ &= v(0) - C \int_{-\delta}^0 \exp\left(\epsilon^{-1} \int_y^0 b(s)\, ds\right) dy \\ &= v(0) - C \int_{-\delta}^0 \exp\left(-\epsilon^{-1} b_- y\right) dy \\ &= v(0) + C\epsilon(b_-)^{-1} \left(1 - \exp\left(\epsilon^{-1} b_- \delta\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 1 &= v(0) - v(0) \frac{(b_+)^{-1} \left(1 - \exp\left(-\epsilon^{-1} b_+ \delta\right)\right)}{(b_-)^{-1} \left(1 - \exp\left(\epsilon^{-1} b_- \delta\right)\right)} \\ &= v(0) \left(1 - \frac{b_- \left(1 - \exp\left(-\epsilon^{-1} b_+ \delta\right)\right)}{b_+ \left(1 - \exp\left(\epsilon^{-1} b_- \delta\right)\right)}\right) \end{aligned}$$

qui est le résultat demandé.

18 A nouveau, il s'agit de résoudre le problème

$$\begin{cases} \epsilon w''(x) + b(x)w'(x) = -1, & x \in [-\delta, \delta], \\ w(-\delta) = 0 \text{ et } w(\delta) = 0, \end{cases}$$

et de calculer $\lim_{\epsilon \to 0} w(0)$.

On regarde le problème pour $x \in [0, \delta]$ pour commencer :

$$\begin{cases} \epsilon w''(x) + b_+ w'(x) = -1, \qquad x \in (0, \delta], \\ w(0) = w_0 \text{ et } w(\delta) = 0. \end{cases}$$

En posant $w_+(x) = w(x) + (b_+)^{-1} x$, on a

$$\begin{cases} \epsilon w_+''(x) + b_+ w_+'(x) = 0, \qquad x \in (0, \delta], \\ w_+(0) = w_0 \text{ et } w_+(\delta) = (b_+)^{-1} \delta. \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe $C_+ > 0$ tel que

$$w_+(x) = w_0 + C_+ \epsilon (b_+)^{-1} (1 - \exp(-b_+ \epsilon^{-1} x))$$

soit

$$w(x) = w_0 - (b_+)^{-1} x + C_+ \epsilon (b_+)^{-1} (1 - \exp(-b_+ \epsilon^{-1} x)).$$

Avec la condition aux limites, on obtient

$$0 = w_0 - (b_+)^{-1} \delta + C_+ \epsilon (b_+)^{-1} (1 - \exp(-b_+ \epsilon^{-1} \delta)). \tag{5}$$

Noter que $w'(0+) = -(b_+)^{-1} + C_+$.

De même, pour $x \in [-\delta, 0]$, on a :

$$\begin{cases} \epsilon w''(x) + b_- w'(x) = -1, \qquad x \in [-\delta, 0), \\ w(0) = w_0 \text{ et } w(-\delta) = 0. \end{cases}$$

En posant $w_-(x) = w(x) + (b_-)^{-1} x$, on a

$$\begin{cases} \epsilon w_-''(x) + b_- w_-'(x) = 0, \qquad x \in [-\delta, 0), \\ w_-(0) = w_0 \text{ et } w_-(-\delta) = -(b_-)^{-1} \delta. \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe $C_- > 0$ tel que

$$w_-(x) = w_0 + C_- \epsilon (b_-)^{-1} (\exp(-b_- \epsilon^{-1} x) - 1)$$

soit

$$w(x) = w_0 - (b_-)^{-1} x + C_- \epsilon (b_-)^{-1} (\exp(-b_- \epsilon^{-1} x) - 1).$$

Avec la condition aux limites, on obtient

$$0 = w_0 + (b_-)^{-1} \delta + C_- \epsilon (b_-)^{-1} (\exp(b_- \epsilon^{-1} \delta) - 1). \tag{6}$$

Noter que $w'(0-) = -(b_-)^{-1} - C_-$.

En écrivant la continuité des dérivées, on a $-(b_+)^{-1} + C_+ = -(b_-)^{-1} - C_-$. En combinant ce résultat avec (5)–(6), on obtient donc le système linéaire suivant sur (C_-, C_+) :

$$\begin{cases} C_+ + C_- = (b_+)^{-1} - (b_-)^{-1} \\ C_- \epsilon (b_-)^{-1} (\exp(b_- \epsilon^{-1} \delta) - 1) + C_+ \epsilon (b_+)^{-1} (1 - \exp(-b_+ \epsilon^{-1} \delta)) = -(b_-)^{-1} \delta - (b_+)^{-1} \delta \end{cases}$$

En multipliant (5) par $\left(\epsilon(b_+)^{-1}(1-\exp(-b_+\epsilon^{-1}\delta))\right)^{-1}$ et (6) par $\left(\epsilon(b_-)^{-1}(\exp(b_-\epsilon^{-1}\delta)-1)\right)^{-1}$ et en ajoutant les deux identités obtenues, on obtient

$$\begin{aligned}
&-w_0\left(\left(\epsilon(b_+)^{-1}(1-\exp(-b_+\epsilon^{-1}\delta))\right)^{-1}+\left(\epsilon(b_-)^{-1}(\exp(b_-\epsilon^{-1}\delta)-1)\right)^{-1}\right)\\
&=-(b_+)^{-1}\delta\left(\epsilon(b_+)^{-1}(1-\exp(-b_+\epsilon^{-1}\delta))\right)^{-1}+(b_-)^{-1}\delta\left(\epsilon(b_-)^{-1}(\exp(b_-\epsilon^{-1}\delta)-1)\right)^{-1}\\
&\quad+C_++C_-\\
&=-(b_+)^{-1}\delta\left(\epsilon(b_+)^{-1}(1-\exp(-b_+\epsilon^{-1}\delta))\right)^{-1}+(b_-)^{-1}\delta\left(\epsilon(b_-)^{-1}(\exp(b_-\epsilon^{-1}\delta)-1)\right)^{-1}\\
&\quad+(b_+)^{-1}-(b_-)^{-1}
\end{aligned}$$

En résolvant ce problème en w_0 puis en faisant tendre ϵ vers 0, on a alors

$$-\lim_{\epsilon\to 0}w_0\,(b_+-b_-)=-(b_+)^{-1}\delta b_++(b_-)^{-1}\delta(-b_-)$$

ce qui donne finalement

$$\lim_{\epsilon\to 0}w_0=\frac{2\delta}{b_+-b_-}.$$

19 On a clairement

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\geq T-\bar\tau_\delta^\epsilon)\geq\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\geq T-\bar\tau_\delta^\epsilon,\tau_\delta^{0,\epsilon}<\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}).$$

De plus, sur l'évènement $\{\tau_\delta^{0,\epsilon}<\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}$ et $\forall t\geq\tau_\delta^{0,\epsilon},X_t^{0,\epsilon}>0\}$, on a $\bar\tau_\delta^\epsilon=T\wedge\tau_\delta^{0,\epsilon}$ et

$$\theta_T^\epsilon=\int_0^T\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}\geq 0\}}\mathrm{d}s\geq\int_{T\wedge\tau_\delta^{0,\epsilon}}^T\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}\geq 0\}}\mathrm{d}s=T-\bar\tau_\delta^\epsilon.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\geq T-\bar\tau_\delta^\epsilon,\tau_\delta^{0,\epsilon}<\tau_{-\delta}^{0,\epsilon})\geq\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon}<\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}\text{ et }\forall t\geq\tau_\delta^{0,\epsilon},X_t^{0,\epsilon}>0).$$

De même, on a clairement

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\leq\bar\tau_\delta^\epsilon)\geq\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\leq\bar\tau_\delta^\epsilon,\tau_\delta^{0,\epsilon}>\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}).$$

Et sur l'évènement $\{\tau_\delta^{0,\epsilon}>\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}$ et $\forall t\geq\tau_{-\delta}^{0,\epsilon},X_t^{0,\epsilon}<0\}$, on a $\bar\tau_\delta^\epsilon=T\wedge\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}$ et

$$\theta_T^\epsilon=\int_0^T\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}\geq 0\}}\mathrm{d}s=\int_0^{T\wedge\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}}\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}\geq 0\}}\mathrm{d}s\leq T\wedge\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}=\bar\tau_\delta^\epsilon.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\leq\bar\tau_\delta^\epsilon,\tau_\delta^{0,\epsilon}>\tau_{-\delta}^{0,\epsilon})\geq\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon}>\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}\text{ et }\forall t\geq\tau_{-\delta}^{0,\epsilon},X_t^{0,\epsilon}<0).$$

20 On sait que

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon\geq T-\bar\tau_\delta^\epsilon)\geq\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon}<\tau_{-\delta}^{0,\epsilon}\text{ et }\forall t\geq\tau_\delta^{0,\epsilon},X_t^{0,\epsilon}>0).$$

On écrit ensuite, en utilisant la propriété d'indépendance conséquence de la propriété de Markov forte,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \forall t \geq \tau_\delta^{0,\epsilon}, X_t^{0,\epsilon} > 0)\\
&\geq \mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \forall t \geq \tau_\delta^{0,\epsilon}, X_t^{0,\epsilon} > 0 | \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\\
&= \mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} | \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\mathbb{P}(\forall t \geq \tau_\delta^{0,\epsilon}, X_t^{0,\epsilon} > 0 | \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty).
\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov forte et le résultat de la question 7, on sait que $\mathbb{P}(\forall t \geq \tau_\delta^{0,\epsilon}, X_t^{0,\epsilon} > 0 | \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty) = \mathbb{P}(\forall t \geq 0, X_t^{\delta,\epsilon} > 0) = 1 - \exp(-b_+ \delta \epsilon^{-1})$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} | \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)\\
&= \mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon})\\
&= q(\epsilon, \delta).
\end{aligned}$$

L'égalité des probabilités $\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty)$ et $\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon})$ est une conséquence de :

$$\{\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \tau_\delta^{0,\epsilon} < \infty\} = \{\tau_\delta^{0,\epsilon} < \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} \text{ et } \tau_\delta^{0,\epsilon} \wedge \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} < \infty\}$$

et $\mathbb{P}(\tau_\delta^{0,\epsilon} \wedge \tau_{-\delta}^{0,\epsilon} < \infty) = 1$ car $w(0) = \mathbb{E}(\tau_\delta^{0,\epsilon} \wedge \tau_{-\delta}^{0,\epsilon}) < \infty$.

On en déduit le résultat

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \geq (1 - \exp(-b_+ \delta \epsilon^{-1}))q(\epsilon, \delta).$$

Le même raisonnement permet de montrer que

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \geq (1 - \mathrm{e}^{b_- \delta/\epsilon})(1 - q(\epsilon, \delta)).$$

21 Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord remarquer que $\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}(1 - \mathrm{e}^{-b_+\delta/\epsilon})q(\epsilon,\delta) = \frac{b_+}{b_+ - b_-}$ et $\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}(1 - \mathrm{e}^{b_-\delta/\epsilon})(1 - q(\epsilon,\delta)) = \frac{-b_-}{b_+ - b_-}$ et que, de plus, $\frac{b_+}{b_+ - b_-} + \frac{-b_-}{b_+ - b_-} = 1$. Si les évènements $\{\theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon)\}$ et $\{\theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon\}$ étaient disjoints, on pourrait donc transformer les inégalités obtenues à la question 20 par des égalités dans l'asymptotique $\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}$. C'est pour rendre ces deux évènements disjoints qu'on introduit l'évènement $\{\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2\}$, dont on va pouvoir contrôler la probabilité du complémentaire par la question 18.

Ecrivons maintenant le détail. On remarque que sur l'évènement $\{\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2\}$, les deux évènements $\{\theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon\}$ et $\{\theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon\}$ sont disjoints. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon) + \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \leq \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2) \leq 1. \tag{7}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon) + \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon \geq T/2, \theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon).$$

Par une inégalité de Markov, on a

$$0 \leq \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon \geq T/2, \theta_T^\epsilon \geq T - \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \leq \mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon \geq T/2) \leq \frac{2}{T}\mathbb{E}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon),$$

et donc, par la question 18,

$$\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon)$$

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon).$$

On a évidemment un résultat similaire pour l'évènement $\{\theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon\}$.

En utilisant la question 20, on a donc d'une part

$$\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) \geq \frac{b_+}{b_+-b_-},$$

$$\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \geq \frac{-b_-}{b_+-b_-}.$$

D'autre part, en utilisant (7) et la question 20, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) &\leq \limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\left(1-\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon)\right)\\ &\leq 1-\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon)\\ &\leq 1-\frac{-b_-}{b_+-b_-} = \frac{b_+}{b_+-b_-}.\end{aligned}$$

De même,

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon) \leq \frac{-b_-}{b_+-b_-},$$

Puisque

$$\begin{aligned}\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) &\leq \limsup_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon)\\ &\leq \limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon)\end{aligned}$$

et que les deux termes aux extrémités sont égaux, on en déduit que

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \frac{b_+}{b_+-b_-}.$$

De même, puisque

$$\begin{aligned}\liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) &\leq \liminf_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon)\\ &\leq \limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon)\end{aligned}$$

et que les deux termes aux extrémités sont égaux, on en déduit que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \geq T-\bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \frac{b_+}{b_+-b_-}.$$

Par un raisonnement similaire, on obtient les résultats suivant sur l'évènement $\{\theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon\}$:

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar{\tau}_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \leq \bar{\tau}_\delta^\epsilon) = \frac{-b_-}{b_+-b_-},$$

et

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \le \bar\tau_\delta^\epsilon) = \frac{-b_-}{b_+ - b_-}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}\right| \\ &= \max\left(\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}, -\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) + \frac{b_+}{b_+ - b_-}\right)\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}&\limsup_{\epsilon\to 0}\left|\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}\right| \\ &= \max\left(\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}, -\left(\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}\right)\right)\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\left|\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{b_+}{b_+ - b_-}\right| = 0.$$

De même,

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\left|\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \le \bar\tau_\delta^\epsilon) - \frac{-b_-}{b_+ - b_-}\right| = 0.$$

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) + \mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \le \bar\tau_\delta^\epsilon) + \mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \bar\tau_\delta^\epsilon < \theta_T^\epsilon < T-\bar\tau_\delta^\epsilon) \\ &= \mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2) \le 1.\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}0 &\le \limsup_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \bar\tau_\delta^\epsilon < \theta_T^\epsilon < T-\bar\tau_\delta^\epsilon) \\ &\le 1 - \liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon) - \liminf_{\delta\to 0}\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \theta_T^\epsilon \le \bar\tau_\delta^\epsilon) \\ &= 0,\end{aligned}$$

par ce qui précède. On en déduit que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon < T/2, \bar\tau_\delta^\epsilon < \theta_T^\epsilon < T-\bar\tau_\delta^\epsilon) = 0.$$

22 Sur l'événement $\{\theta_T^\epsilon \ge T-\bar\tau_\delta^\epsilon\}$, on sait que le processus est resté au-dessus de 0 sur une période de temps supérieure ou égale à $T-\bar\tau_\delta^\epsilon$. Par conséquence, il est resté en dessous de 0 sur une période de temps inférieure ou égale à $\bar\tau_\delta^\epsilon$ ce qui s'écrit également

$$\sup_{t\in[0,T]}|\theta_t^\epsilon - t| \le \bar\tau_\delta^\epsilon$$

puisque $|\theta_t^\epsilon - t| = |\int_0^t(\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}\ge 0\}} - 1)\mathrm{d}s| = |\int_0^t -\mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}<0\}}\mathrm{d}s| = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{0,\epsilon}<0\}}\mathrm{d}s$ est le temps passé en dessous de 0.

Par ailleurs, sur l'évènement $\{\theta^\epsilon_T \le \bar\tau^\epsilon_\delta\}$, on a clairement $\sup_{t\in[0,T]}|\theta^\epsilon_t| \le \bar\tau^\epsilon_\delta$ puisque $\sup_{t\in[0,T]}|\theta^\epsilon_t| = \sup_{t\in[0,T]}\theta^\epsilon_t = \theta^\epsilon_T$.

23 On commence par écrire :

$$\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})] = \mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}] + \mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta\ge T/2\}}].$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta\ge T/2\}}]\right| &\le \|F\|_{L^\infty}\mathbb{P}(\tau^{0,\epsilon}_\delta \wedge \tau^{0,\epsilon}_{-\delta} \ge T/2)\\ &\le \|F\|_{L^\infty}\frac{2}{T}\mathbb{E}(\tau^{0,\epsilon}_\delta \wedge \tau^{0,\epsilon}_{-\delta}).\end{aligned}$$

Et donc, par la question 18,

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta\ge T/2\}}]\right| = 0.$$

Par ailleurs, sur l'évènement $\{\bar\tau^\epsilon_\delta < T/2\}$, les trois évènements $\{\theta^\epsilon_T \ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}$, $\{\bar\tau^\epsilon_\delta < \theta^\epsilon_T < T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}$ et $\{\theta^\epsilon_T \le \bar\tau^\epsilon_\delta\}$ sont disjoints. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}] &= \mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}]\\ &\quad+\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\le\bar\tau^\epsilon_\delta\}}]\\ &\quad+\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<\theta^\epsilon_T<T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}].\end{aligned} \tag{8}$$

Pour le premier terme, on écrit,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}] - F((t)_{t\in[0,T]})\frac{b_+}{b_+-b_-}\\ &=\mathbb{E}[\big(F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]}) - F((t)_{t\in[0,T]})\big)\,\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}]\\ &\quad+F((t)_{t\in[0,T]})\left(\mathbb{P}(\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2,\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta)-\frac{b_+}{b_+-b_-}\right).\end{aligned}$$

Noter qu'on peut contrôler le premier terme au membre de droite, en utilisant le fait que F est L-lipschitzienne et la question 22 :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[\big(F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]}) - F((t)_{t\in[0,T]})\big)\,\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}]\right| &\le L\mathbb{E}[\bar\tau^\epsilon_\delta\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}]\\ &\le L\mathbb{E}[\tau^{0,\epsilon}_\delta\wedge\tau^{0,\epsilon}_{-\delta}].\end{aligned}$$

et donc, par la question 18,

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[\big(F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]}) - F((t)_{t\in[0,T]})\big)\,\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}]\right| = 0.$$

Donc, en utilisant la question 21,

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta^\epsilon_t)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau^\epsilon_\delta<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta^\epsilon_T\ge T-\bar\tau^\epsilon_\delta\}}] - F((t)_{t\in[0,T]})\frac{b_+}{b_+-b_-}\right| = 0.$$

De même, pour le second terme dans (8) :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta_T^\epsilon\le\bar\tau_\delta^\epsilon\}}]-F((0)_{t\in[0,T]})\frac{-b_-}{b_+-b_-}\\
&=\mathbb{E}[\big(F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})-F((0)_{t\in[0,T]})\big)\,\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta_T^\epsilon\le\bar\tau_\delta^\epsilon\}}]\\
&\quad+F((0)_{t\in[0,T]})\left(\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2,\theta_T^\epsilon\le\bar\tau_\delta^\epsilon)-\frac{-b_-}{b_+-b_-}\right).
\end{aligned}
$$

Et, par les questions 22, 18 et 21,

$$
\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\theta_T^\epsilon\le\bar\tau_\delta^\epsilon\}}]-F((0)_{t\in[0,T]})\frac{-b_-}{b_+-b_-}\right|=0.
$$

Enfin, pour le troisième terme dans (8), on utilise à nouveau la question 21 :

$$
\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<\theta_T^\epsilon<T-\bar\tau_\delta^\epsilon\}}]\right|\le\|F\|_{L^\infty}\mathbb{P}(\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2,\bar\tau_\delta^\epsilon<\theta_T^\epsilon<T-\bar\tau_\delta^\epsilon)
$$

et donc

$$
\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<T/2\}}\mathbf{1}_{\{\bar\tau_\delta^\epsilon<\theta_T^\epsilon<T-\bar\tau_\delta^\epsilon\}}]\right|=0.
$$

En combinant tous ces résultats, on obtient finalement que

$$
\lim_{\delta\to0}\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})]-F((t)_{t\in[0,T]})\frac{b_+}{b_+-b_-}-F((0)_{t\in[0,T]})\frac{-b_-}{b_+-b_-}\right|=0.
$$

Puisque le terme considéré ne dépend pas de δ, on en déduit

$$
\limsup_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})]-F((t)_{t\in[0,T]})\frac{b_+}{b_+-b_-}-F((0)_{t\in[0,T]})\frac{-b_-}{b_+-b_-}\right|=0,
$$

et donc, finalement

$$
\lim_{\epsilon\to0}\left|\mathbb{E}[F((\theta_t^\epsilon)_{t\in[0,T]})]-F((t)_{t\in[0,T]})\frac{b_+}{b_+-b_-}-F((0)_{t\in[0,T]})\frac{-b_-}{b_+-b_-}\right|=0.
$$

On obtient donc le résultat demandé avec ρ une Bernoulli de paramètre $\frac{b_+}{b_+-b_-}$.

24 On remarque que pour tout $t\ge0$

$$
X_t^{0,\epsilon}=b_+\theta_t^\epsilon+b_-\left(t-\theta_t^\epsilon\right).
$$

Par conséquent, quand $\epsilon\to0$, $(X_t^{0,\epsilon})_{t\in[0,T]}$ converge en loi vers

$$
b_+\rho t+b_-\left(1-\rho\right)t=\rho\xi_t^{0,+}+(1-\rho)\xi_t^{0,-}.
$$