Examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

15 janvier 2019, 14h00-17h00.

Les notes de cours sont autorisées. Certaines questions sont facultatives : les résultats de ces questions peuvent être admis, et leur résolution éventuelle apportera des "points bonus".

Exercice 1 : Estimateurs de quantile

A. Préliminaires

A-1. Quantiles

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On note $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ la fonction de répartition de X et,

$$\forall \alpha \in (0,1),\ F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x,\ F_X(x) \geq \alpha\}$$

l'inverse généralisée de F_X.

1. Montrer que
$$\{x,\ F_X(x) \geq \alpha\} = [F_X^{-1}(\alpha), +\infty).$$
2. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $(0,1)$. Montrer que $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X.
3. Montrer que
$$F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \geq \alpha \text{ et } \lim_{x \overset{<}{\to} F_X^{-1}(\alpha)} F_X(x) \leq \alpha$$
où $x \overset{<}{\to}$ désigne la limite par valeurs inférieures (limite à gauche).

Pour un réel $\alpha \in (0,1)$ fixé, on cherche à estimer le quantile d'ordre α de X :

$$x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha).$$

En pratique x_α donne un seuil sur X associé à un niveau de confiance α (penser à α proche de 1 et à l'inégalité $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$, cf. Question 3).

On suppose dans toute la suite que F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de x_α et telle que $F_X'(x_\alpha) > 0$.

4. Montrer que F_X est localement un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme autout de x_α, de fonction inverse F_X^{-1}.

A-2. Méthode delta

Nous aurons besoin dans la suite de la méthode delta que nous rappelons. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(Y_n - a) = \mathcal{N}(0,\Gamma) \text{ en loi}$$

où $a \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\varphi(Y_n) - \varphi(a)) = \mathcal{N}\left(0, [\nabla\varphi(a)]^T \Gamma \nabla\varphi(a)\right) \text{ en loi.} \tag{1}$$

5. *Question facultative.* Montrer que Y_n converge en probabilité vers a, puis prouver (1).

B. Quantile empirique

On considère une suite i.i.d. $(X_i)_{i\geq 1}$ de même loi que X. Pour tout n fixé, on note $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$ les éléments du n-échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ réordonnés de manière croissante : $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. Un premier estimateur naturel est donné par le quantile d'ordre α de la fonction de répartition empirique :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i\leq x}$$

associée à la loi empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$. On introduit donc :

$$\hat{X}_{\alpha,n} = \hat{F}_n^{-1}(\alpha) = \inf\{x,\, \hat{F}_n(x)\geq \alpha\}.$$

6. Montrer que $\hat{X}_{\alpha,n} = X_{(\lceil \alpha n\rceil)}$ où $\lceil\cdot\rceil$ désigne la fonction partie entière par excès définie par : pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\lceil y\rceil\in\mathbb{Z}$ et $\lceil y\rceil - 1 < y \leq \lceil y\rceil$. (On pourra simplement faire un dessin pour expliquer le résultat.)

On s'attend à ce que $\hat{X}_{\alpha,n}$ converge, en un certain sens, vers x_α. On va montrer un théorème de la limite centrale sur $\hat{X}_{\alpha,n} - x_\alpha$.

B-1. Le cas de la loi uniforme sur $(0,1)$

On considère dans cette partie le cas de la loi uniforme sur $(0,1)$: on note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$, F_U la fonction de répartition associée (noter que $F_U^{-1}(\alpha)=\alpha$) et $(U_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de même loi que U.

7. Montrer que $(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$ est un vecteur aléatoire de densité $n!\,1_{0<u_1<\ldots<u_n<1}$.
8. Soit $(W_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1. On note $S_j = \sum_{i=1}^{j} W_i$. Montrer que $(S_1,\ldots,S_{n+1})$ est un vecteur aléatoire de densité $\exp(-s_{n+1})1_{0<s_1<\ldots<s_{n+1}}$.
9. On note pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, $V_i = \frac{S_i}{S_{n+1}}$ et $V_{n+1} = S_{n+1}$. Montrer que $(V_1,\ldots,V_{n+1})$ est un vecteur aléatoire de densité $v_{n+1}^n \exp(-v_{n+1})1_{0<v_1<\ldots<v_n<1}1_{v_{n+1}>0}$.
10. En déduire que $(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$ a même loi que $(V_1,\ldots,V_n)$.
11. En déduire que $\hat{U}_{\alpha,n}$ a même loi que $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ avec $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lceil \alpha n\rceil} W_i$ et $B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=\lceil\alpha n\rceil+1}^{n+1} W_i$.
12. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}A_n\\ B_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha\\ 1-\alpha\end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\right) \text{ en loi .}$$

13. En utilisant la méthode delta, en déduire que $\sqrt{n}(\hat{U}_{n,\alpha}-\alpha)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\alpha(1-\alpha))$.

B-2. Retour au cas général

14. En utilisant le fait que $(X_1,\ldots,X_n)$ a même loi que $(F_X^{-1}(U_1),\ldots,F_X^{-1}(U_n))$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\hat{X}_{\alpha,n}-x_\alpha) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{(F_X'(x_\alpha))^2}\right) \text{ en loi.}$$

C. Estimateur de Wilks

Le résultat précédent ne permet pas de donner de garantie que la variable aléatoire X restera inférieure au seuil $\hat{X}_{\alpha,n}$ avec un niveau de confiance proche de 1, car $\hat{X}_{\alpha,n}$ est distribué asymptotiquement de manière symétrique autour de x_α.

Pour α et n donnés (avec $\lceil \alpha n \rceil < n$, i.e. $n \geq (1-\alpha)^{-1}$), on cherche le plus petit entier k tel que $\lceil \alpha n \rceil < k \leq n$ et $\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) \geq \beta$ pour un niveau de confiance β donné (penser à β proche de 1).

15. Montrer que si $\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) \geq \beta$, alors $\mathbb{P}(X > X_{(k)}) \leq (1-\alpha) + (1-\beta)$.
16. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i > x} = j\right) = \binom{n}{j} (1 - F_X(x))^j F_X(x)^{n-j}$$
où $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.
17. Montrer que
$$\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) = 1 - C_\alpha(n, k)$$
où $C_\alpha(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j$.
18. A quelle condition sur n l'ensemble $\{k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) \geq \beta\}$ est non vide ? Sous cette condition, l'estimateur de Wilks est donné par $X_{(k_0)}$ où $k_0 = \min\{k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) \geq \beta\}$.

Exercice 2 : Approximation particulaire d'une EDS « non-linéaire »

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée**, telle qu'il existe une constante $L \in [0, +\infty)$ pour laquelle
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \max\{|\phi(x) - \phi(y)|, |x\phi(x) - y\phi(y)|\} \leq L|x - y|.$$
On considère l'équation différentielle stochastique (EDS)
$$\mathrm{d}X_t = \phi(\mathbb{E}[X_t])X_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = \xi, \tag{$*$}$$
où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, et la variable aléatoire ξ est indépendante du mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ et telle que $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration générée par le mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ et la condition initiale ξ.

On notera que le coefficient de dérive de cette équation dépend non seulement de la valeur de la variable aléatoire X_t, mais également de sa *loi*, au travers de l'espérance. Cette équation n'est donc pas couverte par la théorie vue en cours. Par *solution* de cette équation, on entend un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est intégrable, et
$$X_t = \xi + \int_0^t \phi(\mathbb{E}[X_s])X_s \,\mathrm{d}s + W_t.$$

A. Résultats préliminaires

1. Donner un exemple de fonction ϕ (non constante) vérifiant les hypothèses énoncées.
2. Soient $T > 0$ et $q : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in [0,T], \qquad q(t) \leq \alpha \int_0^t q(s)\mathrm{d}s + C.$$
Montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, $q(t) \leq C\mathrm{e}^{\alpha t}$.

B. Existence et unicité

3. Justifier que l'équation différentielle ordinaire (EDO)
$$m'(t) = \phi(m(t))m(t), \qquad m(0) = \mathbb{E}[\xi],$$
possède une unique solution, que l'on note m dans la suite.
4. Supposons qu'il existe une solution $(X_t)_{t\geq 0}$ à l'équation $(*)$, telle que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer que cette fonction est solution de l'EDO de la question précédente.
5. Montrer que l'EDS
$$\mathrm{d}X_t = \phi(m(t))X_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = \xi,$$
possède une unique solution forte, qui vérifie de plus que pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right] < +\infty.$$
6. Conclure sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $(*)$.
7. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de l'équation $(*)$, monter que pour tout $T \geq 0$,
$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[X_t^2] < +\infty.$$

C. Système de particules

On considère n particules, dont les positions $Y_t^1, \ldots, Y_t^n$ évoluent dans $\mathbb{R}$ selon le système d'EDS
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \mathrm{d}Y_t^i = \phi\left(\overline{Y}_t^n\right) Y_t^i\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t^i, \qquad Y_0^i = \xi^i, \tag{$**$}$$
où l'on a noté
$$\overline{Y}_t^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_t^j.$$
Les processus $(W_t^1)_{t\geq 0}, \ldots, (W_t^n)_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens indépendants. Les variables aléatoires $\xi^1, \ldots, \xi^n$ sont i.i.d. de même loi que ξ, et indépendantes des mouvements browniens $(W_t^1)_{t\geq 0}, \ldots, (W_t^n)_{t\geq 0}$.

8. Montrer que le processus $(\overline{W}_t^n)_{t\geq 0}$ défini par $\overline{W}_t^n = (W_t^1 + \cdots + W_t^n)/\sqrt{n}$ est un mouvement brownien.

9. On note $\overline{\xi}^n = (\xi^1 + \cdots + \xi^n)/n$. Vérifier que l'EDS

$$\mathrm{d}M_t = \phi(M_t)M_t\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}\overline{W}_t^n, \qquad M_0 = \overline{\xi}^n,$$

possède une unique solution forte, que l'on note $(M_t)_{t\geq 0}$ par la suite.

10. Soit $(\widetilde{M}_t)_{t\geq 0}$ un processus vérifiant, pour tout $t \geq 0$,

$$\widetilde{M}_t = \overline{\xi}^n + \int_0^t \phi(M_s)\widetilde{M}_s\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{W}_t^n.$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $t \geq 0$,

$$|M_t - \widetilde{M}_t| \leq C\int_0^t |M_s - \widetilde{M}_s|\mathrm{d}s.$$

En déduire que $M_t = \widetilde{M}_t$ pour tout $t \geq 0$.

11. En adaptant un raisonnement fait en cours, justifier que le système d'EDS

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \mathrm{d}Y_t^i = \phi(M_t)Y_t^i\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t^i, \qquad Y_0^i = \xi^i,$$

possède une unique solution forte $(Y_t^1,\ldots,Y_t^n)_{t\geq 0}$.

12. Montrer que $(Y_t^1,\ldots,Y_t^n)_{t\geq 0}$ est l'unique solution du système d'EDS $(**)$.

D. Couplage

Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $(X_t^i)_{t\geq 0}$ la solution de l'EDS $(*)$ dirigée par le mouvement brownien $(W_t^i)_{t\geq 0}$ et de condition initiale ξ^i. Les processus $(X_t^i)_{t\geq 0}$ et $(Y_t^i)_{t\geq 0}$ sont donc dirigés par le même mouvement brownien et possèdent la même condition initiale.

13. Justifier que les processus $(X_t^1)_{t\geq 0},\ldots,(X_t^n)_{t\geq 0}$ sont indépendants. Qu'en est-il des processus $(Y_t^1)_{t\geq 0},\ldots,(Y_t^n)_{t\geq 0}$?

14. Montrer que pour tout $T > 0$, et pour tout $t \in [0,T]$,

$$(M_t - m(t))^2 \leq 3(\overline{\xi}^n - \mathbb{E}[\xi])^2 + 3L^2T\int_0^t (M_s - m(s))^2\mathrm{d}s + \frac{3}{n}(\overline{W}_t^n)^2.$$

En déduire que pour tout $T > 0$, il existe une constante C_T telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(M_t - m(t))^2] \leq \frac{C_T}{n}.$$

15. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_t^i - Y_t^i| \leq C\int_0^t \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_s^i - Y_s^i|\right)\mathrm{d}s + \int_0^t |\phi(M_s) - \phi(m(s))|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_s^i|\right)\mathrm{d}s.$$

16. En déduire que pour tout $T > 0$, il existe une constante D_T telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_t^i - Y_t^i|\right] \leq \frac{D_T}{\sqrt{n}},$$

puis que $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^1 - Y_t^1| = 0$.

On peut montrer que lorsque $n \to +\infty$, les particules définies par le système d'EDS $(**)$ se comportent asymptotiquement (en un certain sens) comme des copies indépendantes du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'EDS $(*)$: l'interaction entre les particules est alors encodée dans le fait que l'évolution de X_t dépende de sa loi. Ce phénomène est appelé la *propagation du chaos*, il est caractéristique des systèmes dits *à champ moyen*.

17. *Question facultative.* Pour tout $t \geq 0$, on note μ_t la loi de la variable aléatoire X_t. En appliquant la formule d'Itô, montrer que l'équation de Fokker-Planck vérifiée par μ_t est non-linéaire. (Ceci justifie le fait que $(X_t)_{t\geq 0}$ est parfois appelé processus de diffusion « non-linéaire ».)